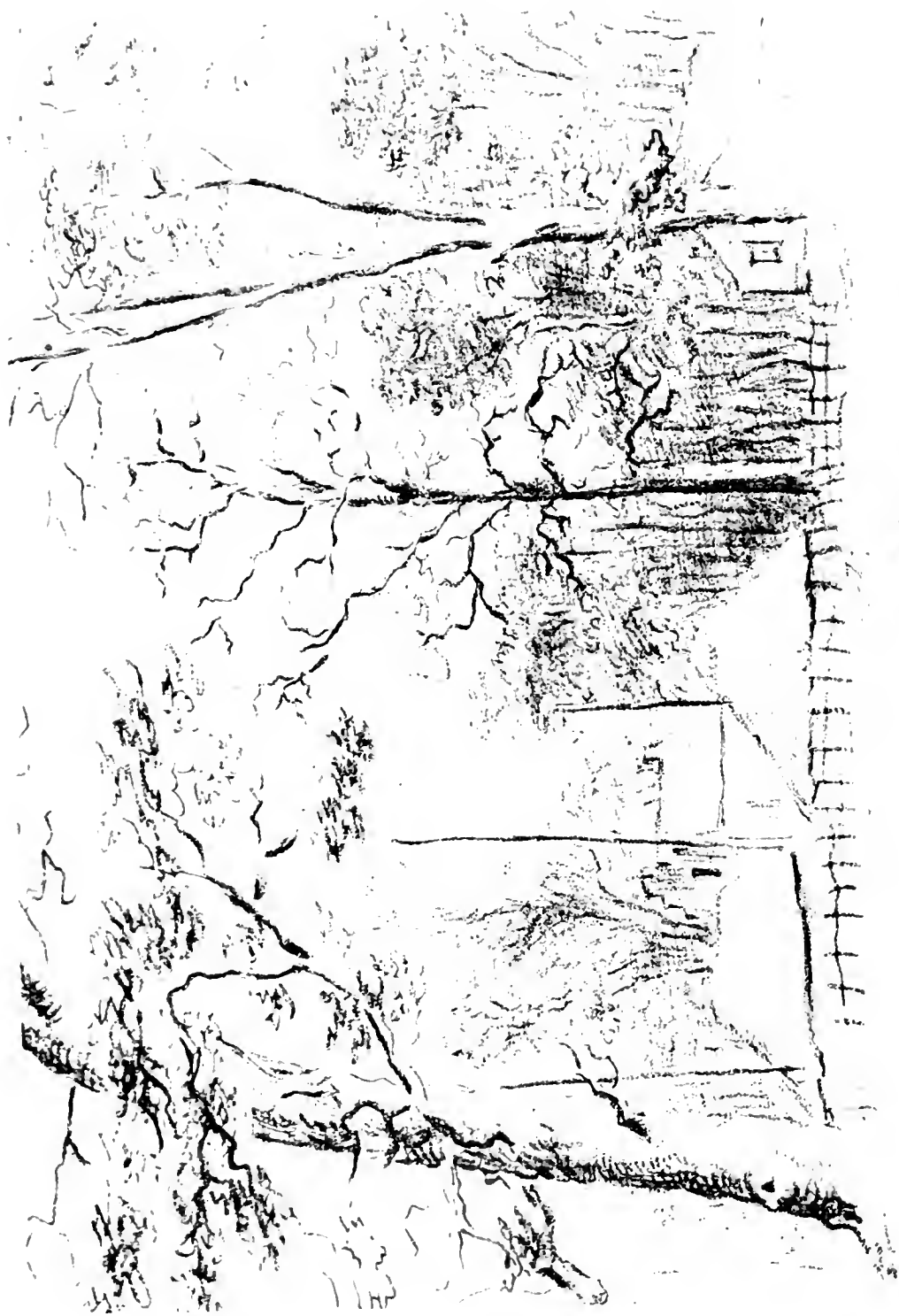




UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

ŒUVRES COMPLÈTES
DE
CHRISTIAAN HUYGENS.



Wageningen, 1658.

Wageningen, 1658.



ŒUVRES COMPLÈTES

DE

PUBLIÉES PAR LA

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES

TOME VINGTIÈME

MUSIQUE ET MATHÉMATIQUE

MUSIQUE

MATHÉMATIQUES DE 1666 À 1695



444454
27-5-46

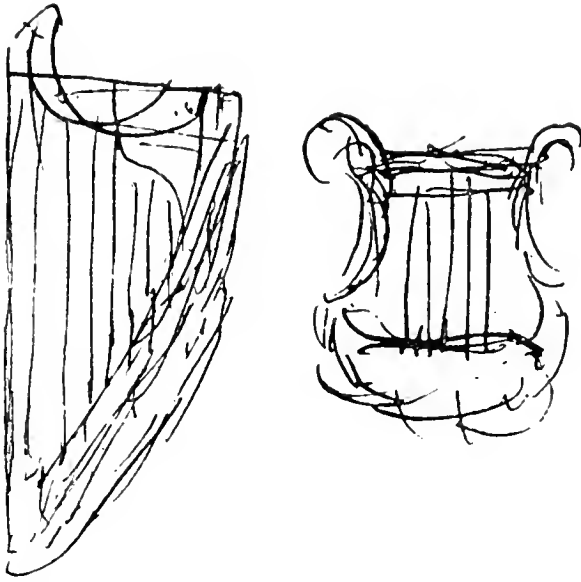
LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF

1940

Q
113
H89
1888
£. 20

MUSIQUE ET MATHÉMATIQUE
MUSIQUE
MATHÉMATIQUES DE 1666 À 1695

HOMMAGE DE HUYGENS À THÉOCRITE.



La f. 1. du portefeuille „Mousta“¹⁾ porte outre les figures d'une harpe et d'une lyre que nous reproduisons ici, les citations suivantes de Théocrite²⁾:

πτῶντο ξουθαι περι πιδακος ἀμφι μελισσαι.
παντ' ὥσδεν θρεος μαλα πιονος ὥσδε
δ' ὀπωρης³⁾.

Les abeilles dorées voltigeaient autour de la source. De toutes parts flottait l'odeur d'un riche été, l'odeur de l'automne.

ἡ καλας ἀμμε πων ἐλεληθει βωκος ἀοιδας
ὥς ἐν ταν ἰδεαν τας ἀρμονιας ἐμετρησεν⁴⁾.

En vérité, nous n'avons pas suffisamment remarqué la beauté des chants du berger qui observe si bien les règles de l'harmonie.

ὑψηλον δ' Ἱερωνι κλεος φορεοιεν ἀοιδοι
και ποντου σκυθικοιο περαν και ὅπου πλατυ
τειχος
ἀσφαλτω δητασα Σεμιραμιν ἐμβασιλευεν⁵⁾.

Chantons hautement la gloire de Hiéron depuis la mer scythique jusqu'à la ville de Sémiramis⁶⁾ qui cimentait son large mur avec de l'asphalte.

χαίρετε δ' ἄλλοι
ἀσπερες εὐκηλοιο κατ' ἀντυγα Ζηνος ὀπαδοι⁷⁾.

Salut à vous, autres astres, qui parcourez fidèlement vos orbites par rapport à Zeus l'immuable.

χρηματα δε ζωντες ἀμαλδυνοντι θανοντων⁸⁾

Or, les vivants corrompent les choses des morts.

¹⁾ Voyez sur sa date la p. 88 qui suit.

²⁾ Nous citons les nos des idylles et des vers d'après l'édition de 1909 de H. L. Ahrens des „Bucolici“.

lica græci". Comparez la note 7 de la p. 88 du T. XIX. Pour les variantes il faut consulter les différentes éditions de Théocrite. Nous croyons devoir traduire les citations sans tenir compte du contexte: chez le poète *χαιρετε δ' ἄλλοι ἀστέρες* veut dire „adieu les autres astres”, c.à.d. autres que la lune; pour *ἄμμι* nous écrivons „nous” au lieu de „nous deux”; nous conservons le mot „asphalte” quoiqu'en français „bitume” soit plus correct.

³⁾ Idylle VII, vs 141—142.

⁴⁾ Idylle X, vs 38—40.

⁵⁾ Idylle XVI, vs 98—100.

⁶⁾ Babylone.

⁷⁾ Idylle II, vs 164—165.

⁸⁾ Idylle XVI, vs 59.

MUSIQUE ET MATHÉMATIQUE.



Avertissement.

Dans le T. XIX ¹⁾) nous avons dit que la théorie des rapports provient de la considération des accords musicaux. C'est ce qu'on voit clairement en comparant la définition du λόγος musical donnée par Aristoxène, cité par Porphyre ²⁾):

δύο φθόγγων ἀνομοίων ἢ κατὰ πηλικότητα ποιά σχέσις, ὅ ἐστι λόγος ³⁾)

avec celle, également vague, du λόγος de deux grandeurs de même nature donnée ou inférée un peu plus tard par Euclide dans ses Éléments ⁴⁾):

λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιά σχέσις.

L'une et l'autre définition sont citées par Meibomius dans son „Dialogus” de 1655 ⁵⁾) auquel se rapporte la Pièce I qui suit.

¹⁾ P. 356.

²⁾ ΠΟΡΦΥΡΙΟΥ ΕΙΣ ΤΑ ΑΡΜΟΝΙΚΑ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ, Chap. 13; p. 139 de „Porphyrios' Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios” éd. I. Düring, Göteborg, Wettergren et Kerber, 1932.

³⁾ Il ne s'agit apparemment pas ici des rapports des longueurs des cordes d'un instrument de musique, mais des rapports quantitatifs de deux sons c.à.d. de leurs hauteurs respectives, de quelque manière qu'ils soient produits. Le mot πηλικότης a donc en ce temps un sens fort général.

Voyez encore sur ce mot grec la note 2 de la p. 11 qui suit: Theo Smyrnaeus, plusieurs siècles plus tard, considère le πηλικόν comme une grandeur géométrique continue. Asklepios, commentant l'Arithmétique de Nicomaque, avait dit également: τὸ πηλικόν μέγεθος ἐστὶ συνεχές (p. 83 du „Dialogus” de Meibomius).

⁴⁾ Troisième définition du livre 5.

⁵⁾ P. 83 et 85.

On a sans doute compris de temps immémorial que les longueurs des cordes vibrantes des instruments de musique rendent les *πηλικότητες* des sons, pour ainsi dire, mesurables.

„Nous sommes aujourd'hui habitués" dit P. Tannery dans son article de 1902 „Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure" — il y parle brièvement du quadrivium des Universités au moyen âge — „à considérer la notion du logarithme comme dérivant directement de celle des progressions des puissances entières" ¹⁾ quoique „la forme sous laquelle [Neper] a présenté son invention en masque la première origine". Nous ne savons pas en vérité ce qui fut chez Neper la première origine de l'invention: rien, si ce n'est, comme l'observe Tannery, *le mot logarithme* créé par lui ²⁾, n'indique que la considération des deux progressions, arithmétique et géométrique, partant aussi celle de l'échelle musicale, y soit pour quelque chose ³⁾. Mais si, selon toute probabilité, la musique n'a joué ici qu'un rôle nul ou extrêmement effacé, il eût certes pu en avoir été autrement. Meibomius, lui, pense en musicien; il semble ne pas connaître les logarithmes de Neper, de Bürgi ou de Briggs, mais sa „Tabula rationis superoctagesimæ — quam commatis rationem ⁴⁾ recentiores faciunt — centiesduodecies sibi superadditæ: quâ, tanquam communi mensurâ, cæterarum rationum magnitudinem deinceps explorabimus" ⁵⁾ fait voir qu'il considère,

¹⁾ L'article de Tannery se trouve dans le „3. Band, 3. Folge" de 1902 de la „Bibliotheca mathematica, Zeitschrift für Geschichte der math. Wissenschaften" publié par G. Eneström (Leipzig, Teubner); il est réimprimé dans „Paul Tannery, Mémoires scientifiques", publié par J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen III, 1915 (Toulouse, E. Privat et Paris, Gauthier-Villars).

²⁾ La Prop. I du Cap. II de la „Descriptio mirifici logarithmorum canonis" de 1614 est la suivante: „Proportionalium numerorum aut quantitatum æquidifferentes sunt logarithmi".

³⁾ Voyez „The law of exponents in the works of the sixteenth century" par D. E. Smith, et d'autres articles contenus dans le „Napier Tercentenary Memorial Volume" publié par Cargill Gilston Knott (Royal Soc. of Edinburgh, Longmans, Green & Co., London 1915). Le lecteur hollandais peut consulter aussi N. L. W. A. Gravelaar „John Napier's Werken" (Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen, Eerste Sectie, Deel VI, Amsterdam, J. Müller, 1899).

⁴⁾ Comparez le premier alinéa de la p. 45 qui suit.

⁵⁾ „Dialogus", p. 70—71. Il conclut de sa table, contenant les puissances de $\frac{81}{80}$ depuis la première jusqu'à la 112^{ième}: „Ratio $\frac{2}{1}$ major est commatis 55, minor commatis 56", c.à.d. $\frac{2}{1}$ est compris entre $\left(\frac{81}{80}\right)^{55}$ et $\left(\frac{81}{80}\right)^{56}$. De même $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$ et $\frac{3}{2}$ sont respectivement compris entre les puissances 88 et 89, 111 et 112, 32 et 33^{ième}. Comparez la fin de la note 11 de la p. 46 qui suit.

comme Briggs, et aussi comme N. Mercator écrivant en 1667 (voyez la p. 11), comme une chose importante d'exprimer approximativement les nombres comme les puissances d'une quantité fort peu supérieure à l'unité ⁶⁾. Or, la lecture du „Dialogus” peut avoir fortement contribué à amener Huygens à considérer simultanément — Pièce II qui suit, datant de 1661 — „la division du monochorde” et „les logarithmes . . . ces merveilleux nombres”. Nous sommes d'autant plus autorisés à croire à l'influence de Meibomius, que la critique de 1656 de Huygens de la pensée de cet auteur — voyez dans la Pièce I ses remarques sur la p. 127 de M. — n'est pas bien fondée, ce qu'il a dû reconnaître bientôt après, comme notre observation en cet endroit le fait voir.

Voyez cependant aussi ce que nous disons aux p. 203—204 qui suivent sur le „Cours Mathématique” de P. Hérigone, connu à Huygens au moins depuis 1652.

R. C. Archibald ⁷⁾ remarque dans un mémoire de 1924 que, même en 1691 lorsque Huygens publia le „Nouveau cycle harmonique” ⁸⁾, aucun autre que lui, semble-t-il, n'avait encore calculé des intervalles musicaux en se servant d'une table de logarithmes (et pourtant en 1661, ainsi que dans les années suivantes ⁹⁾, Huygens n'avait nullement fait un mystère de sa trouvaille). F. J. Fétis, ainsi que K. W. J. H. Riemann, ne connaissant apparemment pas l'écrit de Huygens, émettaient bien à tort l'hypothèse que l'application des logarithmes à la musique n'aurait eu lieu qu'au dix-huitième siècle; ce qu'on lit encore dans une édition du „Musik-Lexikon” de Riemann postérieure à 1924 ¹⁰⁾.

La Pièce III de 1662 fait voir que Huygens, d'accord avec Aristoxène et Euclide, ne partage pas la „multorum sententia”, en particulier celle de J. Wallis, d'après laquelle les „quantitates rationum” feraient des nombres.

⁶⁾ Nous mentionnons cette „Tabula” de Meibomius aussi dans la note 2 de la p. 155 qui suit.

⁷⁾ R. C. Archibald „Mathematicians and Music”, The American Math. Monthly, Vol. XXXI, No. 1, Jan. 1924. C'est un „presidential address” delivered before the mathematical association of America, Sept. 6, 1923.

⁸⁾ Notre T. X, p. 169—174 et p. 164 du présent Tome.

⁹⁾ On peut voir à la p. 368 de notre T. VII qu'en 1673(?), dans une Pièce qui n'a pas été conservée, Huygens donnait au musicologue Cousin le conseil de se servir de logarithmes.

¹⁰⁾ Voyez la note 12 de la p. 145 qui suit. Ailleurs — note de la p. 359 de sa „Geschichte der Musiktheorie” — Riemann fait pourtant preuve de connaître le „Nouveau cycle harmonique”: consultez la note 14 de la p. 158 qui suit (où l'on voit aussi que Riemann y découvre une erreur imaginaire).

CRITIQUE DU LIVRE DE 1655 DE M. MEIBOMIUS
„DE PROPORTIONIBUS DIALOGUS”²⁾.

Huygens avait vu le „Dialogus” en France en 1655³⁾. En avril 1656 Fr. v. Schooten demanda son opinion sur ce livre ce qui l’amena à „pervolvere” le volume de nouveau et à écrire: Homo plane ineptus est, totaque disputatio contra definitionem 7^{mam} libri 5 Elementorum (quæ Clavio 8^a est) huic enim nititur propositio 8^a ejusdem libri. Quid autem magis frivolum quam de definitionibus altercari? cum liberum sit aut certe parum referat quo nomine quidque designetur⁴⁾. Comparez toutefois la Pièce sur Euclide à la p. 184 qui suit, ainsi que celle de la p. 190, où Huygens — à un âge plus avancé — n’approuve pas également toutes les définitions anciennes.

Pag. 103. v. 8. ⁴⁾ Rationem æqualitatis nihili rationem seu nullam appellat.

Voyez à propos de cette première proposition de Meibomius une sentence analogue de Merfenne de 1644, citée dans la note 98 de la p. 214 qui suit.

Pag. 104 in fine. Rationem duplam subduplæ æqualem dicit (licet non eadem sit), quoniam idem est inter utriusque terminos intervallum. Attamen rationem subduplam dupla superat ratione quadrupla. Pag. 124 in med. Eodem modo pag. 106 in fine æquales dicit rationes 6 ad 4 et 4 ad 6. quia una tantum excedat quantum altera deficit à nihili ratione.

Pag. 118. Quantitas rationis in duarum magnitudinum inter se distantia spectatur. Ideo ratio æqualitatis ratio quidem est sed nullius quantitatis.

Ces définitions de Meibomius, éditeur des „Antiquæ Musicæ Auctores septem”, 1652⁵⁾ s’expliquent par le fait qu’il considère les rapports en musicien. La „quantitas rationis” étant censée dépendre de la „distantia”, il est évident que la „ratio 6 ad 4” est à peu près identique avec la „ratio 4 ad 6”. Il ne fait aucune mention de logarithmes, qu’il semble ne pas connaître. Néanmoins, on peut dire qu’il considère les rapports à un point de vue logarithmique: le logarithme du rapport des longueurs égales de deux cordes rendant le même son est nul et les logarithmes des rapports „6

¹⁾ Chartæ mathematicæ, f. 11. Le texte qui suit fait voir que cette feuille date de 1656.

²⁾ Nous avons mentionné ce livre dans la note 5 de la p. 409 du T. I; en voici le titre complet: M. Meibomii, Consilarii Regii, De Proportionibus Dialogus. Ad Serenissimum Principem, Fridericum III, Daniæ, Norvegiæ, Vandalorum, Gotthorumque Regem, &c. ΕΥΝ ΤΩ ΘΕΩ ΑΕΙ ΓΕΩΜΕΤΡΟΥΝΤΙ ΗΑΣ ΣΟΦΟΣ ΑΕΙ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ. Hafniæ, Typis Melchioris Martzani, MDCLV.

³⁾ T. I, p. 413. Van Schooten approuve cette sentence (T. I, p. 422).

⁴⁾ Toutes les citations se trouvent en effet aux endroits indiqués par Huygens.

ad 4'' et „4 ad 6'' sont égaux (aux signes près) comme il convient, puisque les cordes de longueurs 6 et 4 produisent le même intervalle soit qu'on frappe premièrement l'une ou l'autre.

[Pag. 118]. Quæcumque autem alia [ratio], magna aut parva unitatis loco accipi potest.

Si l'on voulait considérer p.e. le rapport $\frac{a}{b}$ comme „unitas”, les rapports également distants $\frac{p}{q}$ et $\frac{a^2q}{b^2p}$ pourraient être censés égaux.

Pag. 125 in fine gloriatio.

Le dialogue a lieu dans les champs Elysées. Les ombres d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius Pergæus, de Pappus, d'Eutocius et de Theo (Alexandrinus?) y prennent part. Un certain Hermotimus, visiteur du séjour des morts, développe devant eux le nouveau système qu'il attribue à son ami Euthymius. A la p. 125 Hermotimus dit: „Atque ex his principiis omnia Euthymii dogmata, tam quæ vestra, illustres Geometræ, principia convellunt, & falsitatis convincunt, quàm quæ recentiorum hallucinationes ostendunt, deducuntur”. En parlant des „recentiores” Meibomius songe surtout à Grégoire de Saint Vincent dans le livre duquel — l'„Opus geometricum” de 1647, où il prétendait avoir trouvé la quadrature du cercle; voyez la note 6 de la p. 53 du T. I, et consultez les T. XI et XII — il est constamment fait usage de compositions ou additions de rapports⁵⁾.

Pag. seq. falsa igitur est 8^a propositio lib. 5 Elem. et 10, et multæ aliæ quæ ab his pendent. &c.

Comme Huygens le dit fort bien — début et fin de la présente Pièce — il ne s'agit en somme que d'une dispute (pour employer ce terme) sur les définitions.

D'après la prop. 8 du livre 5 des Eléments d'Euclide — dont la prop. 10 est l'inverse — on doit dire, lorsque $a > b$, que le rapport $\frac{a}{c}$ est toujours supérieur au rapport $\frac{b}{c}$.

Pag. 127. dicit 16 ad 24 majorem habere rationem quam 21 ad 31. Quia enim est ut 16 ad 24, ita 21 ad 31 $\frac{1}{2}$ major est distantia inter 21 et 31 $\frac{1}{2}$ hoc est 16 ad 24 quam inter 21 et 31. Ego vero sic dicam. Quia enim est ut 16 ad 24 ita 8 ad 12, minor est distantia inter 8 et 12, hoc est 16 et 24 quam inter 21 et 31.

⁵⁾ Nous avons fait mention de ce recueil — contenant e.a. „Euclidis liber de Canonis Sectione” — à la p. 362 du T. XIX.

Comme la note 4 de la p. 138 du T. I ne donne que peu de détails biographiques sur Meibomius (1630—1711), nous ajoutons, sans être complets, qu'il avait publié déjà en 1649 à Amsterdam ses „Observationes ad loca quædam librorum decem M. Vitruvii Pollionis de Architectura”. Son „Dialogus” ayant été attaqué e.a. par W. Lange — „Epistola ad Meibomium”, Hafniæ 1656 — il répliqua en 1657 („Responsio ad Langii epistolam”, Hafniæ). En 1671 il publia à Amsterdam son „De fabrica trirerum”.

⁶⁾ Fr. X. Aynscom dans l'ouvrage de 1656 („Expositio et deductio geometrica”) cité dans la note 6 de la p. 210 du T. I, et dont nous avons reproduit une partie aux p. 248—261 du T. XII, défend Grégoire de Saint Vincent à la fois contre Meibomius et contre Huygens.

Ici la critique de Huygens est apparemment sans valeur. Il n'y a aucune indétermination ou contradiction logique puisque chez Meibomius le mot „distantia” désigne un *rappor*t, et non pas une *différence*.

Dans le T. XVI¹⁾ nous avons relevé que dans un cas spécial Huygens dit, probablement en cette même année 1656, qu'une grandeur Q_1 „recedit” autant qu'une autre Q_2 d'une grandeur donnée intermédiaire Q lorsqu'on a $\frac{Q_1}{Q} = \frac{Q}{Q_2}$. En cet endroit il adopte, peut-on dire, la manière de parler de Meibomius soutenant que les „rationes” ou „distantiæ” de Q_1 à Q et de Q_2 à Q sont égales. Observons en passant que, autrement que Meibomius, Eratosthène et Théon de Smyrne font sous ce rapport une distinction entre le λόγος, ratio, d'une part et le διάστημα, intervallum ou distantia, d'autre part²⁾.

Pag. 129. Falsum vero [suivant Meibomius] 4 ad 5 majorem rationem habere quam 4 ad 7. Falsum 4 ad 6 majorem rationem habere quam 3 ad 6.

Falsum 4 ad 3 majorem habere rationem quam 2 ad 3, quod diversi generis rationes excessiva et defectiva inter se comparari nequeant. Quasi dicas falsum esse cubum quadrato esse majorem.

Pag. eadem 129 bene Euclides respondet.

Voici la réponse d'Euclide laquelle montre que Meibomius comprend fort bien la manière ordinaire d'envisager les choses. „Si quæ unquam ineptiæ, & olim, cum inter mortales degerem, & ex quo hac beatâ quiete mihi frui liceat, sando ad aures meas pervenere, inter illas certe has Euthymii tui, o Hermotime, primo loco censere possum. Ut enim illud nunc præteream, inconcussio fundamenti, septima nimirum ejusdem libri definitione, niti hanc nostram propositionem, facilliori adhuc viâ eandem veritatem hic demonstratam dabo. Sint enim eadem lineæ, iidem numeri, quos tu ante proferebas. Dico (numeros solos adcommodans, ut brevius me expediam) non tantum 7 ad 4 majorem rationem habere quam 5 ad 4; quod etiam concessit Euthymius; sed & revertendo: quod ejusdem propositionis secundo membro volo; 4 ad 5 majorem rationem habere quam 4 ad 7. Quis enim mortalium, exceptis Euthymio & Hermotimo, dubitat, vel unquam dubitavit, aut venientibus seculis dubitaturus est, quin, uti verum est, septem partes quartas majores esse quinque partibus quartis, sic immotæ veritatis sit, quatuor partes quintas majores esse quam quatuor partes septimas?”. Tandis que les autres ombres approuvent hautement les paroles d'Euclide, seul Archimède parle comme suit: „Fateor & me hac sententiâ olim fuisse imbutum; sed ex iis, quæ principiorum loco ante retulit Hermotimus, jam aliter video hæc esse concipiendâ”.

Pag. 143 in fine. Quid enim [suivant Meibomius] clarius docetur quid concinnius, quam quod rationum omnium quasi centrum sit ratio nihili. Pag. 144. rationem sesquialteram excessivam superare rationem sesquialteram defectivam, ratione bis sesquialtera. Pag. 148. Propositio Meibomij quam pro 8^a 5^{ti} substituit ridicula.

La nouvelle proposition est formulée par Meibomius comme suit: „Duarum inæqualium magnitudinum illa, ad eandem, utraqûe aut majorem aut minorem, aut alteruti æqualem, majorem rationem habet, quæ longius ab hac distat: & vicissim”.

Gloriatio. Jactatio pag. 204.

¹⁾ P. 154, note 2 et p. 155, note 5.

²⁾ Le cap. 30 du livre cité dans la note suivante est intitulé Τινα διαφέρει διάστημα καὶ λόγος (Quomodo differant intervallum & ratio). Il y est dit que les intervalles $\frac{6}{3}$ et $\frac{3}{6}$ sont identiques, mais que les λόγος $\frac{6}{3}$ et $\frac{3}{6}$ sont l'inverse l'un de l'autre.

La p. 204 est la dernière page du livre où, à l'exemple d'Archimède, tous les mathématiciens se déclarent convaincus.

Disputatio tota est contra definitionem 7 lib. 5. Quid autem stultius?

Cette définition est la suivante: "Όταν δὲ τῶν ἰσότητος πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχη τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλάσιου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχη τοῦ τοῦ τεταρτου πολλαπλάσιου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεῦτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

Pour éviter tout malentendu, il convient d'ajouter qu'en rejetant la 7^{ième} définition pour les raisons susdites, Meibomius ne désapprouve aucunement le sentiment d'Euclide — sentiment qui donna lieu à cette définition justement célèbre; le lecteur hollandais pourra consulter l'ouvrage d'un de nous de 1930 „De Elementen van Euclides”*; voyez le titre complet à la p. 584 qui suit — savoir qu'un rapport est tout autre chose qu'un nombre. Après la „réponse d'Euclide” citée dans le texte Meibomius, par la bouche d'Hermotimus, s'étend longuement sur ce sujet.

Aux p. 78 et suiv. Meibomius avait déjà discuté la définition 5 du livre 6 d'Euclide qui lui fait évidemment de la peine³⁾: Λόγος ἐκ λόγων συγμείσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες [ἐφ' ἐαυτάς, suivant Eutokios] πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινα. Cette définition qui ne se trouve pas dans tous les manuscrits, correspond apparemment mal avec les sentiments du véritable Euclide; on peut la considérer comme apocryphe („De Elementen van Euclides” II, p. 102, note 91).

Les considérations de N. Mercator sur les intervalles musicaux dans sa „Logarithmo-technia” de 1667 (voyez la p. 214 qui suit) sont conformes à celles de Meibomius. Mercator écrit (p. 175 de l'édition de Mafes; voyez la p. 261 qui suit): „certe eadem est utrobique quantitas intervalli Musici (atque idem numerus ratiuncularum intercedentium), licet ab unisono (vel ab æqualitatis ratione, tanquam nihilo) in diversas planè partes abeat. Unde si moles sola, aut quantitas rationis æstimetur, dissimulando utram in partem (majorisne, an minoris inæqualitatis) vergat ab æqualitate; nihilo major est ratio ternarii ad binarium, quam binarii ad ternarium”. Il ajoute que ce qui est vrai „in Musiceis” l'est aussi „in hac nostra logarithmo-technia”. Avec Euclide (voyez la citation grecque à la p. 5 qui précède) il appelle (p. 169) la „ratio” non pas un nombre mais une „habitus mutua”. Sa définition du logarithme (ibid.) est: „Est enim logarithmus nihil aliud, quàm numerus ratiuncularum contentarum in ratione quam absolutus quilibet [numerus] ad unitatem obtinet”. Les „ratiuncule” de Mercator, de même que celles de Briggs—Neper considèrent des puissances de rapports un peu inférieures à $\frac{1}{2}$ —, ne diffèrent évidemment pas infiniment peu de la valeur $\frac{1}{2}$: le rapport $\frac{1}{2}$ (p. 189) en contient dix millions.

* P. Noordhoff, Groningen.

³⁾ A propos du mot πηλικότης il cite (à la p. 83) le passage suivant de Theo Smyrnaeus qui fait voir en outre que celui-ci donne également une place éminente au rapport de deux grandeurs égales: Τοῦ μὲν ποσού στοιχείου ἡ μονάς· τοῦ δὲ πηλικού, στεγμὴ· λόγος δὲ καὶ ἀναλογίας ἰσότης. οὔτε γὰρ μονάδα ἐτι διελθεῖν ἐστιν εἰς τὸ ποσόν· οὔτε στεγμὴν εἰς τὸ πηλικόν· οὔτε ἰσότητα, εἰς πλείους λόγους. On trouve ce passage à la p. 130 de l'édition de 1644 de Boulliau, mentionnée dans la note 19 de la p. 180 qui suit, de l'ouvrage de Théon τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρησίμουν εἰς τὴν τοῦ ΠΑΑ-ΤΩΝΟΣ διέκρωσιν.

II.

MUSIQUE ET LOGARITHMES CHEZ HUYGENS.

T. III, p. 307 et 308, lettre de Chr. Huygens à R. Moray du 1 août 1661:

Je me suis occupé pendant quelques jours à estudier la musique, et la division du monochorde ¹⁾ à la quelle j'ay appliqué heureusement l'algebre. J'ay aussi trouué que les logarithmes y sont de grand usage, et de la je me suis mis à considerer ces merveillex nombres et admirer l'industrie et la patience de ceux qui nous les ont donnez. Que si la peine n'en estoit desia prise, j'ay une regle pour les trouuer avec beaucoup de facilité, et non pas la vingtieme partie du trauail qu'ils ont cousté.

Voyez sur cette règle la note 5 de la p. 308 du T. III, ainsi que les p. 431—434 et 451—456 du T. XIV et les p. 204—206, 225—227 et 295—297 qui suivent.

¹⁾ Comparez sur la Sectio Canonis ou *Κατασκευὴ ὀργάνου* la note 5 de la p. 9 qui précède. La question de l'authenticité du traité d'Euclide soulevée e.a. par P. Tannery — „Mémoires Scientifiques” Vol. III de 1915, p. 213 — est ici sans importance. Comparez la note 2 de la p. 177 qui suit.

III.

LA COMPOSITION OU ADDITION DES RAPPORTS.

1662. Aug. Censura missa ad bibliopolam Iobbij, uti ipse petierat . . . Nous avons déjà reproduit dans le T. IV ¹⁾ cette page ²⁾ qui traite en majeure partie de la duplication du cube et de la quadrature du cercle. Ici le dernier alinéa seul nous intéresse.

Quod Wallisius scripserit ³⁾ rationem 5 ad 12 superare rationem 1 ad 3 ratione 1 ad 12, non est credibile per errorem hoc eum fecisse, sed quod pro additione rationum eam quoque habuerit quæ sit addendo fractiones, quæ quantitatem rationum secundum ipsius et aliorum multorum sententiam exprimunt. Non ignorat enim aliam et magis usitatam geometris rationum additionem seu compositionem, secundum quam ratio 1 ad 3 una cum ratione 5 ad 4 constituunt rationem 5 ad 12. Et præstaret quidem mea sententia non aliam agnoscere additionem rationum. Ne res duæ diversissimæ eodem nomine vocentur.

On voit que Huygens en 1662 maintient l'addition „musicale” des rapports ⁴⁾; et que de plus il ne parle pas avec sympathie de ceux qui, contrairement au sentiment d'Euclide et d'autres géomètres, veulent qu'on considère les „quantitates rationum” comme des *nombres* entiers ou fractionnaires. Comparez la fin de la Pièce I qui précède.

¹⁾ P. 203. Plus loin (p. 380) nous donnons les titres des traités de Hobbes.

²⁾ Manuscrit B, p. 107.

³⁾ Dans ses „Dialogi sex” Hobbes discute e.a. le traité de J. Wallis, intitulé „Adversus Meibomii de proportionibus dialogum, tractatus Elencticus” (1657). Déjà dans le premier dialogue entre les personnages A et B on lit ce qui suit: „A. Eandemne rem esse censet [Wallisius] Rationem et Fractionem?

B. Ita plane, & id pluribus tum hujus, tum aliorum suorum Librorum locis, disertis verbis asserit.

A. Asserenti tantum, non etiam demonstranti, non est necesse ut assentiamur”. Etc.

⁴⁾ Comme N. Mercator le fait aussi en 1667.

MUSIQUE.



Avertissement général.

Non audio qui allegant auctoritatem¹⁾.

Dans ses considérations théoriques sur la musique, aussi bien que dans celles sur d'autres branches du savoir humain, Huygens, tout en lisant beaucoup et en conversant volontiers avec les gens compétents — nous songeons à sa conversation de 1662 avec un des frères Hemony²⁾ — n'entend pourtant nullement, l'adage ci-dessus l'exprime clairement, se soumettre à l'autorité d'autrui: c'est, somme toute, à son propre jugement qu'il se fie. Quoi de plus conforme à la dernière sentence des „Principia Philosophiæ” de Descartes — également intéressé, soit dit en passant, à la théorie de la musique³⁾ — où le philosophe, après avoir vanté son système, dit en terminant: „At nihilominus . . . nihil . . . ab ullo credi velim, nisi quod ipsi evidens & invicta ratio persuadebit”.

Nous n'entendons pas entrer ici dans une discussion sur la question de savoir jusqu'à quel point la „ratio” doit s'appuyer sur l'„experientia”⁴⁾. N'étant pas partisan d'un

¹⁾ Portefeuille „Musica”, f. 18 v, citée aussi à la p. 162 qui suit (note 26).

²⁾ P. 28 qui suit.

³⁾ Voyez ce que nous disons à la p. 33 qui suit sur quelques endroits de sa correspondance avec Mersenne et Constantijn Huygens père, où il traite e.a. brièvement de Simon Stevin, inventeur ou réinventeur (par hasard, peut-on dire; voyez la suite du texte; consultez aussi la p. 27 et la note 9 de la p. 32 qui suit) de ce qu'on appelle aujourd'hui la gamme tempérée.

⁴⁾ Comparez la l. 10 de la p. 31 du T. XVIII.

rationalisme à outrance tel qu'on le rencontre parfois chez Platon ⁵⁾, Huygens reconnaît volontiers que les règles de la musique ont été primitivement découvertes par l'expérience ⁶⁾. Ailleurs il dit même que l'on ne „trouve des inventions nouvelles... que par hasard” ⁷⁾. On peut ajouter que de pareils hasards ne se présentent guère qu'aux chercheurs ⁸⁾; et aussi que c'est souvent en grande partie des idées d'autrui que ces hasards proviennent ⁹⁾: comparez ce que Huygens dit à la page citée ¹⁰⁾ sur l'utilité des expositions ¹¹⁾.

Musicien depuis son enfance ¹²⁾, Huygens fait preuve dans plusieurs de ses lettres, p.e. dans celles qu'il écrivit à Paris pendant son séjour de 1655 ¹³⁾, de son intérêt pour cet art. Depuis 1661, date de la „*Divisio Monochordi*” (p. 49 qui suit), un mois après qu'il eut jeté les yeux sur un écrit de Hemony, nous le voyons s'occuper activement de la théorie ¹⁴⁾. D'autre part quelques-unes de ses notes théoriques ne peuvent être antérieures à 1691: en cette année parut le livre de Werckmeister qu'il discute ¹⁵⁾. C'est aussi en 1691 que fut imprimée son étude sur le Cycle Harmonique ¹⁶⁾, entreprise beaucoup plus tôt. Nous rappelons qu'elle est généralement connue sous le nom

⁵⁾ Voyez la note 5 de la p. 355 du T. XIX.

⁶⁾ Voyez le premier alinéa de la p. 116, ainsi que les l. 14—16 de la p. 154, la l. 4 d'en bas de la p. 155 et la l. 12 de la p. 168 qui suit: *Trouvè par experience, puis la raison*. En ce dernier endroit il s'agit de l'invention d'un certain tempérament que, dit Huygens, Zarlino et Salinas se disputent. Consultez sur cette „dispute” le deuxième alinéa de la p. 115. Voyez aussi sur l'„experience” et „la raison” le dernier alinéa de la p. 170.

⁷⁾ T. XIX, p. 265, l. 9.

⁸⁾ Comparez la note 2 de la p. 365 du T. XIX (expérience de Galilée sur les ratisséments dont l'invention fut „del caso”).

⁹⁾ „&... regardant par hazard ces iours passez en la Statique de Steuin...” (lettre de Descartes à Mersenne du 13 juillet 1638; „Oeuvres”, éd. Adam et Tannery, II, p. 247).

¹⁰⁾ T. XIX, p. 265, l. 18—20.

¹¹⁾ Il s'agit en cet endroit d'expositions de modèles de machines, non pas de cloches (voyez la note 2 de la page précédente et la note 1 de la p. 26 qui suit), d'archicymbales (p. 113 et 157 qui suivent), de claviers à touches fendues (p. 154 note 2 et 160 note 21) ou d'autres instruments de musique.

¹²⁾ T. I, p. 541 et 543 (lettres de l'instituteur Bruno). Voyez aussi la note 5 de la p. 356 du T. XIX.

¹³⁾ T. I, p. 361, 372 etc.

¹⁴⁾ Comparez le passage de la lettre à Moray du 1 août 1661, qui constitue notre Pièce II à la p. 12 qui précède.

¹⁵⁾ Portef. „Musica”, f. 20; § 9 de la p. 133 qui suit.

¹⁶⁾ Pièce VI F à la p. 164 qui suit, où nous renvoyons le lecteur au T. X.

„Novus Cyclus Harmonicus” d’après la traduction latine dans l’édition de ’s Gravefande de 1724. Après 1691 Huygens ne voulut plus rien publier quoiqu’il y ait songé un moment et qu’il eût eu l’occasion de le faire e.a. dans les „Acta Eruditorum”¹⁷⁾.

Pour d’autres particularités, en partie chronologiques, nous renvoyons le lecteur aux Avertissements des diverses Pièces empruntées en majeure partie au portefeuille „Musica” et faisant enfin connaître avec quelque précision, près de 250 ans après sa mort, la figure de Huygens musicologue.

¹⁷⁾ T. X, p. 225, 229, 230, 285, 298. Toutes ces pages datent de 1692.

MUSIQUE.

I. THÉORIE DE LA CONSONANCE.

AVERTISSEMENT.

- A. ORIGINE DU CHANT. RAPPORT DES LONGUEURS DES CORDES CONSONANTES SUIVANT PYTHAGORE ETC.
- B. AUTRES CONSIDÉRATIONS SUR LA GAMME DIATONIQUE, PRODUIT D'INTERVALLES CONSONANTS. LES DEMITONS CHROMATIQUES MODERNES.

II. LA DIVISION DU MONOCHORDE.

AVERTISSEMENT.

- A. COPIE D'UNE PARTIE D'UN ÉCRIT D'UN DES DEUX FRÈRES HEMONY INTITULÉ „VANDEN BEJAERT” (C.À.D. DU CARILLON).
- B. DIVISIO MONOCHORDI I.
- C. DIVISIO MONOCHORDI II.
APPENDICE À LA PIÈCE C (DIVISIO MONOCHORDI II).

III. PIÈCES SUR LE CHANT ANTIQUE ET MODERNE.

AVERTISSEMENT.

- A. LE TEMPO GIUSTO.
- B. LES DIVERS MODES.
- C. DIFFÉRENCES DE HAUTEUR, PAR RAPPORT AUX TONS DES INSTRUMENTS, RÉSULTANT DE LA JUSTESSE DU CHANT.
- D. LES ANCIENS CONNAISSAIENT-ILS LE CHANT POLYPHONE ?
- E. MÉRITE DES „BELGE”, SUIVANT GUICCIARDINI, DANS L'ÉTABLISSEMENT OU RÉTABLISSEMENT DU CHANT POLYPHONE.

IV. NOTES (précédées d'un AVERTISSEMENT) SE RAPPORTANT À DES ÉCRITS DE MUSICOLOGUES ANCIENS.

APPENDICE : „LES TONS DE MA FLUTE”. LA SIRENE ?

V. NOTES (précédées d'un Avertissement) SE RAPPORTANT À DES ECRITS DE MUSICOLOGUES MODERNES.

VI. LE (NOUVEAU) CYCLE HARMONIQUE ¹⁾.

Avertissement.

- A. DIVISIO OCTAVÆ IN 31 INTERVALLA ÆQUALIA (PER LOGARITHMOS).
- B. TABLE INTITULÉE „DIVISION DE L'OCTAVE EN 31 PARTIES EGALLES”.
- C. COMMENTAIRE SUR UNE TABLE.
- D. PROJET D'UNE LETTRE À BASNAGE DE BEAUVAL.
- E. CYCLE HARMONIQUE PAR LA DIVISION DE L'OCTAVE EN 31 DIÈSES, INTERVALLES ÉGAUX.
- F. LETTRE À BASNAGE DE BEAUVAL TOUCHANT LE CYCLE HARMONIQUE (CONNUE SOUS LE NOM NOVUS CYCLUS HARMONICUS).
- G. QUELQUES NOTES SE RAPPORTANT À LA DIVISION DE L'OCTAVE EN 31 INTERVALLES ÉGAUX.

APPENDICE I: L'IDÉE DE LA *περιζύγκωσις* ETC. (PROGRAMME DE LA PIÈCE E).

APPENDICE II: TABLEAU COMPARATIF DE 11 OU 30 MOYENNES PROPORTIONNELLES D'APRÈS DIFFÉRENTS CALCULATEURS.



¹⁾ Huygens, dans la Pièce F (ainsi que dans la Pièce E), ne parle que du „Cycle Harmonique”, tandis que ‘s Gravesande dans la même Pièce F, traduite en latin pour l’édition de 1724, ajoute au titre l’épithète „Novus”; comparez sur l’adjectif „nouveau”, employé aussi par Huygens lui-même, la p. 143 de l’Avertissement des Pièces sur le Cycle Harmonique.

I.

THÉORIE DE LA CONSONANCE.



Avertissement.

Dans les deux Pièces qui suivent, de la date desquelles nous parlerons tout à l'heure, Huygens traite le problème classique des intervalles consonants qui n'avait jamais cessé — depuis Pythagore peut-on dire, en admettant comme vrai ce que l'histoire ou plutôt la légende lui attribue — d'intéresser les musicologues.

Acceptant comme exact que les consonances des intervalles correspondent aux rapports de petits nombres entiers (pouvant être interprétés tant comme rapports de longueurs de cordes que comme les rapports inverses des fréquences des vibrations de ces mêmes cordes), il cherche la cause du plaisir que nous donnent les intervalles consonants dans la coïncidence périodique fort fréquente des phases des deux mouvements vibratoires de l'air transmetteur du son, ce dernier pouvant d'ailleurs également provenir d'autres instruments de musique que de ceux à cordes. Plus précisément la théorie de la consonance (Pièce I, *A*) revient à ce qui suit.

Pour déterminer le degré de la consonance de deux tons dont les fréquences sont dans le rapport $p : q$ ($p < q$), il faut considérer la série des rapports de fréquences

$$2p : q \qquad 4p : q \qquad 8p : q \quad$$

c.à.d. les rapports des „répliques”, ou octaves supérieures, du ton haut de l'intervalle considéré avec son ton bas; la consonance, suivant Huygens, dépend de la présence dans cette série de rapports pouvant être exprimés par des fractions à dénominateur 1 ou 2. La tierce majeure doit donc être considérée comme plus consonante que la quarte, puisque dans la série

$$5 : 4 \qquad 10 : 4 \qquad 20 : 4 \quad$$

le deuxième et le troisième rapport peuvent s'écrire 5 : 2 et 5 : 1, de sorte qu'il se trouve dans cette série des dénominateurs plus petits que dans la série correspondante de la quarte

$$4 : 3 \qquad 8 : 3 \qquad 16 : 3 \dots\dots\dots$$

où toutes les fractions sont irréductibles.

Il mérite d'être remarqué que dans cette Pièce Huygens fait preuve de connaître l'existence des harmoniques — déjà signalées par Mersenne ¹⁾ — et qu'il établit même un certain lien entre ce phénomène et celui de la consonance. En effet, puisque les harmoniques qui forment avec le ton fondamental un intervalle d'un ou de plusieurs octaves, constituent précisément les répliques satisfaisant au critère de réductibilité sus-énoncé des rapports caractéristiques, elles contribuent à produire la consonance.

Huygens croit pouvoir constater — ici comme dans plusieurs autres Pièces — que les Anciens („chose assez étrange") n'ont *généralement* ²⁾ reconnu comme intervalles consonants que l'octave, la quinte et la quarte, ainsi que ceux qui en résultent par l'addition d'une octave; mais non pas les tierces et les sixtes („lesquelles", ajoute-t-il, „quoiqu'elles ne soient pas laissées d'être employées dans leur chant de sons consécutifs, aussi bien que dans celui d'aujourd'hui"). Mersenne disait environ la même chose dans le „Liure Premier des Consonances", faisant partie de l'„Harmonie Universelle"; il écrit ce qui suit (Prop. XXIX): „Il semble que les Grecs n'ont nullement mis ces 2 Tierces, ny les Sixtes au rang des Consonances, car tous depuis Aristoxène jusques à Ptolomée, Aristide, Bryennius*, & plusieurs autres tant Grecs que Latins, ont seule-

* L'œuvre manuscrite de Manuel Bryennius, musicologue grec du 14^{ème} siècle, ne fut publiée (par J. Wallis) que vers la fin du 17^{ème} siècle.

¹⁾ Voyez, aux p. 59—60 de notre T. I, sa lettre à Constantijn Huygens père du 12 janvier 1647.

Dans les „Traitez de la Nature des Sons, et des Mouemens de toutes Sortes de Corps" (faisant partie de l'„Harmonie Universelle") p. 208, Prop. XI: „Déterminer pourquoy une corde touchée à vuide fait plusieurs sons en mesme temps" Mersenne dit avoir fait beaucoup d'expériences sur ce sujet. Dans le Corollaire I il prétend „que le son de chaque corde est d'autant plus harmonieux & agreable, qu'elle fait entendre un plus grand nombre de sons différens en mesme temps"; dans le Corollaire II il dit e.a.: „j'ay souvent expérimenté que le coulement du doigt sur le bord du verre fait deux ou trois sons en mesme temps comme ie diray dans le liure des Cloches, qui font semblablement plusieurs sons". Comparez la note 13 de la p. 36 qui suit.

Nous ignorons si Huygens a réussi, en 1675 ou plus tard, à voir les „tremblemens entremeslez des chordes" (T. XIX, p. 366).

²⁾ Comparez le dernier alinéa de la p. 114 qui suit (avec la note 20), où il apparaît nettement que Huygens ne fait ici aucune différence entre les musicologues grecs de différentes époques.

En cet endroit il critique Mersenne, mais sans le citer. Voyez encore sur ce sujet notre citation de Mersenne dans la note suivante 21, p. 114.

ment reconnu l'Octave, la Quinte, la Quarte, & leurs repliques pour Consonances, comme l'on void dans les liures qu'ils nous ont laissé".

Apparemment l'opposition entre les points de vue des anciens grecs d'une part, et ceux de notre seizième et notre dix-septième siècle de l'autre, n'était pas si nette qu'elle le paraît dans les énoncés de Huygens. Il est certain, quoi qu'il dise, que dans l'antiquité l'on n'était pas absolument d'accord sur ce sujet: Ptolémée *reproche* aux pythagoriciens de ne pas ranger la tierce majeure dans la série d'intervalles (octave etc.) dont il a été question au début de l'alinéa précédent.

Il ne suffit pas à notre avis, pour caractériser la pensée grecque, de ne considérer que les concepts consonance et dissonance. Ptolémée certes distingue plus finement³⁾: il oppose en premier lieu les intervalles eumèles, c.à.d. ceux dont les deux tons, entendus consécutivement, plaisent à l'ouïe, aux eumèles qui ne jouissent pas de cette propriété; en second lieu les intervalles symphones, c.à.d. ceux dont les deux tons semblent se fondre, aux diaphones où ils conservent pour l'ouïe leur individualité. De ces quatre espèces les intervalles eumèles semblent seuls mériter le nom de dissonances; or, chez Ptolémée les tierces, ainsi que le ton majeur et le ton mineur, n'en font pas partie.

Dans une lettre à Mersenne de mars 1662⁴⁾ J. Titelouze écrivait: „ceux qui estoient musiciens pythagoriciens, n'avoient et n'usoient que les consonances contenues dans le 4, et les disciples de Ptolomée se servoient de toutes celles qui se pouvoient trouver dans le 6 [voyez sur le *senarius* la p. 162 qui suit]".

Dans le § 3 de la Pièce A Huygens prend partie contre Stevin qui dans ses „Hypomnemata mathematica" de 1608 (pour ne mentionner que l'édition latine de cette année) avait osé soutenir que les grecs s'étaient trompés en considérant le rapport 3:2 comme exprimant avec précision la quinte agréable à l'oreille; ce qui s'explique par le fait que Stevin voulait que tous les douze demitons de la gamme fussent caractérisés par un rapport unique. Il est connu que *pratiquement* cette „gamme tempérée" a triomphé à la longue dans la construction des instruments; ce qui ne veut pas dire que Stevin avait *théoriquement* raison. Nous revenons dans la note 9 de la p. 32 — où il est question c.a. d'un manuscrit de Stevin — sur cette question déjà effleurée dans

³⁾ „Harmonika", I, cap. 4—7.

⁴⁾ „Correspondance du P. Marin Mersenne" II, 1933, éd. M.^{me} P. Tannery et C. de Waard (p. 73).

la note 3 de la p. 17 et dont s'occupe e.a. Mersenne dans ses „Questions théologiques, physiques, morales et mathématiques” de 1634, ainsi que dans son „Harmonie Universelle” de 1636 et ailleurs. Voyez aussi notre Avertissement sur le Cycle Harmonique, où nous discutons de nouveau l'influence que l'exemple donné par Stevin peut avoir eue sur Huygens.

D'ailleurs, l'influence du manuscrit mentionné se révèle, pensons-nous, en un endroit déjà publié de la présente Pièce I, A (qui forme un tout avec la Pièce II sur le son publiée en 1937 laquelle occupe les p. 361—365 du T. XIX); ceci (ou plutôt ce que Huygens dit erronément, que cette erreur soit due à l'influence de Stevin ou non) nous rend possible de fixer avec une certaine probabilité la date de la Pièce. Le dernier alinéa de la note 3 de la p. 362 du T. XIX faisait déjà voir qu'elle est fort probablement antérieure à l'année 1672, dans laquelle Huygens parle d'une „règle des sondeurs” contraire à celle qu'il croyait pouvoir énoncer dans la Pièce en parlant de l'histoire des marteaux de Pythagore. Nous avons dit dans la note nommée ne pas comprendre comment dans la Pièce Huygens, malgré Mersenne⁵⁾, soutient avec l'auteur de cette histoire, „qu'il est vrai que de deux pièces de métal semblables celle qui est double de poids de l'autre lui confonne de l'octave plus bas”. Nous croyons le comprendre maintenant: c'est que Stevin dans son manuscrit connu à Huygens raconte l'histoire des marteaux *sans la critiquer*⁶⁾; il dit, ce qui semble montrer qu'il croit en effet à sa réalité ou du moins à sa possibilité: „Dergelijcke voordor besoeckende op speeltuygens gelpannen snaren bevand daerin het selve regel te houden”, c. à. d. „Examinant ensuite [c.à.d. après avoir pesé les marteaux] des effets semblables sur les cordes tendues des instruments de musique, il [Pythagore] constata qu'on y observe la même règle etc.” Or, quels sont les „sondeurs” qui ont détrompé Huygens? Sans doute les frères Hemony, ou plutôt l'un deux, avec qui Huygens eut une longue

⁵⁾ Et malgré Faber Stapulensis (Lefèvre d'Étaples) que Huygens ne mentionne d'ailleurs pas. Il est vrai que les ouvrages musicaux de cet auteur, ainsi que ceux d'autres musicologues dont il ne parle pas, se trouvaient dans la bibliothèque de son père, d'après le catalogue de la vente des livres de ce dernier qui eut lieu bientôt après son décès en 1687.

Notons encore que nous aurions pu citer plusieurs autres endroits où Mersenne dit que l'histoire des marteaux est une fable. Voyez p.e. la p. 146 (Theor. XVIII) du „Traité de l'Harmonie Universelle” de 1627.

⁶⁾ „Byvough der Singconst” I. Hoofdstick.

⁷⁾ Voyez la note 2 de la p. 17 qui précède.

conversation déjà en 1662⁷). Par conséquent, la Pièce I, A nous paraît être antérieure à cette conversation. Elle est peut-être de 1661 comme la Division du Monochorde: voyez l'Avertissement suivant où il est également question des Hemony. — Nous ne disons rien de la Pièce I, B qui peut dater de plus tard.

En terminant, nous relevons expressément ce à quoi nous avons déjà fait allusion au début du présent Avertissement, savoir la proposition de Huygens⁸) de considérer désormais les rapports correspondant aux différents intervalles non pas comme des rapports de longueurs de cordes (de même nature et également tendues), mais comme des rapports de fréquences de vibrations, attendu qu'il avait été établi au dix-septième siècle que ces rapports sont l'inverse l'un de l'autre⁹). Il est d'ailleurs possible que cette relation ait été entrevue longtemps auparavant: en lisant les œuvres des théoriciens grecs on est souvent porté à se demander si dans leur pensée c'est le plus petit nombre du rapport qui correspond au ton le plus élevé ou bien plutôt (malgré la considération des longueurs des cordes) le plus grand des deux nombres.

⁸) Note 11 de la p. 35. Mersenne disait de même dans le „Traité des Instruments à cordes” faisant partie de l'„Harmonie Universelle” (Livre III, Prop. 18, Corollaire II): „Si l'on veut déterminer le ton de la voix, auquel l'on veut que la note, ou la partie proposée se chante, il n'y a nul moyen plus general & plus assuré que de donner un nom propre à chaque ton, qui soit pris du nombre des battemens d'air [comparez la l. 8 de la p. 39 du T. XIX] que font toutes sortes de tons, ou de sons . . . il faut remarquer que les nombres des tremblemens peuvent servir au lieu des notes, ou de la Tablature ordinaire des voix & des instrumens”.

⁹) Voyez aux p. 364—365 du T. XIX, le § 2 (avec la note 1): cette Pièce sur le son du T. XIX forme un tout avec la présente Pièce A, comme nous l'avons dit dans le texte et que nous le répétons encore une fois dans les §§ 3 et 4 de la présente Pièce où nous renvoyons le lecteur au T. XIX. Voyez aussi le deuxième alinéa de la note 10 de la p. 35 qui suit.

1. ORIGINE DU CHANT. RAPPORT DES LONGUEURS DES CORDES CONSONANTES SUIVANT PYTHAGORE, ETC.

§ 1¹⁾. L'origine du chant vient des consonances, je dis du chant d'une seule voix ou instrument, aussi bien que de celui à plusieurs voix dont on use aujourd'hui. Car ce plaisir que l'on prend d'entendre les consonances n'est pas seulement à l'égard de deux sons consonants en même temps, mais il y en a tout de même à entendre ces tons les uns après les autres. Et comme l'oreille est offensée par la dissonance de deux sons entendus à la fois, ainsi l'est elle encore par ces mêmes sons proferez de suite, quoique la rudesse ne soit pas tout à fait si grande.

Ce qui donc a fait que les hommes par toute la terre chantent par les mêmes intervalles ce n'est pas un hasard, ni une chose fort étrange, mais tous ces intervalles ont été réglés par les consonances, et la musique devant donner du plaisir et non du chagrin elle ne pouvoit se chanter par d'autres intervalles que ceux là.

§ 2. Quand on chante V R M F S L C V² ²⁾ il y a les tons de V M F S L V² qui font tous des consonances contre le premier V. Et plusieurs encore entre eux. Et cela fait premièrement que l'oreille se plaît à entendre ceux là les uns après les autres qui font consonance avec celui qui a immédiatement précédé comme V M S V² F L V² S V. Secondement elle aime encore à entendre les uns après les autres, quand bien elles ne consonent pas avec les précédentes immédiatement, mais avec les penultièmes ou même d'autres antérieures sur tout quand elles ont fait quelque impression. Ainsi en chantant V S F M F S L S S V le troisième ton de F fait un bon effet parce qu'il fait consonance avec le premier V. et le 4^e M contre S et V précédents; et le F suivant contre le F précédent (car l'unison tient en ce lieu de consonance) et contre le V. le second S contre les précédents MSV. et le L contre FMV.

Or les premiers sons de musique doivent avoir été ceux qui faisoient ensemble les

¹⁾ Portefeuille „Musica”, f. 56 et suiv. Le premier alinéa du § 1 ainsi que plusieurs autres morceaux de la Pièce I, A, ont déjà été publiés dans le T. XIX (p. 361 et suiv.) sous le titre: „Rapports des longueurs des cordes consonantes suivant Pythagore, et rapports des nombres de leurs vibrations suivant Galilée et d'autres savants”.

Nous renvoyons le lecteur au T. XIX pour la majeure partie des alinéas déjà imprimés.

²⁾ Comparez la note 1 de la p. 362 du T. XIX. Les signes de l'échelle diatonique V, R, M, F, S, L, C, V² correspondent donc respectivement à C, D, E, F, G, A, B, c ou DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, do. Par conséquent C⁷ = Bes.

plus remarquables consonances comme l'octave la quinte et la quarte, ainsi VFSV² et cela se voit en effet de ce que les premières Lyres n'ont eu que ces quatre cordes, et que toute l'antiquité n'a reconnu que ces premières consonances³⁾. En suite la quinte du S au R vers en haut ou la quarte de S vers en bas ont montré les tons du R, et la 5^{te} de R L le L, et la quarte vers en bas LM le M et depuis M la quinte vers en haut le C.

Et voilà tous les tons de l'octave par où la voix monte en chantant. Ces tons ayant cette origine cela a été cause en partie que les anciens n'ont pas considéré que les tierces majeure et mineure et les 6^{tes} étoient des consonances. Lesquelles quoique méconnues n'ont pas laissé d'être employées dans leur chant de sons consécutifs, aussi bien que dans celui d'aujourd'hui. Il est vrai que c'est une chose assez étrange de ce qu'ils ne trouvoient pas que les cordes distantes par ces intervalles de tierces et sixtes faisoient un son agréable aussi bien que les quintes et les 4^{tes} et que là où l'on ne fait point d'accords ou il n'y entre de 3 ou de 6, dans leur siècle on ne trouvoit pas qu'elles méritassent le nom de consonances. Mais nous parlerons après de la cause de ceci⁴⁾. Quant à l'origine des semitons c'est à dire des autres tons que nous chantons quelquefois et qui sont différents des précédents, il étoit nécessaire que le C'⁵⁾ fût trouvé le premier à cause qu'on trouvoit qu'en montant de F jusqu'au C cela faisoit mauvais effet lors que l'impression de F restoit dans l'oreille qui ne consonne point avec C, et seulement contre le S⁶⁾, qui même pouvoit n'avoir pas précédé.

Mais de monter par FSLC^b étoit beaucoup plus agréable parce que le C^b est consonnant au S et au F, avec lequel il fait la 4^e, qui étoit un des intervalles les premiers connus, ce qui a fait trouver aisément ce son de C^b. Les autres sons qu'on appelle chromatiques peuvent avoir été trouvés par les cadences aux endroits où il eût fallu descendre d'un ton entier comme SF^hS, LSL, RVR^{6bis)}, car la voix affecte naturellement à ne s'éloigner pas tant d'un ton ou elle doit revenir incontinent, de sorte que l'on diminue ces tons: mais d'en avoir fait justement des demitons majeurs, il y a deux raisons pour cela, l'une que ces sons de F*, S*, V*⁷⁾ sont de ceux qui font consonance

3) En marge: comment ils ne prenoient pas VM et VL pour consonnances. RF. RC^b.

Les intervalles indiqués, que tous les anciens sont ici censés ne pas avoir considérés comme des consonances, sont, comme Huygens le dira aussi dans le premier alinéa de la p. 37 (note 15 qui suit) la tierce majeure, la sixte mineure, la tierce mineure et la sixte majeure.

4) Nous ne voyons pas que Huygens ait tenu cette promesse.

5) Voyez la note 2 qui précède.

6) En d'autres termes, B forme un intervalle consonnant avec S, mais non pas avec F.

6bis) Voyez sur les accents \backslash et \swarrow la note 4 de la p. 77 qui suit.

7) C.à.d. Fis, Gis, Cis.

avec plusieurs des sons naturels de l'octave, comme F* contre R, L et C. S* contre M et C. ce qui addoucit et accommode le chant suivi aussi bien que la symphonie comme il a esté dit cydevant. L'autre raison est que l'on estoit desia accoustumé aux intervalles des demitons majeurs en chantant FMF, et VCV.

Dans la suite on a encore ajouté le M' non pas tant pour avoir le semiton majeur au dessus du R que pour avoir la tierce mineure dessus le V et la majeure dessous le S ce qui donne en même temps la 6 majeure contre V² et la fixte mineure contre S vers en bas.

L'on ajoute encore d'autres tons quelquefois et avec beaucoup de raison dont nous parlerons cy apres ⁸⁾.

§ 3. Puisque les intervalles du chant ont leur origine des consonances, il est nécessaire

Consultez les p. 362—364 du T. XIX (Huygens y parle e.a. de l'histoire des marteaux de Pythagore; voyez là-dessus l'Avertissement qui précède) jusqu'à l'alinéa se terminant par: et la proportion dans les autres nombres est de 5 à 2. Dans ces pages il est question des „répliques” auxquelles Huygens fait allusion à la fin du § précédent: voyez l'alinéa suivant.

Ainsi parce que les chordes de 3 à 2 font la 5^{te}, ce sera aussi une consonance que de 6 à 2 ou de 3 à 1, que l'on appelle la 1^{re} 2^e, et c'est une réplique de la 5^{te}. Et la raison pourquoy cela arrive est la même qui fait la douceur des autres consonances dont nous allons parler.

Il est constant par l'expérience, et ceux qui ont tant soit peu d'oreille pour la musique ne peuvent nier, que les consonances suivant les proportions susdites ne soient très parfaites et meilleures que quand on s'écarte de ces véritables proportions numériques. Et ceux qui ont osé soutenir le contraire et que la 5 ne consistait pas dans la raison de 3 à 2 ou n'avoient pas l'oreille capable d'en juger ou croioient avoir une raison pour cela, mais ils concluoi[en]t mal. En marge: Stevin ⁹⁾. dont nous parlerons cy apres ¹⁰⁾.

⁸⁾ Il s'agit des „répliques” dont il est question dans le § 3 qui suit.

⁹⁾ Huygens fait apparemment allusion à la théorie des intervalles que Stevin développe dans son ouvrage „Vande Spiegeling der Singkonst”, imprimé pour la première fois par D. Bierens de Haan — voyez sur lui la p. V de notre T. I — dans les „Verslagen en mededeelingen der Koninklijke Akademie Afd. Natuurkunde”, Amsterdam 1884 et aussi séparément („Réimpression”) en cette même année et cette même ville avec le traité également inédit: „Vande molens”. Stevin divise l'octave en 12 intervalles égaux caractérisés par le rapport $\sqrt[12]{2} : 1$, en d'autres termes il conçoit, quoique sans songer à un tempérament, ce qu'on a appelé plus tard la gamme

§ 4. Quand on examine les tremblements des chordes ce que je pense que Galilée a fait le premier

Consultez les p. 364—365 du T. XIX jusqu'à la fin de la Pièce de ce Tome, c.à.d. jusqu'aux mots : lesquelles on tendra toutes perpendiculaires avec un poids au bout.

tempérée. Dans le „Bijvough der Singkonst" 1. Hoofdstick „Dat de everedenheijt der geluiden met haer lichamen, bij de Grieken niet recht getroffen en is" il dit expressément que les grecs se sont servis à tort, pour le rapport de la quinte, de la valeur 3 : 2 proche de la *vraie* valeur

$$2 : \sqrt[12]{32}.$$

Nous remarquons que le manuscrit du traité de Stevin publié par Bierens de Haan fait partie d'une collection de manuscrits — c'est le Vol. 47 mentionné dans la note 1 de la p. 516 du T. XVIII — provenant de Constantijn Huygens père. Dans une lettre à Mersenne du 1^{er} août 1640 (éd. Worp des lettres de Const. Huygens, T. III de 1891, p. 229) ce dernier parle „des pièces de sa main [c.à.d. de Stevin] qui n'ont point encores veu le jour et sont en mon pouvoir". Christiaan Huygens a donc fort bien pu prendre connaissance de cet écrit quoiqu'il n'eût pas trouvé de place dans les „Wisconstige Ghedachtenissen" de Stevin, ni dans la traduction latine de la même année 1608, les „Hypomnemata Mathematica", auxquels il était destiné (étant mentionné dans le sommaire).

Cette hypothèse, quelque plausible qu'elle soit — nous l'avons déjà fait ressortir dans notre Avertissement, en parlant de la question des marteaux de Pythagore —, est d'ailleurs ici plus ou moins superflue, puisque Stevin avait brièvement indiqué son système dans son „Eerteloot-schrift" faisant partie tant des „Wisconstige Ghedachtenissen" que des „Hypomnemata" (I Liber Geographiæ, p. 19). On trouve ce passage aussi dans les „Oeuvres Mathématiques de Simon Stevin augmentées par Albert Girard" de 1634 (p. 112 „Premier Livre de la Géographie"). Stevin y parle de „inveteratò tonorum musicæ symphonix errore, falsaque opinione nbi termini *διὰ πέντε* ab omnibus assumuntur, 3 ad 2" et de „veris semitonis quos natura duce usque æquales canimus". Dès lors cette opinion de Stevin et le système qu'il en déduisait étaient généralement connus. Mersenne les mentionne dans sa „Préface, & Advertissement au Lecteur" des „Traitez des Consonances, des Dissonances, des Genres, des Modes & de la Composition" faisant partie de l'„Harmonie Universelle" de 1636; il dit : „Chacun est libre de suivre telle opinion qu'il voudra, selon les raisons les plus vraysemblables: par exemple, ceux qui aymeront mieux tenir que tous les tons & les demitons doiuent estre esgaux comme fait Stevin au commencement du premier liure de sa Geographie, & les Aristoxeniens d'Italie avec plusieurs autres [ailleurs Mersenne relève plus expressément la pensée d'Aristoxène et des Aristoxéniens: consultez le dernier alinéa de la présente note; voyez en outre sur le système d'Aristoxène la note 5 de la p. 78, ainsi que la note 16 de la p. 113 et la note 69 — où il est question de Vincent Galilée — de la p. 121 qui suit], & non inesgaux comme les met Ptolomée, ne manqueront pas de raison: & il sera difficile de leur demonstrier que la Quinte est iustement en raison sesquialtere, & le ton en raison sesquioctaue, ou s'il en faut une milliesme partie, etc."

En 1634 aussi, donc un peu plus tôt, dans „Les Questions théologiques, physiques, morales et mathématiques" Mersenne parlait dans sa réponse à la „Question XXXIII. A quoy servent les raisons, & les proportions de la Geometrie, etc." de „ceux qui suivent l'égalité des tons, & des demitons dans la Musique" lesquels „sont contraints de trouver 11 lignes moyennes proportionnelles entre les 2. qui font l'octaue".

§ 5. Quelles consonances sont estimees plus agreables que d'autres. Et s'il n'y a pas encore d'autres consonances outre celles qui sont maintenant reputees dans ce nombre.

On trouve que des consonances les unes sont plus agreables que les autres, et que ce sont celles qui plaissent le plus dont les battements se rencontrent le plus frequemment ensemble, excepté pourtant l'unisson dont tous les battements se rencontrent et qui

Descartes, lui aussi, n'ignorait pas ce système. Dans ses lettres à Mersenne de 1634 il parle trois fois de „vos musiciens, qui nient les proportions des consonances”, „qui nient qu'il y ait de la difference entre les demitons” („Oeuvres de Descartes”, éd. Adam et Tannery, T. I, p. 286, 288, 295) et dans une lettre du 1 novembre 1635 à Constantyn Huygens il parle de „tout de mesme de bons musiciens qui ne veulent pas encore croire que les consonances se doiuent expliquer par des nombres rationaux, ce qui a esté, si ie m'en souviens, l'erreur de Steuin, qui ne laissoit pas d'estre habile en autre chose”.

C'est peut-être Isaac Beeckman qui a attiré l'attention de Descartes sur ce sujet connu à Beeckman au moins depuis 1614. Dans une lettre à Mersenne du 1 octobre 1629 Beeckman écrit: „illam Stevini nostri sententiam de sex tonis continue proportionalibus, olim a me diligentissime excultam, ante multos annos penitus rejeci”. Beeckman avait d'ailleurs en 1624 l'occasion de consulter le manuscrit de Stevin mentionné plus haut. Nous empruntons ces informations aux p. 274 et 286 du T. II de 1936 de la „Correspondance du P. Marin Mersenne” publ. par M.^{me} Paul Tannery, éditée et annotée par Cornelis de Waard.

Autrement que Huygens qui avait peut-être l'oreille plus fine, Mersenne ne désapprouve pas le système des Aristoxéniens et de Stevin dans la pratique. Il écrit („Harmonie Universelle”, p. 132 Livre Second. Des Dissonances, Prop. XI: „Expliquer les intervalles Harmoniques consonans & dissonans qui ne peuuent s'exprimer par nombres”): „cette division de l'octave [savoir celle représentée par une table contenant 13 nombres, qui sont „en continuelle proportion Geometrique”; ce sont les nombres à fort peu près corrects 100000, 105946, 112246, 118921, 125993, 133481, 141422, 149830, 158741, 168179, 178172, 188771, 200000] peut suffire pour toutes sortes de Musiques, tant des Voix que des Instrumens: car si l'on veut la iustesse, on la void en la 2 colonne, qui diuise le diapason en 7 demitons majeurs, en 3 moyens, & en 2 mineurs [nombres 100000, 106666, 112500, 120000, 125000, 133333, 140947, 150000, 160000, 166666, 177777, 187500, 200000]... l'oreille n'en peut quasi remarquer la difference”.

Ailleurs dans l'„Harmonie Universelle” („Liure Premier des Instrumens” Prop. XIV) Mersenne nous apprend que les 13 nombres proportionnels cités ont été calculés pour lui par „Monsieur Beaugrand, tres excellent Geometre”. Il parle en cet endroit de la possibilité de s'en servir „pour diuiser le manche du Luth, de la Viole, du Cistre etc.” Plus loin, à la p. 21 des „Nouvelles Observations Physiques & Mathematiques”, Mersenne donne (VIII. Observation) les „11 nombres qui representent les 11 moyennes proportionnelles que le sieur Gallé a supputez”, savoir 100000000000, 94387431198, 89090418365 . . . 50000000000. À la p. 384 (Prop. XXXVIII du Liure Sixiesme des Orgues — instruments dont il s'agit aussi, Prop. XLV de la p. 408, de „diuiser le diapason. . . en douze demitons esgaux” —) Mersenne écrivait: „M. Boulliau l'un des plus excellens Astronomes de nostre siecle . . . m'a donné une table Harmonique qui merite d'estre inserée dans ce traité parce qu'elle contient toute la Theorie de la Musique . . . [elle] contient les dites racines si précisément, que les fractions qui suivent les

pour cela ne fait autre effet qu'un son tout seul; et encore l'octave et ses repliques parce qu'elle ressemble à l'unisson¹¹⁾.

Hors mis celles là la 12 ou la 5 par dessus l'octave est trouee la plus agreable, dont la proportion est de 3 à 1, de sorte qu'à chaque battement de l'air du son grave, l'aigu en fait 3. au lieu que dans la 5^e les trois battemens du ton aigu ne se rencontre[nt] que avec les 2 battemens du ton grave, et c'est ce qui fait que la 12 est plus agreable que la 5. Apres la 12^e la prochaine en douceur est la 17^e ou la tierce majeure par des-

nombre entiers vont iusques aux premieres & secondes minutes". De fait, la précision laisse quelque peu à désirer. Il s'agit de 11 moyennes proportionnelles géométriques entre les nombres 2 et 4, écrites dans le système sexagésimal, savoir 2°7'12", 2°14'52", 2°22'33", 2°31'12", 2°40'5", 2°49'39", 2°59'32", 3°10'5", 3°21'50", 3°33'43", 3°46'20". Voyez sur les nombres de Beaugrand, de Boulliau, et de Gallé l'Appendice II à la p. 171 qui suit.

Quant aux Aristoxéniens, Mersenne en parle e.a. aux p. 67 et 70 du „Liure Second des Instrumens" (Prop. VII) en ces termes: „... puis qu'Aristoxene & ses disciples ont diuisé le ton en 2 demy-tons esgaux, & que plusieurs usent encore de cette diuision sur le manche du Luth & de la Viole, ie veux icy montrer la pratique de cette diuision. . . Ceux qui desirent d'autres manieres pour diuiser l'Octaue, & la manche du Luth, & des Violes en 12 demy-tons esgaux, peuuent voir Zarlin au 4. liure de son Supplément, chapitre 30, où il applique cette diuision au manche du Luth, & Salinas son contemporain en son 3. liure chapitre 31, de sorte qu'il y a pres de 60 ans que l'inuention de demy-tons esgaux d'Aristoxene a esté renouuellée par ces deux Musiciens". Voyez sur Zarlino et Salinas la p. 45 qui suit. Consultez aussi la note 1 de la p. 171.

¹⁰⁾ Huygens revient brièvement sur cette question dans la Pièce de la p. 168. Une lettre à S. Stevin de Abraham Verheijen, organiste à Nymègue, qui était jointe au manuscrit mentionné dans la note précédente et fut publiée en 1884 par Bierens de Haan avec le manuscrit, fait voir que l'auteur donne son adhésion à la théorie de Stevin. On a vu dans la note précédente que Beeckman avait été durant plusieurs années du même avis.

Nous observons que Stevin ne savait pas encore, comme Huygens, que les fréquences des vibrations sont inversement proportionnelles aux longueurs des cordes (de même nature et également tendues). Le moment où Beeckman cessa d'ajouter foi à la doctrine de Stevin doit avoir été celui où il se rendit compte de l'existence de cette proportionnalité inverse (voyez la note 1 de la p. 364 du T. XIX).

¹¹⁾ En marge les remarques suivantes:

il faut distinguer entre leur beauté estant entendues seules ou accompagnées d'autres ou suivies ou précédées d'autres. on peut faire entendre la 6 en tel lieu ou apres tel autre accord qu'elle ne paroitra nullement confonante.

pourquoy pas plus de consonances: de 7 à 1. Voyez encore sur ce sujet le dernier aliéné de la Pièce.

renverser les nombres et les considerer par le nombre des battemens.

Dans cette dernière ligne, sur laquelle nous attirons aussi l'attention du lecteur dans notre Avertissement, Huygens propose donc de caractériser les intervalles par les rapports des fréquences des tons au lieu de ceux des longueurs des cordes.

fus deux octaves dont la raison est de 5 à 1, et partant les 5 battements du ton aigu se font contre chaque battement du ton grave. Dans la 1^oe qui est la 3^e majeure par dessus une octave les 5 battements du ton aigu ne se rencontrent qu'avec les 2 du ton grave, et dans la 3^e majeure elle même, les mêmes 5 battements se font contre 4 du ton grave, ce qui la rend moins belle que la 1^oe, et celle cy moins belle que la 1⁷ ou seconde réplique de la tierce ¹²).

Quand on compare selon cette maxime la 4^{te} avec la 3^e majeure on diroit que celle cy devroit estre moins agreable que la 4^{te}, car a tous les 3 battements se rencontrent les 4 dans la quarte; et dans la tierce a tous les 4 battements se rencontrent les 5. Et cependant la 4^{te} semble la moins bonne des deux. L'on voit la même chose généralement par tout, que de deux consonances celle dont la réplique première ou seconde devient en raison multiple paroît meilleure que l'autre. Et il semble que la raison soit qu'en entendant quelque ton on suppose et semble entendre en quelque façon son octave plus haute ou même la double octave. Et on l'entend effectivement en sonnant quelque corde, ou grande cloche, et même la 1²e et la 1⁷e ¹³). De sorte que comme les répliques de ces consonances sont en raison multiple dont les rencontres de battements sont plus fréquentes que des autres, on estime la consonance même par la beauté de ces répliques. Ainsi donc puisque les répliques de la tierce sont la 1^oe et la 1⁷, dont l'une aux 2 battements du son grave et l'autre a chacun en a 5 du son aigu, et qui pour cela sont meilleures que la 4^e en qui la rencontre ne se fait qu'à tous les 3 coups du son grave et de même a toutes ses répliques; on trouve la 3 majeure elle même meilleure que la 4^{te} ¹⁴).

On peut examiner la préférence des autres consonances suivant ces mêmes règles et il est utile de connoître ces degrez de bonté, quoy qu'il soit vray que tous les gouts ne s'accordent pas tout a fait en ce jugement. Ce qui paroît bien manifestement de ce

¹²) En marge: le son vient beaucoup plus de la table et du corps de l'instrument que des cordes. Comparez la p. 370 du T. XIX.

¹³) En cet endroit Huygens fait preuve de connaître le phénomène des harmoniques. Comparez la note 1 de la p. 26 qui précède. Ses observations se rapportent, pour un ton fondamental de la fréquence n , aux harmoniques des fréquences $2n$ (octave), $3n$ (1²e, quinte de l'octave), $4n$ (octave double) et $5n$ (1⁷e, tierce majeure de l'octave double).

Voyez encore sur Huygens et les cloches les p. 265 et 339 du T. XVII.

¹⁴) Il est remarquable que Huygens, tout en faisant appel pour motiver la considération des répliques au phénomène des harmoniques dont elles font partie, ne fait entrer en ligne de compte, pour expliquer la consonance, que les harmoniques formant des octaves, simples ou supérieures, avec le ton fondamental. S'il avait pris en considération toutes les harmoniques comprises dans la série

$$2p : q \quad 3p : q \quad \text{etc.}$$

ainsi que celles du ton de la fréquence q , il aurait obtenu une théorie se rapprochant de celle beaucoup plus récente de Helmholtz („Die Lehre von den Tonempfindungen“, Zweite Abtheilung, Zehnter Abschnitt. Dritte Auflage, Braunschweig 1870, p. 284 et suiv.).

que les anciens ne trouvoient pas seulement que les 3^{es} ni les 6^{tes} fussent des consonances ¹⁵⁾, et qu'ils reconnoissoient la 4^{te} parmi les premières.

Il est bon à ce propos d'examiner s'il n'y a pas d'autres consonances que celles que nous avons définies cy dessus et s'il y a quelque raison de l'assurer. Car peut être nous pourrions faire la même faute que les anciens.

Les proportions des nombres qui constituent les consonances sont réputées celles d'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, à quelqu'autre de ce même rang, y comprenant aussi les doubles et les moitiés de ces nombres ou même leur autres multiples et sous-multiples par 2, ce qui ne fait qu'ajouter la consonance à une ou à plusieurs octaves ou bien l'en ôter. Le nombre de 7 ni autre nombre primitif ou composé de premiers ¹⁶⁾ n'y sont point admis. Et il y en a ¹⁷⁾ qui attribuent cela à la perfection du nombre 6, lequel ils appellent harmonique pour cette raison. Cependant à bien examiner la chose et sans préjugé l'on trouvera que le nombre de 7, comparé à d'autres, n'est pas incapable de produire une consonance ¹⁸⁾, mais que celles qu'il produit ne sont pas compatibles avec les consonances déjà établies, ni même si bonnes ¹⁹⁾.

¹⁵⁾ Comparez la note 3 de la p. 31, et les lignes 4—5 de la p. 79, ainsi que le § 2 de la p. 114 qui suit, les lignes 8—7 d'en bas de la p. 153 et les l. 3—5 de la p. 162.

En marge les observations suivantes:

les unes sont les suppléments des autres à l'octave et se prennent en quelque façon pour la même.

3^{es} auprès de la basse peu agréables auprès de ce qu'elles sont ailleurs.

¹⁶⁾ Il faut entendre: de premiers supérieurs à 6.

¹⁷⁾ Voyez la note 30 de la p. 162.

¹⁸⁾ Comparez le dernier alinéa de la p. 161 qui suit.

¹⁹⁾ En marge: argument de la trompette et trompette marine.

Cette remarque s'applique sans doute aux tons naturels de la trompette souvent mentionnés par Mersenne, p.e. dans les „Traitez des Consonances” etc. Livre I „Des Consonances”, p. 3 et p. 87. Il n'est pas clair, si Huygens veut dire qu'on peut tirer un argument *contre* l'admission du nombre 7 dans les consonances du fait que le septième ton de la série n'est pas en harmonie avec le ton fondamental de la trompette, ou bien s'il veut dire au contraire que l'existence de cette harmonique est un argument *en faveur* de sa thèse.

La trompette marine est un instrument à une corde pouvant imiter les tons de la trompette. Mersenne en parle dans son „Traité des Instrumens” faisant également partie de l'„Harmonie Universelle” (Livre IV „Traité des instrumens à cordes.” Prop. XIV, p. 217 et suiv.).

**B. AUTRES CONSIDÉRATIONS SUR LA GAMME DIATONIQUE,
PRODUIT D'INTERVALLES CONSONANTS. LES DEMITONS
CHROMATIQUES MODERNES.**

Parmy ¹⁾ toutes les nations on chante par les mesmes intervalles de tons et demitons (je parle premierement des tons diatoniques) et entremeslez de la mesme facon. Ce qui n'arrive pas par hazard ni par une raison qui soit difficile a trouver. Voicy comme je l'explique. Le plaisir du chant consiste principalement dans la perception des consonances. Je dis du chant qui se fait a une seule voix ou par les simples sons d'un instrument, aussi bien que de celui qui est composé de plusieurs voix ou sons qu'on entend à la fois. Car bien qu'au chant d'une voix les sons se suivent et n'arrivent pas à l'oreille en mesme temps, le souvenir supplée a cela, en sorte qu'il est également plaisant d'entendre deux tons qui font la quinte, par ex. chantez l'un apres l'autre que si on les appercevoit tous deux ensemble. Et cette representation du souvenir ne va pas seulement jusqu'au ton penultieme, mais jusqu'aux 2 trois ou 4 precedents et encore plus avant si quelqu'un de ces tons ont esté souvent repetez et par là fortement imprimez dans la memoire. C'est donc par cette raison qu'en montant à la quinte, comme de V à S, on passe par les tons M et F. Car M est consonant à V, étant VM la tierce majeure de 5 a 4. Et de mesme le F est consonant à V, étant VF la quarte de 4 a 3. Mais le M est encore plus agreable que le F dans ce passage, a cause que le M confonne au S ou l'on a dessein d'aller, et que pour cela on a desia dans l'imagination. Car la representation au fait des consonances a lieu non seulement pour le passé, mais aussi en quelque façon pour l'avenir.

De là il vient qu'on passe aussi de V en R pour premier intervalle, quand on va a la quinte en S ou seulement a la quarte en F, parce que RF est une consonance scavoir la 3^e mineure de 6 a 5. Car l'on auroit repugnance si au lieu de chanter VRMF, on vouloit substituer un autre ton au lieu de R, qui ne consonait ni a F ni a aucun des autres tons. Je dis a pas un des autres, parce que on pourroit luy substituer V[♯], et chanter VV[♯]MF, parce que V[♯] avec M fait la 3^e min. Mais l'on ne va pas a ce ton chromatique tant a cause de la petitesse de l'intervalle VV[♯] que parce que le V[♯] ne confonne pas a beaucoup pres avec tant des tons suivans que le R. car cettuicy fait la 4 contre S, la 5^{te} contre L, et la 6 contre C. Mais V[♯] seulement la 6 contre L.

Il est aisé a demonstrier par de raisons pareilles a celles que je viens de dire pourquoy

¹⁾ Portefeuille „Musica” f. 62 et 63.

on passe au L. depuis le S, puisqu'il fait consonance contre F contre M contre R et contre V. Après le L, on passe à C ou à C' dont le premier aussi bien que l'autre a 3 consonances ²⁾ parmi les tons précédents; car CS est la 3^e maj. CM la quinte, CR la 6 maj. Mais C'S est la 3^e min. C'F la 4^e. C'R la 6 mineure. Or les 3 premières consonances du C sont meilleures que les 3 dernières du C'. C'est pourquoy l'on passe plutôt par le C. Outre qu'en ce faisant, il y a deux quarts de suite dans l'octave et qui sont divisées semblablement en 2 tons et un demyton. scavoir VRMF et SLCV. Ce sont icy les tons diatoniques en y comptant aussi le C' comme faisoient aussi les anciens, comme nous dirons ailleurs ³⁾.

Nos demitons ajoutez qu'on peut appeller chromatiques ⁴⁾ sont fondez de mesme par les consonances. Car VM' fait la 3^e min. M'S la 3^e maj. M'C' la quinte. M V' la 6 maj. de mesme RF' la 3 maj. F'L la 3 min. F'C la 4^e. F'R la 6 min. Puis MS' la 3 maj. S'C la 3 min. S'M la 6 min.

²⁾ En marge: 3 tons rarement de suite, et comment.
il n'y peut avoir d'autre chant.
demitons consonans.

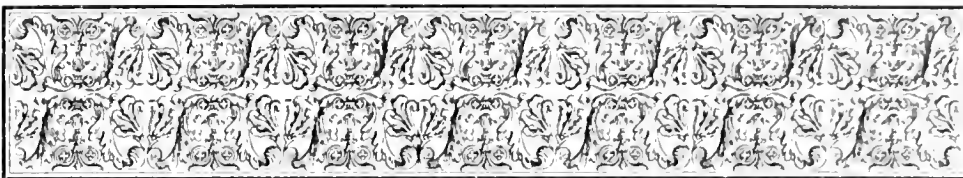
estrange invention que le chant du genre enharmonique et du chromatique ancien. parlerons ailleurs. Deuxième alinéa de la p. 97 qui suit? Voyez aussi le deuxième alinéa de la p. 102.

³⁾ En marge: qu'il n'y a que deux modes [comparez la Pièce B. „Les divers modes” à la p. 69 qui suit]. ou le 3^e m, l, m pour les plaintes graves. m, c, m ne pouvoit pas estre avec f, mais bien avec f: [?]. mais alors le mesme que r, f, l, r. sinon quelques faux intervalles. plagaux que c'est [voyez sur les tons plagaux la Pièce B. „Les divers modes” déjà citée].

⁴⁾ Voyez sur la différence entre les anciens et les modernes sous ce rapport le deuxième alinéa de la p. 102 qui suit.

II.

LA DIVISION DU MONOCHORDE.



Avertissement.

Nous publions dans les pages qui suivent les recherches de Huygens sur la théorie mathématique du tempérament musical, en les faisant précéder (Pièce A) par une copie, d'une main inconnue, d'un écrit (manuscrit?) de l'un des frères Hemony où Huygens a inscrit, outre la date — 16 juin 1661 —, le nom de la ville d'Antwerpen (Anvers). A la date indiquée Huygens ne se trouvait pas dans cette ville. Il s'y était trouvé de passage le 16 octobre 1660¹⁾ et avait saisi cette occasion pour visiter le carillonneur et l'entendre jouer du célèbre carillon — ou plutôt d'un des célèbres carillons — nouvellement installés par les frères Hemony²⁾. Ceci peut avoir été une des causes qui le déterminèrent, après être rentré à la Haye en 1661 à la fin du mois de mai, à s'occuper lui-même de la théorie de la musique. En effet, dans la copie susdite, l'auteur de l'écrit donne le conseil de commencer par partager la ligne musicale en 10000 parties³⁾; or, dans la „Divisio Monochordi” (notre Pièce B. Div. Mon. I)

¹⁾ D'après le Journal de Voyage à Paris et à Londres publié par H. L. Brugmans dans „Le séjour de Christian Huygens à Paris etc.” 1935.

²⁾ Voyez la note 6 de la p. 49 qui suit, où nous renvoyons le lecteur aussi au futur T. XXII.

³⁾ Ce que Mersenne, à l'influence des œuvres duquel on pourrait songer aussi, ne fait point. Dans l'„Harmonie Universelle” de 1636 Mersenne traite longuement du monochorde. Il écrit p. e. („Traité des Instrumens à Chordes” p. 15): „Il faut donc conclure avec Ptolomée que le Monochorde est l'instrument le plus propre & le plus exact pour regler les sons & l'harmonie”.

datée du 8 juillet 1661, Huygens divise en effet le monochorde en ce nombre de parties. Il est vrai que Stevin dans son manuscrit „Vande Spiegeling der Singkonst” divise également le monochorde en 10000 parties. La Pièce C. Divisio Monochordi II empruntée au petit Manuscrit 13 où Huygens avait l’habitude de noter ses principales découvertes (jusqu’à \pm 1662) est sans doute à peu près de la même époque⁴⁾. Son intérêt pour les cloches est attesté en outre par le fait qu’en août 1662 il alla visiter Hemony (il parle au singulier; s’agit-il de Pierre Hemony le cadet ?) à Amsterdam et eut avec lui une „longue conference” sur les „tons de la musique, où il est tres scavant”.

D’autre part nous attirons l’attention sur la note 11 de la p. 46. Ne connaissant ni Mr. de Montalent ni son manuscrit, nous ne pouvons toutefois former aucune conjecture sur la grandeur de son influence sur Huygens. Comme la note nommée le fait voir, cette influence se rapporte probablement, non pas aux Pièces ici considérées, mais à la division de l’octave en 31 parties, c.à.d. au „Cycle Harmonique”.

Nous ajoutons encore à ces Pièces un Appendice qui porte la date 1676.

On connaît le grand intérêt pour le tempérament musical dont avaient fait preuve depuis longtemps les constructeurs et accordeurs d’instruments à touches ainsi que les musicologues. Par l’introduction de la tierce majeure harmonique ou naturelle (5 : 4) au lieu de la tierce majeure pythagoricienne (81 : 64) et du principe harmonique de l’accord de tonique, l’impossibilité de produire exactement tous les intervalles dans les dits instruments était devenue encore plus manifeste qu’auparavant; il fallait donc tâcher de trouver un compromis capable d’écarter au moins les plus rudes dissonances.

Le nombre des systèmes inventés à cet effet, est considérable. Une place importante

⁴⁾ Il existe en outre une page presque pareille à la Pièce „Divisio Monochordi II”: c’est la f. 3 v du portef. „Musica”, publiée (en majeure partie) à la p. 200 du „Tijdschrift der Vereeniging voor Noord-Nederlands”) Muziekgeschiedenis”, Deel III, Amsterdam, F. Muller, 1891 dans l’article „Het toonstelsel van Christiaan Huygens” de J. P. N. Land. L’auteur, ne connaissant que les deux feuilles du portefeuille qui lui avaient été communiquées par D. Bierens de Haan, déclare ignorer ce que signifient α et α et les formules qui contiennent ces lettres. Voyez sur la f. 3v la p. 58 qui suit.

⁵⁾ Cette société s’appelle actuellement: „Vereeniging voor Nederlandsche Muziekgeschiedenis”.

revient à celui de 1511 de l'organiste allemand Arnolt Schlick⁵⁾ qu'on désigne par le nom de tempérament du ton moyen. Considérant la série des quintes

c g d a e

dont le dernier ton forme (à des différences d'octave près) un intervalle 81 : 80, dit comma syntonique⁶⁾, avec la tierce majeure naturelle de c, Schlick eut l'idée de diminuer chacune de ces quintes d'un quart du dit intervalle. Dans la gamme construite suivant ce principe la tierce majeure, et par conséquent aussi la sixte mineure, était naturelle, tandis que, simultanément avec la quinte, la tierce mineure était diminuée d'un quart de comma. Il n'y a dans cette gamme qu'un seul ton entier, précisément moyen entre le ton majeur (9 : 8) et le ton mineur (10 : 9) de la gamme naturelle; c'est de lui, le „mezzo tuono participato”, que provient le nom de tempérament du ton moyen (mean tone temperament).

Ce système est amplement traité par les théoriciens Francesco Salinas⁷⁾ et Gioseffo Zarlino⁸⁾ qui paraissent ne pas connaître Schlick: voyez la note 6 de la p. 18 qui précède, où Huygens dit qu'ils s'en disputent l'invention. D'ailleurs ces deux musico-logues discutent d'autres systèmes aussi, les comparant avec lui⁹⁾.

5) Arnolt Schlick, né en Bohême, fut „Pfalzgrauischer Organist” c.à.d. organiste à la cour de Heidelberg, au commencement du 16ième siècle; il mourut après 1517. En 1511 parut son „Spiegel der Orgelmacher und Organisten etc.” (publié de nouveau en 1869 par R. Eitner comme „Beilage der 5^{te} und 6^{te} Monatshefte für Musikgeschichte” 1 Jahrgang, Berlin). Nous ne voulons pas dire — voyez la suite du texte et la note 9 — que cet ouvrage de Schlick ait été fort connu en son temps ou au dix-septième siècle.

6) Comparez la l. 16 de la p. 6 qui précède.

7) Voyez sur Salinas la note 3 de la p. 423 du T. IX. Le titre complet de son livre de 1577 est „De Musica libri septem, in quibus eius doctrinæ veritas tam quæ ad Harmoniam, quàm quæ ad Rhythmum pertinet, iuxta sensus ac rationis iudicium ostenditur, et demonstratur”, Salmanticæ MDLXXVII.

8) Voyez sur Gioseffo Zarlino, lui aussi théoricien du seizième siècle, la note 2 de la p. 169 du T. X.

Il écrivit trois livres sur la théorie de la musique qui furent réunis en 1589 en 3 volumes*) intitulés „Tutte l'opere del R. M. Gioseffo Zarlino da Chioggia”. Nous avons pu consulter deux de ses ouvrages, savoir 1. „Istitutioni Harmoniche del Rev. Messere Gioseffo Zarlino da Chioggia, Maestro di Capella della Serenissima Signoria di Venetia: di nuovo in molti luoghi migliorate, & di molti belli secreti nelle cose della Prattica ampliata. Nelle quali; oltre le materie appartenenti alla Musica; si trouano dichiarati molti luoghi di Poeti, Historici, & di Filosofi; si come nel leggerle si potrà chiaramente vedere”. In Venetia. Appresso Francesco dei Franceschi Senese. 1573. — C'est la troisième édition: l'ouvrage avait déjà vu le jour en 1558 et 1562. 2. „Dimostrazioni Harmoniche del R. M. Gioseffo Zarlino da Chioggia. Maestro di Ca-

*) et un traité sur la patience et quelques autres traités formant un 4ième volume.

Le traité de Huygens intitulé „*Divisio Monochordi*” (notre Pièce II B) contient une théorie mathématique de ce système. La méthode appliquée consiste à partir d’une corde de longueur a et à calculer successivement les longueurs des cordes donnant les tons de la gamme chromatique correspondante, d’après le principe de la construction pythagoricienne, c.à.d. par formation de quintes et d’octaves, complétées par des tierces déterminées elles aussi à l’aide de quintes et d’octaves; or, la longueur a de la corde donnant la quinte avec le ton fondamental est d’abord considérée comme inconnue: sa valeur est déterminée, et avec elle celle de la quinte tempérée, par les conditions imposées à certains intervalles.

Dans cette Pièce B, la condition unique est la suivante: les quintes sont rendues inférieures à leur valeur naturelle ($3 : 2$) d’autant que les sixtes majeures sont rendues supérieures à la leur ($5 : 3$). Cette condition paraît conduire à des tierces majeures naturelles ainsi qu’aux autres intervalles du tempérament du ton moyen.

pella della Illustris. Signoria di Venetia. Nelle quali realmente si trattano le cose della Musica: e si risolvono molti dubij d'importanza. Opera molto necessaria à tutti quelli, che desiderano di far buon profitto in questa nobile Scienza”. In Venetia. Per Francesco dei Franceschi Senesc. 1571. Une deuxième édition parut en 1573. Voyez sur le troisième ouvrage sur la musique (de 1588) la note 12 de la p. 65 qui suit.

Nous connaissons d’ailleurs aussi l’édition mentionnée de 1589 (Utrecht, Muziekhistorisch Instituut) que Huygens possédait (voir la p. 116 qui suit); c’est elle que nous citerons dans la suite.

Zarlino parle à plusieurs reprises des différents tempéraments, p.e. Istit. Harm. Parte II caput 42 seq. Dimostraz. Harm. Ragionamento IV, Proposta I et Ragionamento V, Proposta I.

⁹⁾ Le catalogue de la vente des livres de Constantyn Huygens père ne contient le titre d’aucune publication de Schlick, pas plus que celui de la vente des livres de Christiaan.

¹⁰⁾ „Istitutioni Harmoniche”, Parte II, caput 42. „Quel che si dee osservare nel temperare overo accordare gli Instrumenti artificiali moderni”.

Salinas traite du système considéré dans le cap. 18 du Lib. III de „De Musica”.

¹¹⁾ La feuille 54 v porte les mots (nous avons déjà parlé de ce sujet à la page 44): pour la division du monochorde selon le manuscrit que m’a prêté M.^r de Montalant l’organiste. La double feuille 53—54 contient des calculs sur toutes ses pages. Les p. 54 r et 54 v ne contiennent en outre que les paroles citées respectivement dans le texte et dans la présente note. La p. 53 v porte en outre les énoncés: VS ex 31 proportione major et melior est 5ta ex systemate temperato $\frac{1}{110}$ commatis schærs [c.à.d. à peine]. VM tertia major excedit temperatum $\frac{1}{27}$ commatis schærs. tertia minor deficit a temperato $\frac{1}{37}$ commatis. Tonus a tono temperato differt $\frac{1}{34}$ commatis. comma est minus quam $\frac{1}{9}$ toni temperati. l’octave contient $55\frac{1}{2}$ comma schærs. Comparez la note 5 de la p. 6 qui précède.

Dans la même Pièce un deuxième système est obtenu en postulant que les tierces majeure et mineure, ainsi que les fixtes majeure et mineure, seront également distantes les unes et les autres de leurs valeurs naturelles. Il est connu sous le nom de tempérament de Zarlino ¹⁰).

Dans la Pièce indiquée ici par la lettre C Huygens déduit de nouveau le tempérament du ton moyen, en posant cette fois directement la condition de la justesse de la tierce majeure.

À la p. 54r du portefeuille „Musica” Huygens parle de „mon monochorde de 120 demipouces ou 5 pieds” ¹¹).



4¹⁾. COPIE D'UNE PARTIE D'UN ÉCRIT D'UN DES DEUX FRÈRES
HEMONY INTITULÉ „VANDEN BEIJAERT” (C.À.D. DU CARILLON).

1661.

Copie van Hemonij Lorrainfis van ²⁾ Beijaert. Antwerpen. 16. Jun. 1661 ³⁾).

Regel van het Accord, hoe het selue door proportie van getal geuonde werde.

Eenheid neemt een getal van ontrent 10000. deelen in een linie verdeelt. ende genomen het beginfel zij in \acute{T} . de octaue van wederumb \acute{T} . moet nootfakel[yck] hebben 5000. derfelue gedeelten.

Nu de Tertia maj.^r van voorsz. \acute{T} is \acute{E} moet hebben 8000. derfelue gedeelten : Zijnde dese 3. voorsz. species tegens malkander fuyuer.

Nu tuffchen \acute{T} en \acute{E} moet gefocht zijn \acute{D} . moet derhaluen het getal van \acute{T} . en ⁴⁾ \acute{E} . met malkander gemultiplieert werden, en radix quadrat daervan is de begeerde \acute{D} .

Van de gem.^{te} ⁵⁾ \acute{D} . neemtmen de octaue, dewelcke oock de halue moet zijn, als boven staet van \acute{T} . en \acute{T} .

Voort neemt oock \acute{g} . tuffchen \acute{T} en \acute{D} . oock medio proportionaliter, en vaert daermede met alle quinten, tertien en octaue, voort volgens gefeide proportie ⁶⁾).

¹⁾ Portef. „Musica”, f. 50.

²⁾ C.à.d. vanden.

³⁾ Cette premiere ligne seule est écrite de la main de Huygens.

⁴⁾ C.à.d. ende.

⁵⁾ C.à.d. gemelte.

⁶⁾ Traduction: Règle de l'accord, comment celui-ci est trouvé par la proportion numérique.

Prenez pour unité un nombre d'environ 10000 parties distribuées sur une ligne. Et soit par hypothèse l'origine prise en \acute{T} . L'octave correspondante \acute{T} doit nécessairement avoir 5000 des mêmes parties.

Ensuite la tierce majeure de la prédite \acute{T} est \acute{E} qui doit avoir 8000 des mêmes parties. Ces trois tons étant purs l'un par rapport à l'autre.

Ensuite \acute{D} doit être cherchée entre \acute{T} et \acute{E} . A cet effet il faut multiplier l'un par l'autre les

B¹). DIVISIO MONOCHORDI I.

1661.

V	$\frac{a}{1}$	L	$\frac{2x^3}{aa}$	8 Jul. 1661.
V [#]	$\frac{16x^7}{a^6}$	p	$\frac{a^3}{4xx}$	§ 1. Sit tota chorda VP partium a^2). SP putetur fonare
R	$\frac{2xx}{a}$	C	$\frac{4x^5}{a^4}$	diapente ad VP, et esse SP partium x . huic alia similis
M ^b	$\frac{a^4}{4x^3}$	V ²	$\frac{1}{2}a$	diapente putetur SR ² . Ergo ut a ad x ita x ad $\frac{xx}{a} \propto R^2$
M	$\frac{4x^4}{a^3}$	V [#]	$\frac{8x^7}{a^6}$	hoc est R ² P. Ergo R diapason R ² erit $\frac{2xx}{a}$. huic rursus
F	$\frac{aa}{2x}$	R ²	$\frac{xx}{a}$	fiat similis diapente RL, ergo ut a ad x ita $\frac{2xx}{a}$ ad $\frac{2x^3}{aa}$
F [#]	$\frac{8x^6}{a^5}$	R [#]	$\frac{a^4}{8x^3}$	$\propto L$. huic rursus similis diapente fit LM ² . Ergo ut a ad
S	$\frac{x}{16x^9}$	M ²	$\frac{2x^4}{a^3}$	x , ita $\frac{2x^3}{aa}$ ad $\frac{2x^4}{a^3} \propto M^2$. Unde M diapason M ² erit
S [#]	$\frac{a^5}{8x^4}$	F ²	$\frac{aa}{4x}$	$\frac{4x^4}{a^3}$. huic rursus diapente fit MC. Ergo ut a ad x ita $\frac{4x^4}{a^3}$
				ad $\frac{4x^5}{a^4} \propto C$. Iam quia SV ² est diatessaron sumatur ei
				similis diatessaron VF. Nempe ut x ad $\frac{1}{2}a$ ita fit a ad $\frac{aa}{2x}$
				$\propto F$. ab F ad $\frac{1}{2}a$ sumatur similis item diatessaron, fit
				$\frac{1}{2}a \propto \frac{a^3}{4xx}$. Porro tertiae majori VM sumatur similis tertia

nombres de \acute{T} et de \acute{E} , la \acute{D} demandée en est la racine carrée.

De cette \acute{D} on prend l'octave qui doit de nouveau être la moitié, comme il est écrit ci-dessus à propos de \acute{T} et \acute{T}^2 .

Prenez ensuite \acute{g} entre \acute{T} et \acute{D} , également moyenne proportionnelle, et continuez l'opération pour toutes les quintes, tierces, et octaves d'après la proportion susdite.

Le lecteur hollandais peut consulter sur les cloches des frères Hemony le livre de 1909 de A. Vas Nunes „Experimenteel onderzoek van klokken van F. Hemony” (Kramer, Amsterdam).

Dans le Journal de Voyage, cité dans la note 1 de la p. 43 qui précède, Huygens écrit à la date du 16 octobre 1660: Hoorde op de klokken spelen . . . Den Bayer Sr. Cramers befocht, etc. Nous parlerons plus amplement, savoir en publiant le Journal dans le T. XXII, des carillons d'Anvers et de cette visite de Huygens au carillonneur. M. Gyselynck, secrétaire de la ville d'Anvers, nous écrit que le véritable nom n'est pas Cramers, mais Crama.

RF^{\sharp} , fit $F^{\sharp} \propto \frac{8x^6}{a^5}$, item similibus itis MS^{\sharp} fit $S^{\sharp} \propto \frac{16x^8}{a^7}$. Item LV^{\sharp} , fit $V^{\sharp} \propto \frac{8x^7}{a^6}$, unde diapason ejus nempe $V^{\sharp} \propto \frac{16x^7}{a^5}$. Rursum ab R^{\natural} fumatur tertia major deorsum R^{\natural} , fit $\gamma \propto \frac{a^3}{4x^3}$. Similiter tertia major SM^{\flat} ; fit $M^{\flat} \propto \frac{a^4}{4x^3}$, atque ita omnes toni ac semi-toni reperti sunt ¹⁾).

¹⁾ Portefeville „Musica“, f. 7—8. Huygens intitule cette Pièce „Divisio Monochordi“.

²⁾ Partant d'une corde de longueur a Huygens calcule les longueurs des cordes dont les tons forment avec le ton fondamental les intervalles du système pythagoricien. Il pose x pour la longueur de la corde correspondant à la quinte du ton fondamental, de sorte que le rapport $\frac{x}{a}$ de l'intervalle fondamental de la construction pythagoricienne reste momentanément indéterminé. Soit en notations modernes V (c) le ton de la corde fondamentale. Comme nous l'avons dit, Huygens prend pour le ton S (g) une corde de longueur x . Pour R^{\natural} (d) il en déduit $\frac{x^2}{a}$ en montant d'une quinte (diapente), et pour R (d) $\frac{x^2}{a}$ en descendant ensuite d'une octave (diapason). De la même manière L (a) et M^{\natural} (e) se dérivent de ce dernier ton en montant chaque fois d'une quinte, ensuite M (e) en descendant d'une octave. La quinte de M donne C (b). Puisque l'intervalle SV^{\natural} (g—c) est une quarte, le rapport des longueurs des cordes correspondantes est apparemment $\frac{a}{2x}$. Ensuite F (f) se tire de V (c); en montant de nouveau d'une quarte on trouve γ (bes). L'intervalle VM (c—e) est une tierce majeure pythagoricienne, à laquelle correspond le rapport des longueurs $4\left(\frac{x}{a}\right)^4$. Le même intervalle sépare R (d) de F^{\sharp} (fis), M (e) de S^{\sharp} (gis), L (a) de V^{\sharp} (cis), d'où suit V^{\sharp} (cis). \flat (bes) est calculé une deuxième fois en descendant d'une tierce majeure à partir de R^{\natural} (d). M (es) provient de S (g) de la même manière.

Tous les tons du système ont donc été déduits du ton fondamental par des sauts de quintes et de tierces avec réductions d'octaves; la relation de chacun d'eux avec la tonique est donnée dans le tableau suivant, où T indique un saut de tierce, Q un saut de quinte et O un saut d'octave, chaque symbole placé dans le numérateur désignant une ascension, dans le dénominateur, une descente.

V	V^{\sharp}	R	$R^{\sharp}(M^{\flat})$	M	F	F^{\sharp}	S	S^{\sharp}	L
	$\frac{3QT}{2O}$	$\frac{2Q}{O}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{4Q}{2O} = T$	$\frac{O}{Q}$	$\frac{2QT}{O}$	Q	$2T$	$\frac{3Q}{O}$
	C^{\flat}	C	V^{\natural}	V^{\sharp}	R^{\natural}	$R^{\sharp}(M^{\flat})$	M^{\natural}	F^{\natural}	
$\frac{2O}{2Q} = \frac{2Q}{T}$		TQ	O	$\frac{3QT}{O}$	$2Q$	$\frac{QO}{T}$	$\frac{4Q}{O}$	$\frac{2O}{Q}$	

Erunt autem ex constructione diapente fimiles VS, SR^2 , RL, LM^2 , MC. fed et fimilis illis $V^{\sharp}S^{\sharp}$. item $M^{\flat}C^{\flat}$ ⁵⁾, CF^{\sharp} , item $\flat F^2$. Item FV^2 , $F^{\sharp}V^{\sharp}$. omnes enim uti a ad x . sunt ergo 11; quare diffimilis 1, $S^{\sharp}M^{\flat}$ ⁶⁾.

Diateffaron fimiles sunt ex constructione SV^2 , VF, F^{\flat} ; fiunt autem fimiles et istæ $V^{\sharp}F^{\sharp}$, RS, ML, $F^{\sharp}C$, $S^{\sharp}V^{\sharp}$, LR^2 , $C^{\flat}M^{\flat}$, CM. omnes enim ut x ad $\frac{1}{2}a$, five $2x$ ad a . Sunt ergo 11; et diffimilis 1⁷⁾. Tertiæ majores fimiles ex constructione VM, RF^{\sharp} , MS^{\sharp} , LV^{\sharp} , $\flat R^2$, $R^{\sharp}S^{\sharp}$ ⁸⁾. fiunt autem et istæ FL, SC. omnes enim ut a^4 ad $4x^4$. Sunt ergo 8, et diffimiles 4⁹⁾.

Tertiæ minores fimiles fiunt VR^{\sharp} , $V^{\sharp}M$, RF, MS, $F^{\flat}L$, S^{\flat} , $S^{\sharp}C$, LV^2 , CR^2 . Sunt ergo 9 et diffimiles 3¹⁰⁾.

Sextæ majores fimiles sunt VL, RC, $R^{\flat}V^2$ ¹¹⁾, MV^{\sharp} , FR^2 , SM^2 , LF^{\sharp} , $\flat S^2$, CS^{\sharp} . Nempe sunt complementa tertiarum minorum. Ergo 9 fimiles, et 3 diffimiles¹²⁾.

Sextæ minores fimiles sunt $V^{\sharp}L$, R^{\flat} , MV^2 , $F^{\sharp}R^2$, SR^{\sharp} , $S^{\sharp}M^2$, LF^2 , CS^2 , nempe 8, complementa tertiarum majorum. Reliquæ diffimiles 4¹³⁾.

§ 2. Horum omnium intervallorum indeterminata est hæcenus magnitudo, nam

³⁾ Ici as est déterminé comme le ton formant une tierce avec le ton plus haut c.

⁴⁾ Nous remarquons que Huygens, pour obtenir une gamme chromatique pythagoricienne juste de 12 intervalles, emprunte les tons destinés à compléter la gamme diatonique en partie (savoir cis, fis et gis) à la partie ascendante, en partie (savoir es et bes) à la partie descendante de la série des quintes. En poursuivant la marche ascensionnelle, il aurait trouvé $\frac{3^2 x^9}{a^8}$ pour dis et $\frac{3^2 x^{10}}{a^9}$ pour ais. Dans l'octave qui commence par V^2 , $M^{\flat}2$ a été remplacé par R^{\sharp} (lisez R^2).

⁵⁾ Appelé plus haut \flat [bes].

⁶⁾ Il faut entendre $S^{\sharp}M^{\flat}$; permutation enharmonique de \overline{es} et de \overline{dis} .

⁷⁾ Savoir $M^{\flat}S^{\sharp}$, de nouveau en vertu d'une substitution enharmonique.

⁸⁾ Ou plutôt $M^{\flat}S$.

⁹⁾ Savoir $V^{\sharp}F$, F^{\flat} , $S^{\sharp}V^2$, CM^{\flat} (chez Huygens CR^{\sharp}).

¹⁰⁾ Savoir $M^{\flat}F^{\sharp}$, FS^{\sharp} , $\flat V^2$.

¹¹⁾ Lisez $M^{\flat}V^2$.

¹²⁾ Savoir $V^{\sharp}2$, $F^{\sharp}M^2$, $S^{\sharp}F^2$.

¹³⁾ Savoir VS^{\sharp} , $M^{\flat}C$, FV^{\sharp} et $\flat F^{\sharp}$.

qualiscunque adsumatur x , similitudo dicta ubique locum habebit. (En marge: omnes toni æquales VR; RM; FS; SL; LC. item MF²; F²S²; CV²). Videamus ergo quanta convenientissime possit statui x . Sane si ponatur $x \propto \frac{2}{3}a$, constat quintas omnes ac proinde et quartas perfectas fore. Verum tunc fit $VL \propto \frac{2x^3}{aa} \propto \frac{1}{2}\frac{6}{7}a$. Sed ut sit perfecta sexta major VL, deberet esse $L \propto \frac{3}{5}a$, quod majus est quam $\frac{1}{2}\frac{6}{7}a$. Ergo ratio LP ad VP minor est vera ad efficiendam sextam majorem, quamobrem sexta hæc major erit justo. atque ita omnes reliquæ sextæ majores supra enumeratæ, quia omnes inter se sunt similes. Hinc vero et tertiæ minores omnes supradictæ, quæ sunt complementa sextarum majorum erunt minores justo¹⁴⁾. Differentia autem erit $\frac{1}{80}$ ¹⁵⁾ id quod comma vocant, nam $\frac{1}{2}\frac{6}{7}$ est ad $\frac{3}{5}$ ut 80 ad 81. quæ valde est notabilis, ita ut facile imperfectio ejusmodi tertiarum ac sextarum aure percipiatur. Est enim comma $\frac{1}{9}$ toni proxime¹⁶⁾.

Sed et tertia major VM ex illa positione, nempe si x sit $\propto \frac{2}{3}a$, major vera contingit, est enim $M \propto \frac{4x^4}{a^3} \propto \frac{6}{81}a$, cum debeat esse $\frac{4}{9}a$ ad faciendam consonantiam tertiæ majoris. Estque $\frac{6}{81}$ ad $\frac{4}{9}$ ut 80 ad 81. quæ rursus notabilis est commatis differentia, quæ etiam sextæ minores à veris deficient, quippe tertiarum majorum complementa. Præstat igitur quintam VS paulo minorem vero sumere, hoc est x paulo majorem quam $\frac{2}{3}a$. hinc enim video sextam majorem VL et omnes similes minorem factum iri quam prius, crescente nempe L quæ erat $\frac{2x^3}{aa}$. videoque simul tertiam majorem VM decrecere sicut requiritur, nam etiam $\frac{4x^4}{a^3}$ major efficitur dum major ponitur x . quanto igitur majorem sumimus x quam $\frac{2}{3}a$? Optimum videtur ut ita comparetur si fieri possit, ut quintæ tanto minores evadant perfectis quanto sextæ majores veras excedent.

¹⁴⁾ Il appert donc ici qu'on ne peut faire accorder la construction de la gamme par sauts de quintes et réductions d'octaves avec les rapports des intervalles consonants suivant le tempérament harmonique naturel.

¹⁵⁾ C'est à dire pour obtenir la vraie sixte majeure, la corde LP devrait être allongée de $\frac{1}{80}$ (ou bien la corde VP raccourcie de $\frac{1}{81}$).

¹⁶⁾ Le ton entier VR (c—d) acquiert la valeur 8:9. Pour monter d'un ton entier, il faut donc diminuer la longueur de la corde de $\frac{1}{9}$, c.à.d. 9 fois d'avantage que pour passer de la vraie sixte majeure à celle figurant dans la construction pythagoricienne. C'est ce qu'on peut exprimer en disant qu'un comma (savoir un comma syntonique) est environ $\frac{1}{9}$ d'un ton. Il s'agit en somme de l'approximation $\left(\frac{80}{81}\right)^9 = \left(1 - \frac{1}{81}\right)^9 \approx 1 - \frac{1}{9}$.

	SP	quinta perf.	sexta ma. perf.	L
§ 3. Sit igitur	x	ad $\frac{2}{3}a$	ita $\frac{2}{3}a$	ad $\frac{2x^3}{aa}$
		$\frac{2x^4}{aa} \propto \frac{6}{1^{\frac{1}{5}}} aa$	erit hinc MP quæ erat $\frac{4x^4}{a^3} \propto$	
		$x^4 \propto \frac{1}{5} a^4$	$\frac{4}{5} a$ hoc est tertia major perfecta.	
		$x \propto \sqrt[4]{\frac{1}{5} a^4}$		

Unde si ponatur $a \propto 100000$, invenietur $x \propto 66874 \frac{1}{3^{\frac{1}{5}}}$
 at si foret $x \propto \frac{2}{3}a$, hoc est quinta VS perfecta esset $x \propto 66666 \frac{2}{3}$
 diff. 208

differentia ergo est $\frac{1}{480}$ proximè totius chordæ ¹⁷⁾ qua x five SP debet major sumi quam $\frac{2}{3}a$. quæ differentia est valde exigua.

Omnes igitur tertiæ majores et sextæ minores fimiles, sunt perfectæ in hoc systemate. Quintæ vero et tertiæ minores paulillo minores sunt veris, æquali defectu ¹⁸⁾. nam chordæ partes quæ sonant quintas vel tertias minores contra tonum aliquem graviorem excedunt veras proximè $\frac{1}{3^{\frac{1}{5}}}$ sui parte ¹⁹⁾; accurate autem quartâ parte commatis. Quartæ autem, et sextæ majores tantundem veras superant ²⁰⁾.

En marge: dico id quo S nostrum temperatum distat ab S vero five $\frac{2}{3}a$ esse accurate $\frac{1}{4}$ commatis, nam ratio $\sqrt[4]{\frac{1}{5} a^4}$ five x ad $\frac{2}{3}a$ quadruplicata facit rationem $\frac{1}{8} a^4$ ad $\frac{1}{81} a^4$ hoc est ut 81 ad 80, quæ est commatis.

Notandum etiam tonos omnes istos æquales esse VR, RM, M²F, MF², FS, F²S², SL, LC, C²V², CV². Diffimiles tantum V²R², S²C² ²¹⁾. Semitoniamajora familia V²R, RM², MF, F²S, S²L, LC², CV². Reliqua quinque minora etiam inter se familia VV², M²M, FF², SS², C²C.

¹⁷⁾ En effet, $\frac{208}{100000} \approx \frac{1}{480}$.

¹⁸⁾ La longueur de la corde devient pour la tierce mineure $\frac{5^{\frac{2}{5}}}{4} a = \frac{3}{2 \cdot 5^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{5}{6} a$. Son intervalle avec la véritable tierce mineure est donc égal à celui de la quinte tempérée avec la quinte véritable: en effet, $\sqrt[4]{\frac{1}{5} a^4} = \frac{3}{2 \cdot 5^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{2}{3} a$.

¹⁹⁾ En effet, $\frac{1}{480} a = \frac{1}{320} \cdot \frac{2}{3} a$.

§ 4. Si velimus ut tertiæ minores majoresque, et sextæ majores minoresque æque multum a veris distent

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{tert. maj. perf.} & & \text{sexta major perf.} & & & \\
 \text{Sit } \frac{4x^4}{a^3} \text{ ad } \frac{4}{3}a & & \text{ficut} & \frac{3}{5}a & & \text{ad } \frac{2x^3}{aa} & \\
 & & & & & & \\
 & & & \frac{8x^7}{a^5} \propto \frac{12aa}{25} & & & \\
 & & & \frac{x^7}{a^5} \propto \frac{3}{50} a^7 & & & \\
 & & & x \propto \sqrt[7]{\frac{3}{50} a^7} & & &
 \end{array}$$

Hinc invenitur $x \propto 66904$, qualium a est 100000 vel accuratius 66903 $\frac{5}{7}$.
 quinta perfecta $x \propto 66666$

diff.²¹ 238 hoc est $\frac{1}{420}$ totius chordæ, quæ facit $\frac{1}{280}$ chordæ SP.
 At ex priori systemate erat $\frac{1}{320}$. Ergo hic perexigua differentia est, sed tamen quintæ paulo adhuc minores, et quartæ majores.

Porro fit LP five $\frac{2x^3}{aa} \propto 59893 \frac{7}{10}$ quæ subducta a vera sextæ majoris longitudine quæ est 60000, relinquit tantum 105²²), hoc est $\frac{1}{5000}$ fere tantum totius chordæ, quæ facit $\frac{1}{5000}$ chordæ LP. at ex priori systemate erat $\frac{1}{3200}$, quantum nempe quintæ longitudo veram superabat. Ergo hic jam sextæ majores, simulque tertiæ minores meliores sunt quam in systemate præcedenti²³). Tertiæ autem majores et sextæ minores jam a veris recedunt tantundem præcise quantum tertiæ majores et sextæ minores²⁴). fit enim MP $\propto 80142$ quæ debebat esse 80000, differentia est 142, quæ etiam est $\frac{1}{5000}$ chordæ MP²⁵).

²⁰) D'après l'hypothèse initiale pour la sixte; pour la quarte on trouve $\frac{a^2}{2x} = a \cdot \frac{5^{1/4}}{2} = \frac{2 \cdot 5^{1/4}}{3} \cdot \frac{3}{4} a$.

²¹) Comme plus haut, ceci résulte d'une substitution enharmonique. On trouve les mêmes intervalles que dans les cas énumérés, lorsqu'on prend $\frac{32x^9}{a^8}$ pour R^2 et qu'on remplace C (bes) par $\text{ais} \left(\frac{32x^{10}}{a^9} \right)$.

²²) Lisez 106.

²³) Le système trouvé dans ce § est connu sous le nom de tempérament de Zarlino; voyez l'Avertissement (p. 46).

²⁴) Lisez: quantum sextæ majores et tertiæ minores.

²⁵) Ceci résulte de la condition imposée aux tierces et sixtes majeures. La validité de la thèse pour

Hic igitur tertiæ majores et tertiæ minores æqualiter à veris deficiunt, nempe accurate $\frac{1}{7}$ commatis ²⁶⁾, quæ differentia auribus nescio an percipi possit. Sextæ vero majores et minores tantundem veras superant. Quintæ deficiunt à veris duplo tanto nempe $\frac{2}{7}$ commatis ²⁷⁾, accuratè, ac tantundem quartæ veras superant.

§5. Ostendit autem experientia melius gratusque auribus esse prius systēma, nec mirum cum in illo nulla consonantia tantum à vera recedat quam hic. nam hic jam sensibilibus sit, etsi exiguo quintarum et quartarum vitium. deinde et tertiæ majores, licet tantum $\frac{1}{7}$ commatis deficiant, minus gratum sonum edunt quam cum perfectæ sunt, ut in priori illo systēmate, frequentissime autem occurrunt. Sed et facilius harum adjumento chordæ omnes clavicymbali vel fistulæ organi ad suum quæque tonum componuntur. Omnino igitur priori systēmate uti præstat.

Modus autem quo secundum illud chordæ in ordinem rediguntur sive accordandi ut vocant clavicymbali vel organi est iste ²⁸⁾. Primo fiat

VM tertia major perfectæ. et deinde MM², diapason perfectæ ut omnes.

Quo autem certius accipi possit 3^a major perfectæ, fiat primum diapason VV². deinde inter has S quod sonet 5 tam perfectam ad V: et 4^a tam ad V². tunc inter V et S ponatur M utrique perfectè consonans, alteri per 3^{am} majorem, alteri per minorem. Postea relicto M perfectæ, parum remittatur S, ut sit

VS quinta exiguo minor vera.

SR² quinta similis. et R²R diapason.

RL quinta similis. Si jam LM² inveniatur esse quinta prioribus similis recte se habent

les tierces et sixtes mineures résulte de ce que la condition

$$\frac{a^4}{4x^3} : \frac{5}{6} a = \frac{5}{8} a : \frac{a^5}{8x^4}$$

(voyez la note 3 de la p. 51) conduit elle aussi précisément à la valeur de x dont il vient d'être question dans le texte.

²⁶⁾ On trouve pour la tierce majeure la longueur de corde $4\left(\frac{3}{50}\right)^{\frac{1}{7}} a$, c.à.d. $5\left(\frac{3}{50}\right)^{\frac{1}{7}} \cdot \frac{4}{5} a$. Lorsque

l'intervalle avec la tierce majeure naturelle est septuplé, on obtient $5^7 \left(\frac{3}{50}\right)^4 = \frac{81}{80}$, c. à. d. le comma syntonique.

²⁷⁾ En effet, la longueur de corde de la quinte devient

$$a \sqrt[7]{\frac{3}{50}} = \left(\frac{3}{50}\right)^{\frac{1}{7}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} a, \text{ ou } \left[\left(\frac{3}{50}\right)^{\frac{1}{7}} \cdot \frac{3}{2}\right]^{\frac{7}{2}} = \frac{81}{80}.$$

²⁸⁾ Le Manuscrit 13 contient (f. 52) une note sur le même sujet sous le titre: Chordas Clavicymbali in ordinem redigemus hoc modo. Cette Pièce se distingue de notre texte par le remplacement de M² par R² et par quelques changements et compléments que nous indiquons dans les notes qui suivent.

hactenus omnia, sin minus tres tantum illæ S, R², L corrigendæ sunt, usquedum LM² inveniatur, ut dictum est, quinta deficiens similis. Hinc reliquæ per tertias majores perfectas deducuntur LF, SC, LV², MS², RF², R²L²; SM². Ita omnes habentur, unde reliquæ per diapason sursum ac deorsum ²⁹).

Si ad femitonos S², V², M² alij femitoni superaddantur, poterit quisque tonus diatonicus infra ac supra habere consonantes secundum omnes consonantias. Ponendo

V²S* tertiam majorem perfectam, ut et CR^{2*}, FV*. fit ergo $S^* \propto \frac{a^5}{8x^4}$, $R^{2*} \propto \frac{16x^9}{a^8}$,

$V^* \propto \frac{a^6}{8x^3}$ ³⁰).

Falsæ quartæ sive tritoni similes ³¹) sunt VF², RS², M²L, FC, SV², C²M², suntque paulo minores quam $\frac{7}{5}$ ad 5, nempe $\frac{1}{5} \frac{1}{7}$ ³²), hoc est minus quam $\frac{1}{5}$ commatis, ac fortasse et hæc consonantia censenda est. quintæ falsæ sive quintæ minores similes sunt V²S, M², F²V², S²R, L, R², CF²; tantundem superant rationem 10 ad 7, vocentur hæ tritoni majores ³³).

C. DIVISIO MONOCHORDI II¹).

[1661]

Longitudo chordæ totius VP, quæ sonat *Ut*, vocatur *a*. Pars SP vero, quæ sonat *Sol*, dicitur *x*.

La corde est représentée par Huygens par une droite verticale. Pour trouver dans notre tableau la position du point P il faut doubler la longueur VV², toutes les distances, de V à V², de V² à R etc. étant supposées égales.

²⁹) Manuserit 13: nec nili per octavos sursum ac deorsum procedere est opus.

³⁰) Cet alinéa fait défaut dans le Manuserit 13.

³¹) Dans le Manuserit 13 seulement: Tritoni minores similes.

³²) Pour $x = a \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$ on obtient $F^2 = 8 \frac{x^6}{a^5} = 8 \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot a$. Pour $a = 100000$ ceci devient 71554,

ce qui surpasse $\frac{5}{7}$, 100000 ou 71429 de 125, c.à.d. de $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}$, 71429.

³³) Dans le Manuserit 13 la phrase „Quintæ falsæ. . . tritoni majores” à été remplacée par Horum complementa sive tritoni majores similes sunt F², V² : S², R² : L, R² : C, F² : V², S : M, L² : quæ tantundem superant rationem 10 ad 7, ideoque omnino majores sunt tritonis minoribus cum jam ratio 10 ad 7 sit major quam 7 ad 5. Fortasse autem et horum uterque consonantijs accensendus est.

V	a	a	100000	Demonstratur per terminos Algebraicos systematis indeterminati, Quintas similes esse V, S: S, R ² : R, L: L, M ² : M, C: V ² , S ² : R ² , C ² : C, F ² : L ² , F ² : F, V ² : F ² , V ² : V ² , omnes enim ut a ad x^2). dissimilis ergo tantum una S ² , R ² 3). Hinc et omnes quartas similes esse constat præter unam R ² , S ² , omnes autem similes ut $2x$ ad a . Tertiæ majores similes ac perfectæ sunt V, M: R, F ² : M, S ² : L, V ² : C ² , R ² : R ² , S: F, L: S, C: omnes enim ut a^4 ad $4x^4$. Harum complementa sunt totidem sextæ minores similes ac perfectæ. Tertiæ minores similes sunt V, R ² : V ² , M: R, F: M, S: F ² , L: S, C ² : S ² , C: L, V ² : C, R ² . Quarum complementa sunt totidem sextæ majores similes.
V ²	$\frac{16x^7}{a^6}$	$\frac{16aa}{25x}$	95702	
R	$\frac{2xx}{a}$	$\frac{2xx}{a}$	89443	
R ²	$\frac{a^4}{4x^3}$	$\frac{5}{4}x$	83592	
M	$\frac{4x^4}{a^3}$	$\frac{4}{5}a$	80000	
F	$\frac{aa}{2x}$	$\frac{aa}{2x}$	74767	
F ²	$\frac{8x^6}{a^5}$	$\frac{8xx}{5a}$	71554	
S	x	x	66874	
S ²	$\frac{16x^3}{a^7}$	$\frac{1}{2}\frac{6}{5}a$	64000	
L	$\frac{2x^3}{aa}$	$\frac{2}{5}\frac{aa}{x}$	59814	
C ²	$\frac{a^3}{4xx}$	$\frac{5}{4}\frac{xx}{a}$	55902	
C	$\frac{4x^5}{a^4}$	$\frac{4}{5}x$	53499	
V ²	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	50000	
V ² 2)	$\frac{8x^7}{a^6}$	$\frac{8}{25}\frac{aa}{x}$	47851	
R ²	$\frac{xx}{a}$	$\frac{xx}{a}$	44721	
R ² 2)	$\frac{a^4}{8x^3}$	$\frac{5}{8}x$	41796	
M ²	$\frac{2x^4}{a^3}$	$\frac{2}{5}a$	40000	
F ²	$\frac{aa}{4x}$	$\frac{aa}{4x}$	37384	

Systema indeterminatum

Systema idem determinatum per $\frac{4x}{a^3} \propto \frac{4}{5}a^4$). hoc est in quo tertiæ

1) La Pièce est empruntée à la p. 51 du Manuscrit 13. Elle contient une nouvelle déduction du

maiores perfectæ sunt, quintæ vero a perfectis tantundem deficiunt atque sextæ majores excedunt, nempe $\frac{1}{4}$ commatis. Dico S nostrum ab S perfecto live $\frac{2}{3}a$ distare $\frac{1}{4}$ commatis. Ratio enim x live $\sqrt[4]{\frac{1}{5}a^4}$ ad $\frac{2}{3}a$, quadruplicata facit rationem $\frac{1}{5}a^4$ ad $\frac{1}{8}\frac{6}{1}a^4$, hoc est, rationem 81 ad 80, quæ est commatis. similiter ratio L live $\frac{2}{5}\frac{aa}{x}$ hoc est

$$\frac{2}{5}\sqrt[4]{\frac{aa}{\frac{1}{5}a^4}} \text{ ad } \frac{2}{3}a \text{ quadruplicata facit rationem } 80 \text{ ad } 81.$$

L'article de Land de 1891 que nous avons mentionné dans la note 4 de la p. 44 qui précède contient, nous l'avons dit, la reproduction d'une partie de la f. 3v du portefeuille „Musica” dont le contenu diffère peu de celle de la page ici publiée du Manuscrit 13. Seulement cette f. 3v contient en plus que la page du Manuscrit 13 les notes

$$\begin{array}{ll} V^* \dots \frac{a^6}{8x^5} \dots \frac{5aa}{8x} \dots 93459 & V^* \dots \frac{a^6}{16x^5} \dots \frac{5aa}{16x} \dots 46730 \\ R^* \dots \frac{32x^9}{a^8} \dots \frac{32x}{25} \dots 85599 & R^* \dots \frac{16x^9}{a^8} \dots \frac{16x}{25} \dots 42799 \\ F^* \dots \frac{a^7}{16x^6} \dots \frac{15xx}{16a} \dots 69879 \\ S^* \dots \frac{a^5}{8x^4} \dots \frac{5}{8}a \dots 62500 \end{array}$$

les nombres faisant voir où ces notes doivent être intercalées dans la table publiée dans le texte. En outre la table de la f. 3v va jusqu'à $V^3 \dots \frac{1}{4}a \dots \frac{1}{4}a \dots 25000$. Comparez ce que nous disons à la p. 56 sur la longueur VP (c.à.d. la distance de V à V^3).

système du ton moyen. La colonne 1 contient les longueurs des cordes suivant le tempérament pythagoricien, où la longueur de la corde de la quinte du ton fondamental est de nouveau laissée provisoirement indéterminée (*systema indeterminatum*). Dans la colonne 2 x est une grandeur déterminée, dont la valeur est fixée par la condition de la justesse de la tierce majeure, c.à.d. par l'équation $\frac{4x^4}{a^3} = \frac{4}{5}a$.

²⁾ Cette remarque, ainsi que celles qui suivent, ne s'applique qu'à la première colonne.

³⁾ Voyez l'Appendice qui suit.

⁴⁾ La déduction suit donc une marche inverse par rapport à la Pièce I de juillet 1661 (p. 49). Là il fut postulé que les quintes seraient inférieures d'autant que les sixtes majeures seraient supérieures à leurs vraies valeurs, d'où suivait la justesse des tierces. Ici Huygens demande que l'intervalle VN (c—e) soit une tierce majeure naturelle (5 : 4); ce postulat conduit à l'équation

$$\frac{4x^4}{a^3} = \frac{4}{5}a, \text{ d'où encore une fois } x = a \sqrt[4]{\frac{1}{5}}.$$

Pour cette valeur de x toutes les valeurs de la colonne 1 se changent dans les valeurs correspondantes de la colonne 2.

⁵⁾ Les nombres de la quatrième colonne se tirent des colonnes 1 ou 2 en y substituant $\frac{x}{a} =$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{5}}.$$

APPENDICE

À LA PIÈCE C (DIVISIO MONOCHORDI II) ¹⁾.

1676.

Tonus meus U, R, minor est tono majore veteri qui est 9 ad 8, dimidio commate.
Nam U est a , R est $\frac{2xv}{a}$. sed $x \propto \sqrt{\sqrt{\frac{1}{5}a^4}}$.

Ergo $\frac{2xv}{a} \propto \sqrt{\frac{4}{5}aa} \propto R$. Sed ratio $\frac{8}{9}a$ ad $\sqrt{\frac{4}{5}aa}$ duplicata, facit rationem 80 ad 81. quæ est commatis. Ergo ratio $\frac{8}{9}a$ ad $\sqrt{\frac{4}{5}aa}$ est $\frac{1}{2}$ comma.

Quod R sit $\sqrt{\frac{4}{5}aa}$ facilius etiam hinc constare poterat, quod inter U $\propto a$ et M $\propto \frac{4}{5}a$, medium proportionale est R. nam in systemate indeterminato $\frac{2xv}{a}$ est medium proportionale inter a et $\frac{4x^4}{a^3}$.

Semitonium majus meum M, F, semitonio majore veteri nempe 16 ad 15 majus est $\frac{1}{4}$ commatis. Est enim M $\propto \frac{4}{5}a$; F $\propto \frac{aa}{2x}$, quorum ratio eadem quæ 8x ad 5a. sed si esset ut 16 ad 15, esset ut 8x ad $\frac{15}{2}x$. Ergo ostendendum quod $\frac{15}{2}x$ major est quam 5a quarta parte commatis, hoc est, rationem $\frac{15}{2}x$ ad 5a, hoc est 3x ad 2a, quadruplicatam efficere rationem 81 ad 80. x est $\propto \sqrt{\sqrt{\frac{1}{5}a^4}}$ sed ratio 3 $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{5}a^4}}$ ad 2a quadruplicata facit rationem $\frac{81}{5}a^4$ ad $16a^4$ five 81 ad 80, quod erat ostendendum.

Diapente $S^{\sharp}R^{\sharp\sharp}$ sola major est cæteris, quas superat parte toni quam constituit ratio 128 ad 125. Nam S^{\sharp} est $\frac{1}{2}\frac{6}{5}a$ à quo ad $R^{\sharp\sharp}$, $\frac{5}{8}x$ non est diapente, sed ad $R^{2*} \propto \frac{1}{2}\frac{6}{5}x$. Est autem $\frac{1}{2}\frac{6}{5}x$ ad $\frac{5}{8}x$ ut 128 ad 125. quod proxime facit duo commata. Ergo $S^{\sharp}R^{\sharp\sharp}$ duobus commatis superat circiter diapente quæ est ex temperamento. Veram vero diapente superabit $\frac{7}{4}$ commatis.

Quarta diminuta quales $S^{\sharp}U, F^{\sharp\sharp}b$, est exacte ut 32 ad 25, hoc est fere ut 9 ad 7 à qua proportionem deficit paulo plus quam $\frac{1}{3}$ commatis.

¹⁾ Portefeuille „Musica”, f. 48. Dans cette Pièce Huygens calcule la grandeur de différents intervalles dans le système du ton moyen. En marge la date 1676.

Ergo quinta exuperans US^{\sharp} , et reliquæ, exacte ut 25 ad 16. et fere ut 14 ad 9, quam proportionem superant paulo plus quam $\frac{1}{3}$ commatis.

Sexta exuperans $C' S^{\sharp}$, est proxime ut 7 ad 4 (pauillo minor) in systemate temperato, et videtur consonantia. nam et gratum auribus sonum edit, et non tremulum, ut sexta diminuta $S^{\sharp} M'$. differentia logarithmorum C' et S^{\sharp} est 24228. Et differentia logarithmorum 7 et 4 est 24304. Ita autem ratio C' ad S^{\sharp} ad rationem 7 ad 4 ut hæ differentiæ inter se.

III.

PIÈCES SUR LE CHANT ANTIQUE ET
MODERNE.



Avertissement.

Le portefeuille „Musica” renferme e.a. une série de feuilles d'un même format différent de celui des autres, numérotées 1—45 par Huygens; elle contiennent des notes ou pièces apparemment écrites plus ou moins d'un trait. C'est à ce groupe de feuilles que nous empruntons e.a. les cinq Pièces *A—E* qui suivent; seule la deuxième partie de la Pièce *B* (le morceau *B II*), ainsi que le morceau *D II*, proviennent d'autres feuilles. Comme le groupe mentionné 1—45¹⁾ contient e.a. des remarques sur un livre de Th. Salmon paru en 1672²⁾ il ne peut être antérieur à cette date. Quant au morceau *D II*, il ne peut être antérieur à 1682, puisqu'il traite de l'édition des „Harmonika” de Ptolémée par Wallis de cette année.

Dans la Pièce *A*, à laquelle nous avons donné le titre „Le tempo giusto”³⁾, Huygens observe que, puisqu'anciennement on ne se servait que de deux notes (longa et brevis), il est croyable que celles-ci correspondaient à des temps plus courts que chez

¹⁾ Que nous désignons par f. 26—44.

²⁾ P. 136 qui suit.

³⁾ Le mot „giusto” étant pris dans le sens littéral (juste). Nous faisons cette remarque parce que le sens n'est pas toujours le même. Percy A. Scholes „The Oxford Companion to Music”, Oxford Univ. Press 1938. écrit s.v. giusto: „Tempo giusto puzzlingly means either „strict time” or „suitable time”.

les modernes. Sa proposition de fixer les durées des notes⁴⁾ à l'aide du pendule — voyez sur une proposition analogue de Mersenne la note 5 de la p. 68 qui suit — rappelle celle de se servir du pendule pour établir l'unité de longueur⁵⁾.

La Pièce *B* traite assez amplement des modes du chant d'église; Huygens défend la manière de voir d'après laquelle il n'y a au fond que deux modes, le majeur et le mineur, lesquels on peut répéter à différentes hauteurs, tous les tons authentiques étant par conséquent des transpositions de ces modes.

Dans la Pièce *C* Huygens combat ceux „qui croient que le chant de la voix est plus parfait que celui de tout autre instrument et que la voix chante tous les intervalles des tons et tous les accords justes”⁶⁾. Il est au contraire d'avis qu'„il y a des voix qui penchent naturellement à baisser et d'autres à hausser”. Il calcule en outre les différences commatiques qui résulteraient d'un chant *parfaitement juste*, revenant au ton de départ.

Huygens — on l'a déjà vu plus haut⁷⁾ — ne partage nullement l'opinion de Stevin d'après laquelle le chant parfaitement juste est celui d'où ne résulte, dans le cas considéré, aucune différence commatique. Stevin paraît en outre être d'avis que ce chant parfaitement juste⁸⁾ est fort possible sans aucun accompagnement. Est-ce e.a. à lui que Huygens fait allusion dans la première phrase citée ci-dessus? Stevin parlait (pour citer cette fois la traduction française) des „vrais semitons, que nous entonnons de nature tous égaux”⁹⁾. Voyez aussi la l. 5 d'en bas de la p. 82 qui suit où Guicciardini affirme que

⁴⁾ Dans son traité de 1660 „Ghebruik, en Onghebruik van 't Orghel in de Kerken der Vereenighde Nederlanden” (Amsterdam, A. G. vanden Heuvel) Constantyn Huygens père dit que sans orgue on chante souvent trop vite ou trop lentement. Il parle (p. 116) de „... een' onverhaeste ende onvertraeghde maet, waerin mede veeltijds groffelijk werd gefeilt”.

Sur ce traité on peut consulter p.e. les p. 27—28 de „Het muziekleven in Nederland in de 17de en 18de eeuw” par Dirk J. Balfoort (Amsterdam, P. N. van Kampen, 1938).

⁵⁾ Voyez les p. 354 et suiv. du T. XVI.

⁶⁾ Ce qui n'est, certes, pas l'opinion de son père qui se plaint dans le traité nommé (note 4) du chant sans orgue fort peu satisfaisant, du moins dans les Pays-Bas septentrionaux. En Angleterre, dit-il, ce chant est meilleur.

⁷⁾ P. 32.

⁸⁾ L. 24—26 de la p. 33 qui précède.

⁹⁾ Premier Livre de la Géographie, dans „les Oeuvres mathématiques de S. Stevin augm. par A. Girard” (C. et B. Elsevier, Leyde 1634) p. 112.

les Belgæ „cantan' naturalmente a misura". Quoi qu'il en soit, il semble assez probable que ce soit aussi et surtout à Zarlino que Huygens pense ¹⁰). Mersenne ¹¹) parle du différent que Vincent Galilée eut en 1588 sur ce sujet avec Zarlino; „Galilée", dit-il, „conclud que les voix apprennent les vraies intervalles de la Musique des Instrumens, & non au contraire . . . on ne peut démonstrer si les voix chantent iustement qu'en faisant voir qu'elles sont conformes au parfait Instrument: ce que Zarlin eust auoué s'il l'eust considéré attentiuement" ¹²). Quelques pages du traité „Vande Spiegelung der Singkonst" font voir que Stevin connaissait les ouvrages de Zarlino.

La quatrième Pièce (*D*) traite la célèbre question si les Anciens ont, oui ou non, connu la polyphonie à laquelle Huygens répond par la négative ¹³), admettant tout au plus qu'ils aient fait usage d'un „faux bourdon". Il s'agit apparemment de ce qu'il appelle ailleurs, en discutant la même question, „un faux bourdon d'octave, quinte et quarte" ¹⁴).

¹⁰) Comparez la note 73 de la p. 101 qui suit.

¹¹) „Harmonie Universelle" de 1636, „Traité des Instrumens à cordes" p. 7, Prop. III: „Determiner si l'on a fait des Instrumens de Musique à l'imitation des voix, ou si l'on a réglé les intervalles des voix par ceux des Instrumens, etc."

¹²) Mersenne cite le Cap. IV du Libro Primo („Della Differentia che si troua tra la Natura & l'Arte, & tra il Naturale & lo Artefiale, & che l'Artefice è solamente imitatore della Natura") des „Sopplimenti musicali del rev. M. Gioseffo Zarlino da Chioggia, Maestro di Cappella della Sereniss. Signoria di Venetia, Ne i quali si dichiarano molte cose contenute ne i Due primi Volumi, delle Istitutioni & Dimostrations; per essere state mal' intese da molti; & si risponde insieme alle loro Calornie", Terzo Volume, Venetia, Francesco de' Franceschi, 1588. En 1589 (la préface est datée août 1588) parut le „Discorso di Vincentio Galilei nobile Fiorentino, intorno all' opere di messer Gioseffo Zarlino di Chioggia et altri importanti particolari attenenti alla musica" (Firenze, G. Marescotti). La Bibl. Naz. de Firenze possède en outre des remarques manuscrites de V. Galilei sur le même sujet (Vol. V. „Critica . . . ai Sopplimenti musicali").

¹³) Comparez les deux premières lignes de la p. 30 qui précède.

¹⁴) P. 117 qui suit. On peut consulter sur le faux-bourdon le chapitre „Der Diskantus und Fauxbourdon", p. 309—359 du deuxième livre („Die Entwicklung des geregelten mehrstimmigen Gesanges") de la „Geschichte der Musik" par A. W. Ambros (Band II, Breslau, F. E. C. Leuckart, 1864).

La cinquième Partie enfin proclame, bien brièvement, la gloire des Pays-Bas dans le domaine de la musique. Ambros, qui lui aussi cite Guicciardini ¹⁵⁾, nous apprend, ce dont il n'est pas question dans les éloges du florentin, que la plus grande floraison de la musique dans les Pays-Bas ne datait pas du temps où écrivait Guicciardini, mais d'un peu plus tôt: „Das Jahrhundert von 1450 bis 1550 verdient in der Musikgeschichte recht eigentlich den Namen des Jahrhunderts der Niederländer. Dem niederländischen Musiker war, wie später dem italienischen, schon seine Heimat eine Empfehlung, denn die Niederlande galten für die Hochschule der Musik; selbst dann noch als Italiens musikalischer Ruhm schon in vollem Glanze strahlte So noch bis in den Anfang des 17. Jahrhunderts hinein" ¹⁶⁾.

Nous ajoutons que dans ses compositions Constantijn Huygens père (1596—1687) s'inspire de la musique italienne, ce qui s'accorde bien avec les paroles d'Ambros ¹⁷⁾.

Quant à Christiaan, nous ne connaissons aucune composition de sa main. Nous ne voyons pas non plus qu'il ait discoursu, ce qu'il se proposait un instant de faire, sur la „Méthode pour faire des beaux chants" ¹⁸⁾, et nous croyons qu'il a fort bien fait de s'en abstenir: qui parmi nos lecteurs voudrait soutenir que pour faire „des beaux chants" il suffit d'être en possession d'une technique fort parfaite? Non omnia possimus omnes.

Il faut noter que Christiaan Huygens est sans doute ici sous l'influence de Merfenne qui, déjà dans „La Vérité des Sciences" de 1625, traite longuement ¹⁹⁾ la question de savoir „s'il est possible de faire un chant sur un sujet donné qui soit le plus beau de tous ceux qui puissent être faits sur le même sujet". Merfenne croit à cette possibilité tant „absolument" que „eu égard à l'auditeur". Il s'exprime comme suit ²⁰⁾: „Il est nécessaire d'entendre parfaitement la musique spéculative, & la rythmique, & de sçavoir quel temperament est le plus parfait de tous les temperamens possibles pour treuver, ou cognoître le chant le plus excellent de tous absolument parlant: & pour

¹⁵⁾ Ambros „Geschichte der Musik", Band III 1868, premier livre („Die Zeit der Niederländer"), p. 362. Le livre de Guicciardini parut en 1567 (note 3 de la p. 82 qui suit).

¹⁶⁾ L.c. p. 3.

¹⁷⁾ Il est vrai que fort peu des nombreuses compositions de Constantijn Huygens ont été conservées. Voyez sur ce sujet les Additions et Corrections à la fin du présent Tome.

¹⁸⁾ L. 5 de la p. 170 qui suit.

¹⁹⁾ P. 544—580.

²⁰⁾ P. 564.

sçauoir le chant le plus parfait eu égard au subiect, il faut sçauoir parfaitement la nature du subiect, & la plus excellente maniere par la quelle il peut estre exprimé: en fin pour cognoître le plus beau chant de tous eu égard à l'auditeur, & a son temperament, il faut sçauoir [ce qu'il juge théoriquement possible et par conséquent pratiquement réalisable dans les âges futurs] le degré du temperament, ou l'idiosyncrasie de l'auditeur, outre tout ce que nous auons dit iusques à present".

Il importe toutefois de remarquer que Huygens ne parle que d'une méthode pour faire „des beaux chants" et non pas, avec l'auteur de „La Verité des Sciences, contre les Septiques ²¹⁾ ou Pyrrhoniens" de faire les *plus* beaux chants ²²⁾. Descartes lui aussi, quoique nullement suspect de pyrrhonisme, était d'avis que Mersenne exagérait; dans sa lettre à Mersenne du 18 mars 1630 ²³⁾ il écrit: „generalement ny le beau, ny l'agreable, ne signifie rien qu'un rapport de nostre jugement à l'objet; et pource que les jugemens des hommes sont si differens, on ne peut dire que le beau, ny l'agreable, ayent aucune mesure determinée . . . ce qui plaira à plus de gens, pourra estre nommé simplement le plus beau, ce qui ne sçauoit estre determiné". Voyez encore sur ce sujet le dernier alinéa de la note 2 de la p. 82 qui suit.



²¹⁾ Lisez plutôt: Sceptiques.

²²⁾ Voyez aussi la p. 126 qui suit où Chr. Huygens écrit à propos des compositeurs: *nec præceptis ita confidere debent ac si geometriæ axiomata essent, sed multas exceptiones dari existiment.*

²³⁾ „Oeuvres", éd. Adam et Tannery, I, p. 82; et „Correspondance du P. Marin Mersenne" éd. M.^{me} P. Tannery et C. de Waard, II, p. 417.

A. LE TEMPO GIUSTO.

Il est croiable ¹⁾ que anciennement on chantoit incomparablement plus vite les notes qu'ils appellent longa brevis $\equiv \equiv$ qu'on ne fait a present. Car ils n'avoient apparemment que celles la, et le chant ne pouvoit pas estre si lent, jusqu'a continuer le son de la longa pendant 16 battements de pouls, comme l'on la fait durer aujourd'hui, et la brevis pendant 8 battements. Le chant d'Eglise n'est nullement si lent et si on l'escrivoit selon qu'il est usité, ce seroit par notes blanches a queue et par noires, qui a l'ancienne maniere s'appellent minima et semiminima, quoyque pour cette derniere ils n'en eussent point.

	max.	long.	brev.	femib.	min.	feminim. ²⁾
En marge:	\square	\equiv	\equiv	\diamond	\diamond	\uparrow

Je vois que certains compositeurs en ordonnant de jouer mesure lente, escrivent par des notes noires crochues, ce qu'autrement on escrivoit par des simples noires ³⁾. Et par là il pourra arriver a la fin que les croches tiendront le lieu des noires, et que pour avoir les 8^{es} de ces croches aussi bien qu'on a maintenant les 8^{es} des noires, on ajoutera encore une espece de quadruples crochues ⁴⁾. Et c'est de la mesme facon que peu a peu l'on a ralenti les temps des notes anciennes, en y ajoutant d'autres pour des mouvements plus vites.

Il est necessaire pour se faire entendre a la posterité et pour arrester une fois les temps des notes de les determiner par des mesures fixes, comme sont les pendules &c ⁵⁾.

¹⁾ Portefeuille Musica, f. 26.

²⁾ C.à.d. maxima, longa, brevis, semibrevis, minima, semiminima.

La „blanche à queue” ou „minima” (notre „blanche”) s'écrivait aussi \downarrow ; et la „noire” ou „semiminima” (notre „noire”) \downarrow ou \downarrow .

³⁾ Donc, au lieu de la semiminima \downarrow , la „crocheta” ou „fusa” \downarrow .

⁴⁾ La huitième partie d'une „fusa” s'écrivait \downarrow . Huygens observe que le remplacement de la „noire” par la „fusa” rendra nécessaire l'introduction d'un signe à quatre crochets.

⁵⁾ Mersenne parle comme suit dans le Corollaire III à la Prop. 18 du Livre III des Instrumens: „Il faut encore expliquer comment l'on peut garder la mesme mesure suivant l'intention du mesme compositeur, quoy qu'il soit mort ou absent. Ce qui est tres-aysé par le moyen d'une chorde suspendue, dont j'ay donné les usages ailleurs, car il suffit que le Compositeur ou le

Quirinus van Blankenburg⁶⁾, organiste de l'église wallonne à la Haye⁷⁾, qui connaissait Huygens fort bien⁸⁾, nous apprend dans une publication de 1732⁹⁾ avoir vu chez lui qu'il réglait effectivement le chant avec un pendule et avoir adopté lui-même ce réglage¹⁰⁾. Van Blankenburg connaît aussi le chronomètre, précurseur du métronome, de Loulié écrivant peu après la mort de Huygens¹¹⁾. Ce chronomètre n'est lui aussi qu'un simple pendule; il se meut devant une règle verticale divisée qui mesure la longueur, variable, de son fil.

Nous rappelons que, suivant Viviani, Galilée avait inversement constaté l'isochronisme des oscillations du pendule en ayant égard au „tempo della musica” (T. XVII, p. 3, note 3).

B. LES DIVERS MODES.

B. 1¹⁾. Qu'il y en a qui font d'opinion qu'il n'y a que deux modes l'un par b mol l'autre par b quadre²⁾. mais il [Mersenne] proteste pourtant de ne vouloir ôter les 12 modes. Je crois que c'est à cause du chant d'église³⁾.

Maistre de Musique marque la longueur de la chorde à la marge de sa composition, dont chaque retour monstre le temps de la mesure, etc.”

⁶⁾ 1654-1739.

⁷⁾ Depuis 1731 de la Nieuwe Kerk dans la même ville.

⁸⁾ T. IX, p. 567, lettre de Huygens de 1690.

⁹⁾ „Clavecimbel- en Orgelboek der Gereformeerde Psalmen en Kerkzangen. Met de zelve Noten die de Gemeente zingt tot vloeyende maatzangen gemaakt. In Stijl en Hoogte bepaald. Met Cieraden verzien. En met Kunst verrijkt”, L. Berkoske, la Haye, 1732. Voyez la préface („Bericht”), p. 3 (non numérotée). À la p. 5 l'auteur mentionne Huygens de nouveau; voyez la p. 129 qui suit.

¹⁰⁾ „zo stel ik daar op alhier een *reglement*, 't welk is, datmen zal de tijd meten door een Slinger (zo als ik bij den geleerden Huygens heb gezien) gemaakt van een fijne draad van 32 duimen, waar aan men zal hangen een pistool kogeltje wegende een Loot, 't welk eens aangestooten zijnde zo lang zal heen en weer gaan dat men drie of vier Psalmveerzen daar op uit zingen kan”. Ce „reglement” est déjà mentionné à la première page du livre, dans le „Privilegie” des États de Hollande et de Westfrise.

¹¹⁾ E. Loulié „Éléments ou principes de musique”, Amsterdam, E. Roger, 1698 (prem. éd. Paris, 1696). v. Blankenburg mentionne ce chronomètre aux p. 133 et 199 de ses „Elementa Musica etc.” de 1739. Comparez „Quirinus Gideon van Blankenburg” par Dirk J. Balfourt („Die Haghe”, Jaarboek 1938 onder redactie van Dr. W. Moll, 's Gravenhage, Mouton, 1938).

¹⁾ Portefeuille „Musica”, f. 28—30.

²⁾ b mol correspond à notre signe ♭, b quadre à notre signe ♮. b mol désigne la division de la quinte en une tierce mineure et une tierce majeure (mode mineur); b quadre celle en une tierce majeure et une tierce mineure (mode majeur).

³⁾ Il est vrai que Mersenne exprime, lui aussi, l'opinion qu'il suffit de distinguer deux modes; voyez ses considérations dans les „Traitez” cités dans la note 63 de la p. 120 qui suit: Livre III, Des Genres de la Musique etc., Prop. 18 p. 187: „Par où l'on peut conclure qu'il n'y a que deux Modes qui soient differens en leurs cadences, ou chordes principales, et que ceux qui réduisent tous les tons, et les Modes à deux sortes de modulations, ou de deductions, à scavoir au ♮ quarre,

Ces gens avoient raison, et je suis du même avis, à sçavoir qu'il n'y a que deux modes qui varient l'air et la nature du chant; l'un qui a la quinte basse divisée en forte que la 3 majeure soit en bas, et l'autre dans le quel la quinte a la 3 mineure en bas. le premier est exprimé par le ton de VMSV, et l'autre par le ton de RFLR⁴⁾.

Tous les autres tons authentiques⁵⁾ qu'ils appellent ne sont que des transpositions de l'un de ces deux, et pour ce qui est des plagaux ils ne différent point de modulation d'avec leur authentiques, ayants les mêmes finales dominantes et médiantes.

et au 2^e mol, ne parlent pas sans raison". Prop. 19, p. 190: „Determiner si l'on peut reduire tous les Tons et les Modes de la Musique au 2^e et au 2^e mol, et monstrier comme l'on peut chanter sans autre nuance, ou mutation, que celle de l'une de ces deux Clefs". La remarque de Huygens: „il proteste" se rapporte au Corollarium II de la Prop. 19 (p. 194): „Il ne faut pas que l'on s'imagine que ie vüille oster les 12 Modes". Comparez sur les 12 modes la note 3 de la p. 111 qui suit.

⁴⁾ Ailleurs (Portef. „Musica" f. 16v) Huygens dit moins clairement: Qu'il n'y a que 2 tons a les confiderer seuls, mais plusieurs par raport de l'un a l'autre. Les 2 sont celuy ou la 5^{te} d'en bas a la tierce majeure en bas, et l'autre qui dans cette quinte a la tierce mineure en bas. U, M, S, U; R, F, L, R. Mais les tons qui sont differents par raport sont comme U, M, S, U. R, F², L, R. qui confiderez a part sont tout a fait les mêmes. Nous imprimons ce passage avec le contexte à la p. 170 qui suit.

⁵⁾ La répartition des modes sacrés en modes authentiques et modes plagaux (dont nous ne ferons pas l'histoire) avait été systématisée par Glareanus dans son „Dodekachordon" (Bâle, 1547). Il distingue douze modes en tout, les identifiant, généralement à tort, avec les modes classiques grecs.

Son premier mode authentique est le soi-disant mode dorique (d, e, f, g, a, b, c, d). Les modes authentiques suivants, portant les nos 3, 5, 7 etc. sont le mode phrygien (e, f, g, a, b, c̄, d̄, ē), le mode lydien (f, g, a, b, c̄, d̄, ē, f̄) etc. A chaque mode authentique correspond un mode plagal qui commence plus bas d'une quarte, tout en ayant le même ton final (finalis). Les modes plagaux ont les nos 2, 4, 6 etc. Le mode 2 p.e. est donc suivant lui le mode hypodorique (A, B, c, d, e, f, g, a) avec le finalis d; de même le mode 4 est hypophrygique, etc.

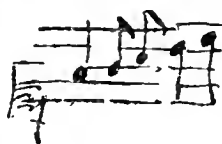
⁶⁾ Huygens adopte apparemment un ordre différent de celui de Glareanus. Avec Zarlino il choisit comme premier mode authentique le mode sacré ionien (c, d, e, f, g, a, b, c) auquel succèdent les autres modes authentiques numérotés 3, 5, 7 etc. (Zarlino leur donne les nos 1, 2, etc.). La table qui suit donne la correspondance avec l'ordre traditionnel.

Nom	Numéro chez Glareanus	Finalis	Numéro chez Huygens
dorique	I	d	III
phrygique	III	e	V
lydique	V	f	VII
myxolydique	VII	g	IX
ionien	IX	c	I
éolique	XI	a	XI

Je dis que des authentiques le mode premier VMSV⁶⁾, le 7^e FLVF, 9^e SCRS, ne différent en rien si non en hauteur, ce qui ne change rien en la nature de la modulation. Et de mesme que le 3^e RFLR, le 5^e MSCM, le 11^e LVML ne différent rien entre eux qu'en hauteur pareillement.

Mais il faut examiner premierement comment ils établissent la diversité des modes. C'est par les différentes espèces d'octaves qu'ils différentient les 6 modes authentiques, voyants que les demitons sont situez diversement dans l'estendue de ces octaves. car en prenant pour premiere octave celle qui commence par V, le troisieme intervalle et le 7^e sont les demitons. En l'octave de R le 2 et le 6 intervalle ont les demitons. En l'octave de M, le premier et le 5^e. En celle de F le 4^e et le 7^e. En celle de S le 3 et le 6^e, en celle de L le 2^e et le 5.

Voila 6 variations d'octaves en effect. Mais il faut voir si on se sert ou se peut servir convenablement de tous ces tons, en s'ajustant aux degrez dans lesquels l'octave est distribuée. Ce qui ne se trouuera point. Par exemple dans le ton de FLVF on ne doit pas chanter on n'a pas de du Ton. Il est n^e des Exemples mais ou il sevitent fort mauvais effect.



mais mettre le b mol ou ci, par ce que autrement quarte au dessus de la principale ou finale note vray que certains auteurs de Musique ont donne tous ces tons et de celui de FVF entre autres, ces passages, ou quand ils le mettent ils font un

Une preuve de ce que ce ton n'est pas usité c'est qu'estant compté le 5^e ton par ceux qui en mettoient 12⁷⁾ en commençant par celui de DLD, on y a mis le C^{2 8)} au lieu du \sharp et alors comme il ne différoit pas de celui de VSV qui estoit le 11 si non du haut au bas⁹⁾, il est arrivé que ce mesme 11^e a esté reputé en suite pour le 5^e ton d'église¹⁰⁾.

J'ay connu un excellent organiste qui disoit que le ton de RF \sharp LR avoit quelque chose de divin, et qu'il estoit bien différent de celui de VMSV. Et cependant si on transpose un air de ce ton icy en celui de RF \sharp LR, il n'y scauroit avoir aucune différence, par ce que tous les intervalles et accords sont de mesme si ce n'est seulement au S \sharp du ton VSV qui deviendra le C⁷ dans la transposition et ainsi la tierce MS \sharp fera

7) Voyez la numération de Glareanus.

8) Ceci est donc notre note Bes ou Si Bé mol.

9) ?

10) ?

$F^{\sharp}C^{\flat}$, mais ce n'est que le défaut du clavier qui manque du semiton mineur au dessus du L¹¹). Ce même défaut fait aussi que le ton de $RF^{\sharp}LR$ a un avantage sur celui de VSV en ce que celui-ci n'a point de semiton majeur au dessus de la note dominante S, ou l'autre l'a fort bien car il chante $LC^{\flat}L$, ce que dans le ton de VSV on ne sauroit faire, si non quand ce semiton est adjoint¹²). Mais ces additions de cordes ne rendent pas les tons autres¹³) et ne regardent que les instruments qui ont les tons fixes, et non pas les voix ni plusieurs autres instruments qui suppléent aussi bien que la voix toutes ces cordes adjointes.

Comme nous avons montré des inconvenients au prétendu ton de FVF ainsi il y en a encore a d'autres comme en celui de MCM, ou l'on seroit obligé de passer par le F qui ne vaut rien, faisant le triton contre la note dominante¹⁴). C'est pourquoy ce ton de MCM ne peut estre bien pratiqué qu'en passant par F^{\sharp} au lieu de F. Et alors il est de même nature que celui de RFLR. Ou il faut savoir pourtant que sur les orgues et clavecins il y a de certains semitons qui ne sont pas justes dans le ton de MSCM. Car il n'y a point de chorde qui représente le S^{\sharp} du ton RFLR. Ni aussi qui en représente le V^{\times} ; les intervalles de CC^{\flat} et MM^{\flat} étant de semitons mineurs qui devroient estre majeurs¹⁵). Cela fait que sur ces instruments ce ton de MSCM et

¹¹) Dans le système du ton moyen suivant lequel, ici comme dans tout ce qui suit, les instruments sont censés être accordés, il y a deux semitons différents. En effet, f étant le rapport caractéristique

des longueurs des cordes donnant la quinte, donc $f = \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$, on obtient dans la gamme chromatique telle qu'elle a été déduite dans la „*Divisio Monochordi*” (p. 52 qui précède, note 4), les intervalles suivants, donnés ici comme rapports des fréquences des vibrations:

Tons	C	Cis	D	Es	E	F	Fis	G	Gis	A	Bes	B	c
Intervalles des tons avec C	1	$\frac{25}{16}f$	$\frac{5}{2}f^2$	$4f^3$	$\frac{5}{4}$	$2f$	$\frac{25}{8}f^2$	$5f^3$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{2}f$	$4f^2$	$\frac{25}{4}f^3$	2
Intervalles des tons entre eux		$\frac{25}{16}f$	$\frac{8}{5}f$	$\frac{8}{5}f$	$\frac{25}{16}f$	$\frac{8}{5}f$	$\frac{25}{16}f$	$\frac{8}{5}f$	$\frac{25}{16}f$	$\frac{8}{5}f$	$\frac{8}{5}f$	$\frac{25}{16}f$	$\frac{8}{5}f$

Ici l'intervalle $\frac{25}{16}f$ est un semiton mineur, et $\frac{8}{5}f$ un semiton majeur.

On voit que E-Gis est une tierce majeure juste, composée de deux semitons majeurs et de deux semitons mineurs, tandis que Fis-Bes consiste en trois semitons majeurs et un semiton mineur.

¹²) En effet, dans l'échelle de D la note Bes surpasse la dominante A d'un semiton majeur, tandis que dans l'échelle de C la note Gis surpasse la dominante G d'un semiton mineur.

¹³) La portée de cette remarque nous échappe.

RFLR paroissent aucunement differents et que le premier a quelque chose de plus plaintif et de plus tendre, a causé des cadences que se font par ces demitons mineurs, et aussi quelque chose de triste a causé de quelques consonances qui en deviennent un peu fausses¹⁶⁾, et de ce qu'on y emploie le triton au lieu de la fausse quinte¹⁷⁾.

Mais la voix ajuste tout cela, au moins quand on chante sans estre accompagné de quelqu'un de ces instruments a tons fixes. et dans ceux cy il ne tient qu'à nous d'y adjoûter les chordes necessaires en coupant les seintes.

Quoyque pour ce qui est des cadences, celles par les semitons mineurs soient plus agreables que par les majeurs, à mon oreille. Et de mesme j'aime à employer le triton de M^bL au lieu de la fausse quinte R[#]L¹⁸⁾, en le sauvent comme la fausse quinte, scavoir de la tierce MS.

B. II¹⁹⁾ Les tons transpofez ont souvent quelque chose de plus grave que les naturels comme celuy de C^b mol plus que celuy de D; ou de plus tendre comme celuy de E plus que celuy de D, ce qui n'arrive pas parce que l'un est plus bas d'un ton et l'autre plus haut que celuy de D mais plustost par de certains semitons mineurs au lieu de majeurs

¹⁴⁾ F—B est un triton (rapport $\frac{25}{8}f^2$) ou quarte augmentée, composée de trois semitons majeurs et de trois semitons mineurs.

¹⁵⁾ En effet, Gis est située ici à la distance d'un semiton majeur au-dessous de la dominante, tandis que Cis est située à la même distance au-dessous de la tonique. Mais dans l'échelle de E, Bes et Es sont situées, respectivement au-dessous de la dominante et de la tonique, à la distance d'un semiton mineur.

¹⁶⁾ Lorsque F est remplacée par Fis, la tierce majeure E—Gis de l'échelle de D est transposée en Fis—Bes, ce qui n'est pas une tierce majeure juste, et la quinte E—B en Fis—Dis, ce qui n'est pas une quinte juste.

¹⁷⁾ On entend par fausse quinte la quinte diminuée qui constitue le complément du triton par rapport à l'octave; c'est donc un intervalle $\frac{16}{5}f^2$, composé de quatre semitons majeurs et de deux semitons mineurs.

La remarque de Huygens ne doit apparemment pas être entendue comme désignant une vérité générale. Dans l'échelle de D on a les intervalles-tritons D—Gis, F—B, G—Cis lesquels, transposés en E, deviennent les intervalles E—Bes, G—Cis et A—Dis, dont le premier et le dernier sont des fausses quintes, tandis que l'intervalle E—Bes, une fausse quinte, est transformé en Fis—C, également fausse quinte. Huygens n'entend sans doute parler que de quelques intervalles fort usités tels que la fausse quinte Cis—G qui est transformée par la transposition dans le triton Es—A.

¹⁸⁾ Es est inférieur à E d'un semiton mineur, tandis que Dis est supérieur à D d'un semiton mineur et par conséquent inférieur à E d'un semiton majeur. Il en résulte que Es—A est un triton et Dis—A une fausse quinte.

¹⁹⁾ Portef. „Musica”, f. 63r.

dans les cadences et dans de certains intervalles et accords. Quoy que dans les accords cela fasse le plus souvent un mauvais effect; et pour y remédier on ajoute d'autres feintes au clavier comme dans le ton qu'on appelle de C^b mol, la feinte de L^b sur celle de S^{\sharp} . Mais il est certain que si l'on se veut alors servir toujours de cette feinte ou elle devrait être selon le ton naturel, le ton transposé ne différera en rien du naturel en D si non qu'il sera plus bas d'un ton. et que le V^{\sharp} sera trop bas d'une cinquième de ton pour faire la 3^e majeure avec le F, comme il devrait, ainsi que M^b avec S, dans le ton de D, font cette 3^e majeure.

En jouant en E^{\flat} il est bon de faire les cadences de MM^bM , qui ont quelque chose de plus tendre et plus plaintif, que de $M\bar{R}^{\sharp}M$ quand la feinte R^{\sharp} est ajoutée au clavier. Mais dans des accords, sur tout à la dernière note d'une cadence ou la basse est C, le R^{\sharp} vaut mieux.

Les tons transposés servent encore aux compositeurs pour faire plus de variété, parce qu'en se promenant en suite dans des modes empruntés, ils en trouvent tels qui sont aîsez et naturels, qui autrement seroient rudes ou impraticables du moins sur le clavier ordinaire, si la composition eût été dans le ton naturel.

*B. III*¹⁾. 1586. Artusi. *Præcepta quædam in compositione symphonici cetera ex...*²⁾

In definiendis modis Zarlino sequitur, cum apud vetustiores primus tonus diceretur RLR ³⁾.

Si de genere diatonico solo agatur posset locum habere modorum numerus quem dicunt, etsi coacta omnino melopœa sit futura, ne quidem adhibito B fa⁴⁾ (sic enim diatessaron species constituunt) ut non possint in tono VSV ^{2 3)} descendere sepe per C, L propter propinquitatem antecedentis F, sine aurium injuria. adjuncto autem B fa jam non erunt 6 authentici, idem erit enim VSV quod FVF . Et RLR quod SRS &c. nam plagios non puto in hanc divisionem recipiendos etsi aliquid differentie adferant.

¹⁾ Portef. „Musica”, f. 32—33. Les remarques de Huygens se rattachent à celles de la Pièce B, I qui précède.

²⁾ La Pièce se rapporte à l'ouvrage d'Artusi: „L'arte del contrapunto, ridotta in tavola” (2 vol. 1586—1589, réimpr. en 1598). Giovanni Maria Artusi (né vers 1545, chanoine de l'église S. Salvatore à Bologna, mort le 18 août 1613) publia encore e.a. en 2 vol. (1600—1603) „L'Artusi, ovvero delle imperfettioni della moderna musica”.

³⁾ Voyez la note 6 de la p. 70 qui précède.

⁴⁾ Par B fa il faut entendre la note Bes dans l'échelle de F: B signifie mol, fa le quart de la tonique (ici F), donc notre note B.

⁵⁾ Les demitons chromatiques ont déjà été mentionnés à la p. 39 qui précède.

At nunc cantus noster non est diatonicus simplex sed chromaticis semitonij alijsque insuper auctus ⁵⁾). Horumque ope quilibet modus a qualibet chorda diatonica fere incipere potest, id est infimum sonum inde ordiri.

Sed melius ex divisione gemina diapentes modorum differentia sumitur, quarum in altera tertia major inum locum obtinet, altera tertia minor, quam ex divisione diapas-son ut fieri solet ⁶⁾). Suntque etiam illae diapentes divisiones altera harmonicae proportionis altera arithmeticae ⁷⁾). Adeo ut revera duo tantum sint modi ex ista divisione originem habentes.

Ad demonstrationem sumo sonis omnibus acutioribus factis, dummodo eadem quae prius maneant intervalla modum non mutari, quod nemo negaverit, cum naturam cantus nihil immutet; nam alioqui puer ac vir eandem oden canentes diversos modos tenere dicendi essent, quod alter altius altero omnes tonos efferret. Hoc etiam Ptolemaeus et alij viderunt. Licet aliqui modos antiquorum hac sola in re inter se discrepasse existiment quod non est credibile.

Iidem ergo sunt modi VMSV, FLVF, SCRS, RF[#]LR, MS[#]CM, LV[#]ML. Item ijdem RFLR, MSCM, SC^bRS, LVML, VM^bSV, quibus et FL^bVF annumerabitur si modo chordae quaedam quas enarhomias [lisez: enharmonias] vocant instrumentis adjunctae sint.

Numquid enim ob defectum chordarum diversos modos dicent, quod alij tali semitonia careant, alij alio. Velut si tonum VMSV diversum ponant ab isto RF[#]LR quod hic post dominantem L habeat semitonium majus sursum, alter non habeat hoc sed semitonium minus. Atqui vox hominis et instrumenta quaedam fidibus instructa, le violon, omnia semitonia majora minoraque pro lubitu exprimunt. Male igitur ex paupertate Organorum suorum et Cythararum (Clavecins) modis multiplicitatem inducunt.

En marge: Nec ulla ode cantilenia fere nunc extat quae saltem non B fa utatur et semitonij in clausulis. nisi Bar. Le sens de cette remarque ne nous est pas parfaitement clair. Apparemment Huygens veut dire que par suite de l'extension donnée au système diatonique par l'introduction des tons chromatiques il n'existe pour ainsi dire plus aucun chant ne faisant pas usage de l'abaissement B—Bes et de demitons dans les clausules; mais nous ne pouvons pas dire avec certitude ce qu'il désigne par „Bar”. Nous devons à M. Jos. Smits van Waesberghe l'hypothèse qu'il entend parler de „barytonantes toni”, c.à.d. de tons de la basse, parce que ceux-ci sont rarement sujets à des élévations ou abaissements accidentels.

⁶⁾ En marge: Male constituunt species diapas-son, absque B fa, cum semper apud antiquos pertinuerit ad genus diatonicum quando tetrachordo synem. utebantur.

On trouve en effet le ton mentionné comme trite de la tétrachorde des conjointes.

⁷⁾ Comparez les notes 7 et 8 de la p. 79.

Quod si instrumentis hisce fides quæ defunt superaddantur, ut in quibusdam factum videmus, jam nulla cantilena non multimodis transponi poterit, cum omnes chordæ diatonicæ sursum ac deorsum habeant consonantias omnes, adeo ut manifesto appariturum sit, omnem modorum differentiam ad geminam divisionem diapente reduci, quod vocant B quadratum ac B molle⁸⁾. Et hoc ita se habere non nulli Practici sentiunt etsi nemo adhuc quod sciam scripto prodiderit.

Est autem differentia ingens quæque aures omnium maxime afficit, istorum quos diximus duorum modorum, quorum prior alacrior incitatio multò, alter gravior modestior⁹⁾.

Differentia authenticorum et plagiorum ut vocant¹⁰⁾, exigua est, cum quilibet horum eandem finales, dominantes, mediantes habeat, quas authent. ut nihil aliud sit plagijs quam authent. in grave productus vel quandoque in acumen quo quidem non mirum est non multum variari melodiam.

C. DIFFÉRENCES DE HAUTEUR, PAR RAPPORT AUX TONS DES INSTRUMENTS, RESULTANT DE LA JUSTESSE DU CHANT.

Il y en a¹⁾ qui croient que le chant de la voix est plus parfait que celui de tout autre instrument et que la voix chante tous les intervalles des tons et tous les accords justes en quoy je ne suis pas de leur avis²⁾. Il est vray qu'elle est de nature à se pou-

⁸⁾ Voyez la note 2 de la p. 69 qui précède.

⁹⁾ Ici suit dans le manuscrit l'alinéa biffé suivant:

Sed si duos tantum hos admittamus modos quomodo illud significabimus quod dicunt transgressionem in modum alium seu mutationem, quæ in eadem ode eleganter sepe usurpatur. Hujus gratia, Tonos sane 11 vel 12 si velint retineamus ut respectu cujuslibet qui cantilenæ propriam diapason terminat alium designare possimus, hosque distinctionis gratia Tonos non vero modos appellemus. Ita nonnunquam mutatum Tonum dicemus non autem modum ut cum ex RFLR in MSCM transimus vel contra, aliquando vero Modum, ut cum ex VMS abimus ad VM^bSV, aliquando vero et Tonum et modum, ut cum ex VMSV mutamus in RFLR.

On lit en outre en marge:

Quis in tono SRS incedit per F. Ergo non facit alium modum ista positio semitonij.

Quis in tono RFL incedit per M^b. Ergo nec recte per F in MCM.

¹⁰⁾ Voyez la note 5 de la p. 70.

¹⁾ La Pièce est empruntée au portef. „Musica“, f. 30 v.

voir accommoder un peu au besoin, mais quand cela arriveroit quelque fois il est bien rare d'en trouver qui le plus souvent ne s'éloignent bien d'avantage de l'intonation véritable que les orgues et clavecins ne manquent des véritables consonances, qui n'est qu'un quart de comma³⁾.

D'ailleurs quand bien la voix chanteroit les intervalles de quintes et quartes très justes, elle s'écartera nécessairement en ce faisant du véritable ton. Car par exemple en chantant $V\acute{S}\grave{R}\grave{L}\grave{M}\grave{V}^+$, ce M est un comma entier plus haut qu'il ne devoit être pour faire la tierce $M\grave{V}$ juste supposé qu'on ait chanté juste la quinte VS, la quarte $S\grave{R}$, la 5^e RL et la 4^{te} LM. de sorte qu'il arrivera que pour rendre la tierce juste l'on chantera le dernier V un comma plus haut que le premier, ou bien il faut que la voix ne chante pas les intervalles des consonances dans la justesse⁵⁾. Et si on chante encore en suite par les mêmes intervalles, on haussera encore d'un comma, et ainsi tousjours, de sorte que les voix sans être réglées par quelque instrument s'égareront nécessairement et feront quelques intervalles et accords faux et cela se voit aussi par l'expérience. Puisque l'on trouve bien souvent que les voix ont haussé ou baissé d'un demiton ou d'avantage, au bout d'une pièce qu'on a chantée sans accompagnement d'instruments. La cause du baissément est quand on monte souvent par quartes et qu'on descend par quintes ou par tierces mineures. Ainsi quand on chante par des notes lentes

$V\acute{F}\grave{R}\acute{S}\grave{M}\grave{L}\grave{R}\acute{S}\grave{S}\acute{V}$

et qu'on le repete quelquefois de suite la voix devra avoir notablement baissée en l'essuyant contre quelque instrument⁶⁾. mais si on chante vite, je trouve que le souvenir de ce premier V retient la voix dans le ton, et par conséquent luy fait dire un peu fausement les intervalles des consonances. Et il y a des voix qui penchent naturellement à baisser et d'autres à hausser.

²⁾ Nous avons parlé de ce début dans notre Avertissement.

³⁾ Voyez sur cet écart la „Divisio Monochordi” qui précède.

⁴⁾ L'accent / désigne une montée, l'accent \ une descente.

⁵⁾ Les notes chantées sont C G D A E C,

les intervalles justes $\frac{3}{2} \frac{3}{4} \frac{3}{2} \frac{3}{4} \frac{4}{5}$, fractions dont le produit (somme des intervalles) est $\frac{81}{80}$.

En revenant à C on est donc monté d'un comma.

⁶⁾ Voir la note 6 de la page suivante.

D. LES ANCIENS CONNAISSAIENT-ILS LE CHANT POLYPHONE?

D. I¹⁾) Veteres concentu per consonantias usos non prorsus rejicit [Salinas]²⁾). Bedæ testimonium adfert qui ante 700 annos et amplius vixerit³⁾). Argumentum etiam affert hoc quod de consonantijs tam multa scripserint. Sed ego ad summam usitatum illis existimo quod faux bourdon⁴⁾) appellant. Argumenta sunt hæc: quod nullam ejus mentionem auctores veteres musici faciunt, cum debuerint plurimum in hac re posuisse operæ. quod non centenis locis apud alios auctores antiquos de symphonix usu appareat. quod diapason in 12 intervalla dividerint⁵⁾) ut ad concentum plane inepta essent.

- 6) Les notes chantées sont G F D G E A D G G C
et les intervalles justes $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{4}{3}$, dont la somme est $\left(\frac{80}{81}\right)^2$.
Il y a donc eu une descente de 2 commas.

Huygens revient sur ce sujet dans ses notes sur les „Harmonika” de Ptolémée dans l’édition de Wallis; voyez la p. 101 qui suit; ce n’est pas cependant d’une remarque de Wallis qu’il s’agit en ce dernier endroit, mais d’une observation de Zarlino.

- ¹⁾ Portef. „Musica”, f. 27—28. La Pièce D I fait partie des notes de Huygens sur le „De Musica” de Salinas (voyez la note 7 de la p. 45 qui précède).
²⁾ C’est dans le Cap. XXV du Lib. V (p. 284) que Salinas traite la célèbre question „fuerintne apud veteres . . . cantus plurium vocum”. Il n’ignore pas qu’on doute généralement de l’existence du chant polyphone chez les anciens, puisqu’aucun auteur classique n’en fait mention: lorsque plusieurs personnes chantaient ensemble le chant aurait été ou homophone ou alternatif. Pour sa part il regarde comme un argument remarquable pour l’existence du chant polyphone la grande application des auteurs classiques à la théorie des consonances; en outre il fait appel à un endroit d’Aristote (Politica, VIII, 5): τὴν δὲ μουσικὴν πάντες εἶναι φασιν τῶν ἡδίστων, καὶ ψᾶλλον οὔσαν καὶ μετὰ μελῳδίας.
³⁾ Salinas cite Bède disant que dans son temps la musique sacrée polyphone était en usage. Nous ne voyons pas qu’il le cite comme partisan de l’existence du chant polyphone dans l’antiquité, comme Huygens semble vouloir le dire, ni que Bède ait été de cet avis.
Beda Venerabilis, moine bénédictin, né en 673 en ou auprès de Yarrow dans le diocèse de Durham, mort à Yarrow le 26 mai 735, est l’auteur d’ouvrages sur l’histoire, l’arithmétique, la chronologie etc. Le plus connu de ses œuvres est la „Historia ecclesiastica gentis Anglorum”, dans lequel il parle en plusieurs endroits du chant d’église.
⁴⁾ Nous avons parlé du faux-bourdon dans l’Avertissement qui précède (p. 65). Nous y renvoyons à la p. 117.
⁵⁾ L’école d’Aristoxène — comparez la note 9 de la p. 32 qui précède — connaît une division de l’octave en six tons entiers égaux, lesquels consistent chacun en deux semitons également égaux entr’eux. Ptolémée combat cette division dans les Cap. 10 et 11 du Lib. I des „Harmonika”. Voyez aussi R. Westphal „Aristoxenus von Tarent, Melik und Rhythmik des klassischen Hellenentums”, Leipzig 1883, p. 251 et suiv. Suivant la théorie d’Aristoxène un ton entier est le double d’un demiton, une quarte vaut $2\frac{1}{2}$ tons et une quinte $3\frac{1}{2}$ tons. Comparez encore sur Aristoxène et ses sectateurs la note 16 de la p. 113 qui suit.

Sed dicet aliquis syntonum Ptolemæi⁶⁾ convenire cum nostra diatonica divisione. Resp. atqui cum ceteræ omnes ipsius divisiones⁷⁾ non possent ad concentum aptari, dixisset utique disparem esse rationem harum atque illius divisionis, multoque præstare imo solam sequendam illam syntoni⁸⁾. Jam illud quod ditonum utrumque et hexachordon non essent consonantiarum loco, cum eorum usus adeo sit necessarius, ut nullo momento a concentibus ditonus absit. Etsi enim in Ptolemæi syntono habeatur ditonum et semiditonum cum hexachordo utroque⁹⁾, ac videri possit dubitasse an non et hæc consonantia essent intervalla nusquam tamen id pronunciasse reperitur, nec alias quam Pythagorici recensuit diapason diapente diatessaron cum illorum repetitionibus¹⁰⁾.

⁶⁾ Dans le τετραχρδον διατονικον συntonon (tétrachorde diatonique synton ou tendu) l'intervalle de la quarte est divisé en un ton mineur, un ton majeur et un semiton majeur d'après la formule $\frac{4}{3} = \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15}$ (Ptolémée, Harmonika I, Cap. 15, éd. Wallis, Oxford 1682, p. 76; éd. Düring, Göteborg 1930, p. 37). Ceci conduit à une division de l'octave

	C	D	E	F	G	A	B	c
avec les intervalles	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	
		quarte				quarte		
		ton disjonctif						

qui ne se distingue de l'octave du système harmonique naturel que par l'interversion des deux premiers intervalles.

⁷⁾ Les autres tétrachordes envisagés par Ptolémée sont

enharmonium	$\frac{4}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{23} \cdot \frac{46}{45}$
chroma molle	$\frac{4}{3} = \frac{28}{27} \cdot \frac{15}{14} \cdot \frac{6}{5}$
chroma intensum	$\frac{4}{3} = \frac{22}{21} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{7}{6}$
molle diatonum	$\frac{4}{3} = \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{21}{20}$
medium molle diatonum	$\frac{4}{3} = \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{28}{27}$

⁸⁾ En marge: Enarhomij [sic] chordæ quædam etiam ineptæ ad symphonias.

⁹⁾ On a en effet $\frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{5}{4}$ (tierce majeure); $\frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} = \frac{6}{5}$ (tierce mineure); $\frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{3}$

(sixte majeure); $\frac{16}{15} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} = \frac{8}{5}$ (sixte mineure).

¹⁰⁾ Dans l'Avertissement aux Pièces I (Théorie de la consonance) nous avons exposé (p. 26—27)

Quod de consonantijs scripsere adeo multa id vel ob usum istius faux bourdon ¹¹⁾ fecisse dici possunt, vel eo quod consonantium intervallorum ratio vel maxime sit habenda, etiam absque concentus usu; quia neque monodicus cantus nisi per intervalla consona fieri potest. nam si inter duos sonos consonos dissonus unus interjicitur is ad consonum gradus esse debet.

Etiam hoc quod divisione temporum carebant symphoniae usum impediabat, non enim nisi simul omnes easdem syllabas proferre poterant, vel instrumentis canentes sonos ejusdem temporis, quod si nunc fiat quantum gratiae peribit symphonijis.

In monumentis quæ extant monodici cantus inveniuntur, polyphoni vero diversarum partium nulli. nam illa της κρουσεως σεμνα jam satis constat non significasse diversos sonos citharæ ac vocis ¹²⁾.

D. II ¹³⁾ Recte existimat [Wallisius] monodicam fuisse musicam antiquam omnem, sed rationem nullam adfert, cum tamen sint plurimæ. 1° Nempe ipsa systemata tam varia, atque omnia ijs intervallis disposita, ut consonantias non multas contineant, certè quamplurimis ad polyodiam necessarijs destituantur, quod ex numeris, quos in-

les raisons qui nous portent à admettre que Ptolémée n'a pas seulement douté „an non et hæc consonantia essent intervalla”, mais que même „id pronunciasse reperitur”, ou du moins, pour être plus exacts, „id non negasse reperitur”. Voyez toutefois l'opinion de Mersenne exprimée aux pages citées et plus clairement encore dans le passage que nous citons dans la note 21 de la p. 114 qui suit.

¹¹⁾ Voyez la note 4 de la p. 78.

¹²⁾ Archiloque de Paros (7^{ème} siècle av. J. Chr.) passe pour l'inventeur d'une nouvelle façon de κρουσις (accompagnement du chant). Plutarque p. e. écrit au Cap. 28 de son „De Musica”: τῶν ἱαμβίων τὸ τὰ μὲν λέγεσθαι παρὰ τῆς κρουσιν τὰ ὀδεῖσθαι, Ἀρχιλόχῳ γὰρ κατὰδεῖξαι. D'autre part Plutarque écrit au Cap. 14 du même traité: σεμνὴ ὅν κατὰ πάντα ἡ μουσικὴ, θεῶν εὐσημεῖα ὄσα. Si nous réussissons à déceler l'auteur de l'expression της κρουσεως σεμνα, nous en ferons mention dans les Additions et Corrections.

Alfred et Maurice Croiset dans leur „Histoire de la Littérature grecque” Vol. II, Paris, Fortemoing et C^{ie}, 1914 s'expriment à ce propos comme suit (Chap. IV „Poésie iambique”, p. 179): „Il est probable que l'ancienne musique accompagnait le chant note pour note; la réforme dut consister à laisser au jeu des instruments une certaine indépendance d'allure à côté du chant; il y eut désormais deux mélodies simultanées au lieu d'une; ces mélodies tour à tour se séparaient et se rejoignaient. . . . Il reste à vrai dire beaucoup d'obscurité sur la nature exacte de cette réforme musicale attribuée par l'auteur du *De Musica* à Archiloque”. On voit que l'opinion de Huygens n'est pas généralement acceptée. Voyez encore ce qu'il dit sur ce sujet aux p. 99 et 100 qui suivent.

¹³⁾ Portef. „Musica”, f. 22. La Pièce D II fait partie d'une série de notes de Huygens se rapportant à l'„Appendix, De Veterum Harmonica ad Hodiernam comparata” ajouté par Wallis à son édition des Harmonika de Ptolémée (Claudii Ptolemai Harmonicorum Libri Tres. Ex Codd. Mss. undecim, nunc primum Græce editus, Oxonii, E. Theatro Sheldoniano, An. Dom. 1682) A la p. 316 Wallis discute la question de la musique classique polyphone.

signi labore restituit ¹⁴), facile evincitur. 2° Quod ditonum et semiditonum pro consonantijs non habuerint, quæ nunc in polyodijs fere semper unam partem e tribus suppleant absque quo harmonia completa non censetur. 3° Quod de servanda temporum mensura, ut nunc sit, nihil præscripserint, sed tantum rythmum pedibus metricis effimarint. Nam absque illa temporis visibili notatione non poterat partium diversarum concentus regi, præsertim si stante aliquo tono plures toni responderent. 4° Quod nihil prorsus apud tot veteres authores de ejusmodi composito concentu memoriæ proditum reperiatur, nec nomina diversarum partium, quas nunc Bassum, Tenorem, Altum, Superius vocant. 5° nullum compositionis talis præceptum tradiderint, velut nunc habemus quod duæ diapente consequentur poni non debent ¹⁵) et alia plurima de vetitis processibus. 6° quod nihil de dissonantiarum usu scripserint quæ plurimum elegantiae concentibus adferunt.

Quod autem nonnulli veterum admiratores, sed musicæ fere ignari cum alicubi mentionem factam inveniunt vocum diversarum concinentium aliquid inde se conficere arbitrantur, id ejusmodi fere est, quale illud de pyxide nautica quam, ex Plauti quodam loco ubi de versoria capienda legitur, jam ab illo tempore cognitum fuisse suspicantur ¹⁶). quale etiam de Telescopij inventionem quam a 300 annis extitisse probant, ex pictura scilicet in veteri MS. reperta, ubi quidam per tubum in cælum intuetur ¹⁷). Non cogitant scilicet nec hi, nec qui concentibus istis antiquis favent, mille locis apud scriptores veteres earum rerum commemorationem extitutam, si quidem in usu fuissent illorum ætate.

¹⁴) Ceci se rapporte évidemment aux tables d'intervalles du Lib. II des Harmonika.

¹⁵) Voyez sur ce sujet la note 119 de la p. 129 qui suit.

¹⁶) Plaute, Mercator, vs. 875: „Huc secundus ventus nunc est: cape modo vorsoriam”. De même dans la comédie Trinummus, vs. 1026: „cape vorsoriam”. Nous citons d'après le texte de „Titi Macci Plauti Comœdiæ”, ed. G. Goetz, Fr. Schoell, Lipsiæ, Teubner, IV, 1906 et VII, 1907. La „vorsoria” est apparemment une voile, ou plutôt une corde attachée à la voile, dont le renversement change le sens du parcours du vaisseau. Tandis que le „vorsorium” (comparez la l. 6 de la p. 349 du T. XVII), mot qui se trouve dans le „Tractatus de Magnete” de 1600 de Gilbert, désigne la boussole telle qu'elle se trouve dans la „pyxis nautica”.

¹⁷) D'après J. B. Cysatus dans son ouvrage „De loco, motu, magnitudine et causis cometæ, qui sub finem anni 1618. et initium anni 1619. in cælo fulsit”, Ingolstadii, ex typogr. Ederiano, 1619. L'auteur dit à la p. 76 (Cap. VII): „... fuisse enim vsum Tubi Optici antiquis etiam Astronomis familiarem testatur liber vetustissimus in Bibliotheca celeberrimi Monasterii Scheurensis scriptus ante 400. annos, quo in libro inter cætera schemata etiam Astronomus per Tubum Opticum in cælum intentum sidera contemplanis visitur”.

E. MÉRITE DES „BELGÆ”, SUIVANT GUICCIARDINI, DANS L'ÉTABLISSEMENT OU RÉTABLISSEMENT DU CHANT POLYPHONE ¹⁾).

Bannij Zangbericht ²⁾).

Omnes illos qui primi concentuum doctrinæ operam dedere, atque e tenebris eruerunt, fuiffe Belgas scribit Guicciardinus in descriptione Belgij ³⁾).

Voyez aussi sur l'invention du chant polyphone la note 89 de la p. 124 qui suit.

¹⁾ La Pièce est empruntée à la f. 27r du portefeuille „Musica”.

²⁾ Joannes Albertus Bannius, né à Haarlem en ou vers 1598, mort dans la même ville vers la fin de juillet ou au commencement d'août 1644, fut prêtre catholique et grand ami de Constantyn Huygens père. Consultez aussi sur lui la note 6 de la p. 547 du T. II, ainsi que les „Correspondance et Oeuvre musicales de Constantin Huygens” publ. par W. J. A. Jonckbloet et J. P. N. Land, Leiden, Brill, 1882, p. XXXVI et suiv., et l'article de J. P. N. Land „Joan Albert Ban en de theorie der Toonkunst” dans le „Tijdschrift der Vereeniging voor Noord-Nederlands Muziekgeschiedenis” I et III de 1891.

Le „Nae-Reden ofte Kort Zangh-bericht” fait partie de l'ouvrage dédié à Const. Huygens „Zangh-Bloemzel van Ioan Albert Ban, Haerlemmer; dat is, Staeltjes van den zinroerenden zangh; met dry stemmen, en den Gemeene-Grondt-stem. Neffens een kort Zangh-bericht, ten dienste van alle Vaderlandtsche Zangh-lievers”, t'Amsterdam, bij Paulus Matthijsz. Voor Louis Elzevier op 't Water, inden Olm-boom. 1642. Cité par Jonckbloet et Land l.c. p. XLIX et suiv. (Zangh-Bloemzel) et CXXXV et suiv. (Zangh-bericht).

Dans le „Zangh-bericht” Bannius parle e.a. (fort brièvement) du „zamenzangh van meerder stemmen”.

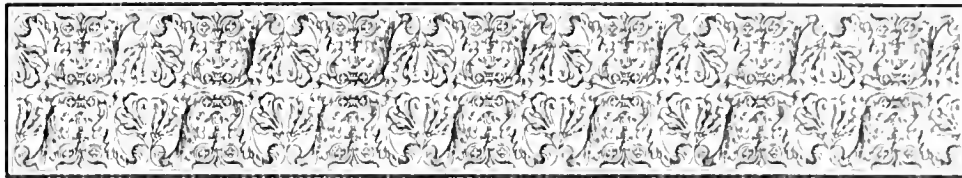
L'article de Land de 1891 fait voir que Constantyn Huygens considérait son ami comme trop doctrinaire, que, tout en appréciant ses connaissances théoriques, il ne l'estimait pas fort comme compositeur.

³⁾ „Descrittione di M. Lodovico Guicciardini Gentilhuomo Fiorentino, Di Tutti i Paesi Bassi, Altrimenti Detti Germania Inferiore. Con tutte le carte di Geographia del paese, & col ritratto al naturale di molte terre principali; Riveduta di nuouo, & ampliata per tutto la terza volta del medesimo autore. Al Gran' Re Cattolico Don Filippo d' Austria. Con amplissimo Indice di tutte le cose piu memorabili”. In Anversa, Apresso Christofano Plantino Stampatore Regio, MDLXXXVIII (la première édition est de 1567, la deuxième, amplifiée, de 1581). Plus tard il y eut encore de nombreuses éditions.

A la p. 3 l'auteur dit: „Attribuiscesi gloria particolare alla Belgia, d'essere stata inventrice di piu cose memorabili . . . la Belgia essere stata restauratrice della Musica, & inuentrice di diuersi strumenti musicali”. A la p. 42 il écrit: „Questi sono i veri maestri della Musica, & quelli che l'hanno restaurata & ridotta a perfettione, perche l'hanno tanto propria & naturale, che huomini, & donne cantan' naturalmente a misura, con grandissima gratia & melodia, onde havendo poi congiunte l'arte alla natura, fanno & di voce, & di tutti gli strumenti quella proua & harmonia, che si vede & ode, talche se ne truoua sempre per tutte le Corti di Principi Christiani”. Il donne les noms de 28 „musici eccellenti” en ajoutant qu'il y a encore „molti altri tutti maestri di Musica celeberrimi, & sparsi con honore & gradi per il mondo”.

IV.

NOTES SE RAPPORTANT À DES ÉCRITS
DE MUSICOLOGUES ANCIENS.



Avertissement.

La distinction que nous faisons entre les notes se rapportant à des écrits de musicologues anciens d'une part, modernes de l'autre, est parfois plus ou moins arbitraire, puisque les musicologues modernes traitent souvent des écrits des musicologues anciens et que leurs remarques appartiennent donc aux deux catégories à la fois.

C'est ainsi que l'ode de Pindare, rapportée par Kircher, figure au § 1 de la présente Pièce et qu'il en est de nouveau question dans le § 5 de la Pièce suivante. Voyez donc aussi sur ce sujet l'Avertissement suivant.

La question de savoir si la musique ancienne — il s'agit évidemment surtout de la musique grecque — avait, oui ou non, une grande valeur paraît avoir donné lieu à des réponses fort différentes. Si d'une part le philologue Isaac Vossius l'exalte ¹⁾, de l'autre Claude Perrault, auteur futur du „Parallèle des Anciens et des Modernes” qui est tout à l'avantage de ces derniers, l'assimile à celle des iroquois ou d'une autre nation quelconque encore barbare ¹⁾. Huygens, lui, dit tantôt „que cette ancienne

¹⁾ § 8 de la Pièce V, à la p. 131 qui suit. Le père d'Isaac Vossius, Gerardus Joannes V., traite brièvement de la musique antique dans le Cap. XVI, intitulé „De choro tragico: item de melodia, et apparatu scenico”, du Lib. II de ses „Poeticarum Institutionum libri tres” (Amsterdam, L. Elzevier, 1647), mais il n'exprime pas d'opinion sur la valeur de cette musique.

musique estoit tres peu de chose" ¹⁾), tantôt — dans le § 1 de la présente Pièce — qu'elle n'était pourtant pas à son avis si mauvaise que les quelques échantillons conservés la font paraître; ce qui d'ailleurs est à peine en contradiction avec l'opinion précitée. Nous indiquons dans la note 2 de la p. 89 quels sont, sans doute, les échantillons dont il entend parler.

Mersenne appréciait la musique grecque bien plus que Cl. Perrault ²⁾). Nous croyons utile de citer aussi l'opinion exprimée en 1875 par F. Gevaert, s'efforçant d'exagérer ni d'un côté ni de l'autre ³⁾).

Mais si la *musique* antique paraît médiocre à Huygens, les *théories* des musicologues grecs au contraire l'intéressent vivement. Ses notes se rapportent à Aristoxène, Euclide, Nicomaque de Gerasa, Aristide Quintilien, Ptolémée, Alypius, Gaudence ou Gaudentius et Bacchius Senex qu'il lisait tous dans l'édition de Meibomius ⁴⁾). Parmi les questions qui attirent spécialement son attention, nous mentionnons celle de la polyphonie dans l'antiquité (à laquelle se rapporte aussi la Pièce III D qui précède), la signification des divers modes (comparez la Pièce III B), les particularités des divers genres, les systèmes de notes, la division du tétrachorde en différents intervalles et la réunion de tétrachordes en systèmes.

²⁾ Mersenne, p. 558—559 de „La Verité des Sciences”: „l'espere avec l'aide de Dieu que nous arriuerons à cette perfection [comparez la p. 66 qui précède], lors que nous traiterons de la Musique, ou du moins que nous en approcherons de fort pres, particulièrement si ie peux rétablir ce que pratiquoient les anciens en leurs chants”. Voyez cependant aussi la note 71 de la p. 121.

³⁾ „Histoire et Théorie de la Musique de l'Antiquité” par Fr. Aug. Gevaert I, Gand, Annoot-Braeckman, 1875, p. 38 („Caractère de la Musique grecque”): „Le jugement définitif dont la musique grecque doit être l'objet ressort suffisamment des observations qui viennent d'être présentées. En toute chose, elle nous apparaît comme un art simple, incomplet par sa simplicité même. Elle manque de cette variété, de cette profondeur, de cette surabondance de vie, qui sont les conditions essentielles d'un art dont le but est précisément de réaliser ce qu'il est de plus mobile, de plus intime et de plus vital en nous. Sans tomber dans les exagérations de quelques critiques modernes, il est donc permis de lui assigner une place inférieure à celle qu'occupe notre musique dans l'échelle des manifestations du sentiment humain. N'oublions pas toutefois que l'art ancien, s'il n'a pas connu les grandeurs, les sublimes harmonies de la musique moderne, n'en a pas connu davantage les aberrations, les faiblesses. En donnant une part très restreinte à la sensation nerveuse, à la recherche de l'imprévu, il n'a pas développé en lui-même le germe de sa propre décadence”.

Voyez encore sur ce sujet, outre la note 2 de la p. 89, la fin de la note 2 de la p. 78 qui précède (citation d'Aristote) et la note 4 de la p. 177—178 qui suit.

Il convient en outre de relever le deuxième alinéa du § 4 proposant de définir un ton normal à l'aide d'une flûte de dimensions données. Il semble au moins fort possible, vu la tendance de Huygens à établir des étalons, qu'il s'agisse ici d'une proposition partant de lui-même et non pas d'un auteur antique. Nous nous demandons pourtant pourquoi, dans cette hypothèse, il intercale un pareil alinéa en cet endroit-ci. A-t-il songé à quelque passage d'Aristote sur les *σύριγγες* et les *αὐλαί*⁵⁾, ou peut-être à l'endroit de Boèce où celui-ci dit que Pythagore détermina les tons „longitudine calamarum”⁶⁾? Il est vrai que chez ces auteurs il ne s'agit que de hauteurs relatives. Il a pu songer aussi, à la proposition de Mersenne d'établir des tons-étalons, non pas par des instruments à vent, mais à l'aide de cylindres creux ou massifs frappés par des „marches”⁷⁾.

Nous publions comme Appendice les observations de Huygens sur les tons de sa flûte⁸⁾ en y joignant une figure indiquant qu'il a peut-être conçu l'idée de la sirène.

4) Nous mentionnons cette édition e.a. à la p. 362 du T. XIX.

5) Aristote, Probl. XIX, 23: ἡ . . . διὰ τοῦ μέσου τῆς σύριγγος τμήματος ὡσὺν τῇ δι' ὅλης τῆς σύριγγος συμπαρῶναι διὰ πάντων. ἔτι ἐν τοῖς αὐλαῖς τῇ διπλάσιῳ διαστήματι λαμβάνεται τὸ διὰ πάντων etc. D'après le catalogue de la vente de ses livres en 1695 Huygens possédait les ouvrages d'Aristote.

6) Boèce, dans le Chap. 11, cité aussi à la p. 362 du T. XIX, du Livre I „de Institutione Musica” écrit: „Hinc [après avoir entendu les accords produits par les marteaux du forgeron] igitur domum reversus [Pythagoras] varia examinatione perpendit, an in his proportionibus ratio symphoniarum tota consisteret. Nunc quidem æqua pondera nervis aptans eorumque consonantias aure diiudicans, nunc vero *in longitudine calamarum* [nous soulignons] duplicitatem medietatemque restituens ceterasque proportionibus aptans integerrimam fidem diversa experientia capiebat”.


7) Dans son Corollaire à la Prop. IX du Liv. III des „Traitez de la Nature des Sons, et des Mouemens de toutes Sortes de Corps” faisant partie de l’„Harmonie Universelle” Mersenne disait „que l'on ne peut rien établir de certain dans la Musique par la longueur des cylindres [il s'agit ici d’„instruments à vent”], comme il est aisé de conclure par toutes nos expériences”. Dans la „Première Preface générale au lecteur” (p. 8 non numérotée) de l’„Harmonie Universelle”, où il renvoie d'ailleurs au „3. Livre des Mouemens”, Mersenne parle d'abord de „cylindres creux” disant: „les marches frapperont ces Cylindres, & les feront sonner tant doucement que l'on voudra . . . Or l'instrument fait de ces corps pourroit servir de regle, de canon & de diapason immobile, & infallible pour regler, & pour accorder toutes les autres sortes d'instruments, & chaque Cylindre creux, ou plain & massif, estant porté ou envoyé par tout le monde seroit propre pour communiquer le ton de l'orgue, de la voix, et des autres Instrumens & pour faire chanter une mesme pièce de Musique en mesme ton par tous les Musiciens de la terre . . .”

Voyez aussi ce qui est dit sur les tuyaux d'orgue au § 4b (avec la note 75) à la p. 122 qui suit. Le diapason en forme de „tuning-fork” est attribué à John Shore, qui l'aurait inventé en 1711.

8) P. 104. Comparez la p. 377 du T. XIX.

La plupart des notes sont empruntées au groupe de feuilles (1—45) dont il a été question dans l'Avertissement des Pièces sur le chant antique et moderne; elles datent donc de 1672 ou, fort probablement, de plus tard. Seuls les §§ 1, 11 et 12 sont empruntés à d'autres feuilles du portef. „Musica”; aucune de celles-ci ne peut être antérieure à 1672: dans celle du § 1 Huygens cite un endroit du groupe 1—45, et les §§ 11—12 se rapportent à l'édition de 1682 des „Harmonika” de Ptolémée par Wallis. Notons encore que la f. 20 porte à son revers la note sur Werckmeister déjà mentionnée à la p. 18 qui précède, de sorte que les remarques de cette feuille-là sur l'édition de Wallis datent probablement elles aussi de 1691 au plus tôt.

Nous ajoutons un mot sur la date des citations de Théocrite (comparez la note 1 de la p. 1) par lesquelles le présent Tome débute. Elles sont sans doute de 1684 puisque la f. 1 sur laquelle elles se trouvent porte une série de noms qui sont apparemment ceux des personnes à qui Huygens envoya son „Astroscopia compendiaris” de cette année; ceci ressort e.a. du fait que les noms Leeuwenhoek et van Durven y paraissent à part: comparez la p. 502 du T. VIII où il est dit que Leeuwenhoek et les van Durven se rendirent chez Huygens en juin 1684 pour voir le nouveau télescope sans tuyau.



NOTES SE RAPPORTANT À DES ÉCRITS DE MUSICOLOGUES ANCIENS.

§ 1¹⁾. Il paroît assez que les auteurs que nous avons de la musique ancienne ont été ou de philosophes peu entendus dans la pratique de cet art; ou de praticiens qui manquoit [sic] des sciences nécessaires et d'intelligence pour la rédiger par écrit. Outre cela leur écrits sont si fort corrompus par l'ignorance des copistes et traducteurs, qu'une grande partie ne sauroit être entendue.

Il y en a qui ont voulu restituer quelques uns de leur airs, dont les notes, à leur manière, se sont trouvées dans des vieux manuscrits²⁾; mais il est assez évident par la méchante suite du chant en plusieurs endroits que les caractères ont été dépravés et changés par les copistes ignorants. Leur musique ne sauroit avoir été si mauvaise que ces échantillons la font paroître, quoique je ne croie pas qu'elle fût fort bonne ni régulière³⁾. L'ode de Pindare que Kircher rapporte⁴⁾ est le fragment le mieux conservé de cette musique ancienne.

§ 2⁵⁾. *πυκνόν*⁶⁾ *spissum* interpretantur, forte melius *confertum*.

¹⁾ Portef. „Musica”, f. 63v. Comparez sur ce premier § le deuxième alinéa de la p. 93 qui suit.

²⁾ Evidemment Huygens entend parler — outre de l'ode de Pindare; voyez la suite du texte — des trois hymnes à la muse Calliopé, à Phébus et à Némesis découverts par „un Gentilhuomo Fiorentino, nella libreria del Cardinale Sant' Angiolo, in alcune carte che erano dopo a uno libro antichissimo in penna della Musica d' Aristide Quintiliano & di Briennio” et publiés par Vincentio Galilei, père de Galileo G., dans son „Dialogo della Musica Antica et della Moderna” (Firenze, 1581 et 1602), dont nous venons de citer la p. 96. Il existe de nombreuses éditions de ces hymnes, e.a. une de John Fell de 1672 — dans son édition d'Aratos et de fragments d'Eratosthène — avec des commentaires de Edm. Chilmead. Fell croit pouvoir dire (p. 48) „nostra veteribus longe esse potiora; si artificium & cultus, numeri & opes, vis denique & Majestas spectentur”.

Il a été établi plus tard que ces hymnes sont de Mésomède de Crète, du deuxième siècle de notre ère, ce dont on peut se convaincre en consultant l'édition de 1895 de Carolus Janus ou von Jan des „Musici scriptores graeci Aristoteles, Euclides, Nicomachus, Bacchius, Gaudentius, Alypius, et melodiarum veterum quidquid exstat”, ainsi que le „Supplementum. Melodiarum reliquiae” de 1899 (l'un et l'autre Lipsiae, Teubner). L'ode de Pindare ne s'y trouve point: v. Jan doute de son authenticité. v. Jan donne les dates etc. des éditions antérieures des hymnes de Mésomède.

³⁾ Comparez la note 135 de la p. 131 qui suit.

⁴⁾ Comparez la p. 126 qui suit.

⁵⁾ Les notes qui suivent (§ 2—10) sont empruntées aux f. 38v, 39r, 39v, 40r, 40v, 43r, 43v, 46r,

Est autem compositum ex duobus tetrachordi intervallis reliquo tertio minoribus. unde in diatonico genere locum non habet⁷⁾.

Barypyeni soni sunt qui primas seu infimas pyeni regiones tenent. Mesopyeni qui medias, oxypyeni qui ultimas⁸⁾.

Arifid. l. 1. pag. 12⁹⁾.

§ 3. Eratosthenis sectio Canonis Pythagorici¹⁰⁾.

Enarm. ¹¹⁾	Chrom. ¹²⁾	Diat. ¹³⁾	
60 MI	60 MI	60 MI	Nicomachus Manualis l. 1. p. 24 ait Eratosthenem male intellexisse sectionem canonis Pythagorici ¹⁴⁾ .
76 VT rem.	72 VT [♯] rem.	67 RE	
78	76 VT	75 VT	
80 CI	80 CI	80 CI	
90 LA	90 LA	90 LA	
114 FA rem.	108 FA [♯] rem.	101 SOL	
117	114 FA rem.	113 FA	
120 MI	120 MI	120 MI	

46v, 47r et 47v du portef. „Musica”. Voyez pour les §§ 11 et 12 les notes 69 de la p. 100 et 76 de la p. 102 qui suivent.

- ⁶⁾ Dans les genres chromatique et enharmonique l'intervalle le plus haut du tétrachorde est plus grand que la somme des deux autres. Ces deux derniers forment ensemble un groupe de trois tons appelé *πικρὸν*. Huygens propose de remplacer par „confertum” la traduction usuelle „spissum”, peut-être parce que „confertum” évoque, plus que „spissum”, l'idée d'une grandeur discontinue.
- ⁷⁾ Dans tous les genres diatoniques aucun intervalle d'un tétrachorde n'est supérieur à la somme des deux autres, de sorte que dans ces genres il n'y a jamais de „spissum”.
- ⁸⁾ Chaque „spissum” est composé de trois tons nommés par ordre de hauteur „barypyenum”, „mesopyenum” et „oxypyenum”.
- ⁹⁾ Aristides Quintilianus est un musicologue du 1^{er} ou 2^{ème} siècle de notre ère. Huygens lisait son ouvrage „De Musica Libri III” dans l'édition de Marcus Meibomius „Antiquæ Musicæ Auctores Septem. Græce et Latine”, Tome II. Amstelodami apud Ludovicum Elzevirium, 1652; nous citerons plus loin ce volume comme Meibom. II.
- ¹⁰⁾ La „sectio canonis” d'Eratosthène nous est communiquée par Ptolémée, Harmonicorum Libri III, p. 170 et suiv. de l'édition de Wallis (Oxonii, 1682), p. 70 et suiv. de celle de Düring (Göteborg, 1930).
- ¹¹⁾ Suivant Eratosthène le tétrachorde enharmonique est divisé dans les intervalles: 19:15, 39:38, 40:39. Lorsque le ton MI correspond à une corde de longueur 120, le ton de la corde de longueur 114 est inférieur à Fa puisque $\frac{120}{114} = \frac{20}{19} < \frac{16}{15}$. Ceci explique l'annotation „rem.”, c.à.d. remissum, abaissé. La même remarque s'applique aux autres tons désignés par „rem.”

§ 4. Tonum definiverunt ¹⁵⁾ differentiam inter diatessaron et diapente, contentum scilicet ratione 9 ad 8. Recentiores hunc majorem vocant tonum, alterumque definirunt quem appellant minorem qui est 10 ad 9 ut nempe hi juncti faciant tertiam majorem. at secundum divisionem Temperamenti intervallum tertiæ majoris quod est 10 ad 8 seu 5 ad 4, dividitur in duos tonos æquales qui sunt rationis 5 ad 4 ($\sqrt[4]{20}$ ¹⁶⁾). quæ ratio quanquam non sit numero explicabilis hoc nihil refert, quia de intervallo consonano non agitur.

Definitio toni certa ac constans ex longitudine fistulæ seu cylindri cavi, cujus sonus semper idem qualicunque sit crassitudine, saltem si non major ea fuerit quam pars decima vel circiter longitudinis ¹⁷⁾.

Cum veteribus non nisi diatessaron diapente et diapason consonantiæ censerentur ¹⁸⁾, vel hinc apparet concentu vocum caruisse quem nunc parties ¹⁹⁾ appellamus.

De modis nemo veterum quos habemus explicuit, qua in re discrepant nisi acumine et gravitate. de finali dominante et mediantē tono nihil præceperunt, cum tamen ab his modorum constitutio pendeat ²⁰⁾. Itaque apparet tantum ad chordas cytharæ et reliquorum instrumentorum respexisse.

¹²⁾ Les nombres des rapports du tétrachorde chromatique sont d'après Eratosthène (l.c.) 6 : 5, 19 : 18 et 20 : 19.

¹³⁾ Les nombres des rapports du tétrachorde diatonique — il s'agit du genre diatonique ditonien — sont 9 : 8, 9 : 8, 256 : 243. Les nombres donnés par Huygens sont arrondis. Ptolémée donne des valeurs plus exactes; en notation sexagésimale elles sont 60; 67 | 30; 75 | 56; 80; 90; 101 | 15; 113 | 54; 120. Le nombre 67 | 30 signifie $67 \frac{30}{60}$. Voyez Ptolémée, Harmonica; éd. Wallis p. 172; éd. Düring p. 73 (en fractions ordinaires).

¹⁴⁾ Nicomachi Geraseni Pythagorici „Harmonices Manuale” dans le Tome I de l'ouvrage cité dans la note ⁹⁾; tome qui sera cité plus loin comme Meibom. I.

¹⁵⁾ Voyez p.e. Aristoxène „Harmonicorum Elementorum Liber I”, Meibom. I, p. 21, où l'intervalle d'un ton (*τὸ τωναίον διάστημα*) est défini comme la différence des premières consonances (*ἡ τῶν πρώτων συμπρώτων κατὰ μέγεθος διαφορά*).

¹⁶⁾ Puisque $\left(\sqrt[4]{\frac{5}{20}}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

¹⁷⁾ Nous avons parlé de cet alinéa dans notre Avertissement.

¹⁸⁾ Comme Huygens le dit aussi dans le dernier alinéa de la p. 36. Voyez cependant la note 10 de la p. 79.

¹⁹⁾ Le mot français „parties” est employé pour indiquer le chant polyphone.

De clausulis quas nunc cadentias vocamus nihil etiam dixerunt ²¹⁾. has in diatonico non potuere habere cum hemitonijis, nisi fa mi fa, et ut ci ut. cum tonos ut $\sharp f$ $\sharp s$ non haberent. Sed ex reliquijs cantionum quæ supersunt videntur clausulæ plerunque fuisse sine reversione, velut sol, fa, mi, f, m, r &c.

Si symphonia usi fuissent, observassent tres sonos semper consonare non annumerata diapason. velut u, m, s, vel u, m, l, vel u, f, l. Sed nec divisiones canonis symphoniam ferunt, præter diatonicam unam Ptolemæi vel Eratosthenis ²²⁾.

Præcepta tradidissent de usu consonantiarum et dissonantiarum. quæ præcepta nunc potissimam artis partem faciunt.

Ergo nullam apud illos musicam fuisse nisi cantus simplicis aut homophoni si organa accederent ²³⁾.

At paulatim repertæ symphonicae; primum in clausulis ubi bassus quartæ intervallo ascendit vel quintæ intervallo descendit ²⁴⁾. Hinc autem necessarie tantum diatonicum genus vel cum chromate ut nunc habemus mixtum usui esse potuit, ac diatonicum altera solum species quæ syntonon [?], chroma vero unius speciei è tribus, nempe toniæum ²⁵⁾.

§ 5. Diagrammata notarum quæ ex Alypio ²⁶⁾ restituit Meibomius ita sunt ordinata ut proslambanomeni singulorum 1 3 ²⁷⁾ tonorum semitonio in acumen sese excedant, utque easdem habeant notas quas sonus ipsis conveniens in Hypodorio et alijs præcedentibus modis ²⁸⁾. Ex. gr. dori proslamb. notam habet eandem ac hypaton diatonos ²⁹⁾ hypodori.

²⁰⁾ Un mode ecclésiastique n'est pas encore déterminé par sa note finale puisque celle-ci est la même pour un mode authentique et pour le mode plagal correspondant. L'indication de la note dominante permet ensuite de distinguer ces deux derniers l'un de l'autre.

²¹⁾ Huygens fait allusion au „subsemitonium modi” (note sensible), inférieur d'un demi-ton à la tonique.

²²⁾ Savoir le genre diatonique tendu (*διατονικὸν σὺντονον*) de Ptolémée et le genre diatonique d'Eratosthène identique avec le genre diatonique ditonisé de Ptolémée. Voyez Ptolémée, *Harmonica*, éd. Wallis, p. 172, éd. Düring, p. 73.

En effet, dans ces genres non seulement les sons fixes des tétrachordes successifs forment des intervalles consonants, mais il en est de même de tous les tons mobiles ou de quelques-uns d'entre eux.

²³⁾ Consultez sur d'autres considérations sur la question de savoir si l'antiquité a connu la musique polyphone (question qui intéresse Huygens tout spécialement) les Pièces III, D I et D II, aux p. 78 et 80 qui précèdent.

²⁴⁾ Ceci se rapporte à la soi-disante Clausula Bassizans, cadence stéréotype de la basse, consistant en un saut ascendant d'une quarte ou bien descendant d'une quinte.

²⁵⁾ En effet, ce n'est que dans ces genres que chacun des tons les plus bas de l'octave a une quinte supérieure.

Unde videtur hic auctor itemque Aristides Quint.³⁰⁾ diversitatem modorum tantum in acumine et gravitate positam censuisse; imo vero antiqui omnes, quandoquidem istae fuerunt ipsorum notae singulis modis generibusque convenientes quas Alypius describit. Ptolemæus³¹⁾ vero aliter eorum explicat differentiam, secundum quem dorius tonus fuisse videtur qui nobis hodie USU. Phrygius RLR. Lydius MLM; nempe plagius hic, et non MCM, qui non nisi acumine differret a RFL. Idem excessus modorum per hemitonia improbat³²⁾.

Puto autem scriptores illos musicos excepto Ptolemeo, parum intellexisse quamnam vera esset modorum differentia, quod inde quoque confirmatur quod nemo illorum differentiam cantionum quæ modi Dorij, Phrygij, Lydij, etc. essent explicuit, quæ nempe in usu finalis mediantis ac dominantis soni sita esse debuit³³⁾. At musici practici proculdubio eam noverant. sed hi explicare non poterant³⁴⁾.

Gaudentius pag. 21³⁵⁾. nonnunquam sonum mese pro proslambanomeno sumtum

²⁶⁾ Alypius est un musicologue grec florissant vers 300 après J. Chr., dont l'„Introductio musica“ se trouve dans Meibom. I. Il donne une table des notes grecques.

²⁷⁾ Alypius (p. 96 qui suit) en donne quinze, conformément à la tradition post-aristoxénique.

²⁸⁾ Ceci doit s'entendre comme suit: le proslambanomenos de chaque ton du groupe moyen est désigné par le même signe que le ton de même hauteur (savoir le hypaton diatonos) du ton correspondant du groupe grave, caractérisé par la particule *hypo*.

²⁹⁾ *Hypaton diatonos* est un autre nom pour *lichanos hypaton*. Voyez p.e. Gaudentius „Harmonica Introductio“, Meibom. I, p. 7.

³⁰⁾ Aristides Quintilianus „De Musica“ I, Meibom. I, p. 23—24.

³¹⁾ Ptolémée parle des différents modes dans le Cap. 9 du Lib. II des „Harmonica“, éd. Wallis p. 128, éd. Düring p. 60. Nous ne voyons pas comment Huygens a pu conclure de ces considérations ou du traitement ultérieur du sujet que le mode dorien serait le même que VSV et le mode lydique le même que MLM. A cette identification s'oppose déjà la description des différents modes dans le Cap. 11 du Lib. II (éd. Wallis p. 136, éd. Düring, p. 64) dont on trouve un résumé dans I. Düring, „Ptolemaios und Porphyrios über die Musik“, Göteborg, 1934, p. 79; le mode dorique y est caractérisé par la suite de tons et de demitons $\frac{1}{2}$, 1, 1, 1, $\frac{1}{2}$, 1, 1, tandis que pour VSV cette suite est 1, 1, $\frac{1}{2}$, 1, 1, 1, $\frac{1}{2}$.

³²⁾ Ptolémée, „Harmonica“, Lib. I, cap. 11, éd. Wallis p. 136, éd. Düring p. 64.

³³⁾ Voyez la note 20 de la p. 92.

³⁴⁾ Comparez le § 1 qui précède.

³⁵⁾ Gaudentius, „Harmonica Introductio“, Meibom. I, p. 21.

³⁶⁾ Alypius, „Introductio Musica“, Meibom. I, p. 2.

On trouve en marge la liste suivante contenant les noms bien connus des tons du grand système parfait:

L nete hyp.	V trit. diez. par. syn.	M hyp. mes.
S paran. hyp.	C paran. b trite syn.	R lich. hyp.
F trit. hyp.	L mese	V paryp. hyp.
M nete diez.	S licha. mes.	C hyp. hyp.
R paranet. diez. nete syn.	F paryp. mes.	L proslamb.

ait, interdum alium sonum ex ijs qui inter proslamb. et mesen sunt, nempe secundum hunc aut illum modum, reliquos vero sonos ad proslambanomenon suam eadem proportionem ubique referri. Hinc vero concludit singulis modis diversas notas habuere debuisse; quod non video.

Hoc autem considerandum, an non chordas quasdam intendere aut remittere necesse habuerint cum modum mutare vellent, quod sane videtur ita fuisse, nam si proslambanomenos hypophrygij L ex. gr. idem sonabat quod hypate hypaton hypodorij C, (ut apparet ex diagrammate Generis diatoni quod secundum Alypium Meibom. restituit³⁶) jam hypophrygij hypate hypaton C non poterit referri sono parypates V hypaton hypodorij. quoniam ab hujus hypate ad parypaten est $\frac{1}{2}$ tonium CI, VT; at a proslamb. L ad hypaten C hypaton hypophrygij. et alius cujuscumque modi, debet esse tonus LA CI. Ergo necesse fuit remittere chordam hypates C hyp. hypodorij, quando lyram hypophrygio modo accommodare volebant. eademque ratione parypate meson hypodorij intendenda fuit hemitonio minore. Sed hæc mutatio tensionum in chordis quibusdam hoc quidem efficiebat ut eandem cantilenam tono altius sonare possent, sed ea non erat mutatio secundum $\tilde{\eta}\lambda\omicron\varsigma$, cujusmodi nostri temporis habet musica. qualisque proculdubio etiam apud veteres fuit.

Ad hanc autem nihil opus erat mutare ullius chordæ tensionem, uti nec apud nos. Ergo vel nos scriptores illos non intelligimus, vel illi rem ipsam quid esset toni mutatio non intellexerunt.

§ 6. In modorum seu tonorum definitione differebant musicorum positiones quod et Aristoxenus indicat instit. harm. pag. 37, similem hic discrepantiam esse dicens atque in horarum numeratione apud diversos populos³⁷). Ipse nihil definit. Sed Euclides³⁸) pag. 19 ipsius sententiam de 13 tonis refert, quorum ordo et excessus iidem ac apud Bacchium³⁹) et Ptolemæum⁴⁰). Euclides p. 16 speciem diapasôn quæ est ab hypat. hyp. ad paramesen (a ci ad ci) mixolydiam vocari ait. cum tamen hic modus dicatur omnibus acutissimus è septem⁴¹). Euclidem sequitur Gaudentius⁴²).

On ne doit apparemment pas regarder les notes ajoutées ici par Huygens comme désignant les hauteurs des tons en valeurs absolues; il ne s'agit que de hauteurs relatives: les tons mentionnés diffèrent autant entre eux que les tons grecs indiqués. P.e. proslambanomenos hypophrygii et hypate hypaton hypodorii diffèrent autant que La et Ci, donc un ton entier; de même hypate hypaton hypophrygii et parhypate hypaton hypodorii diffèrent d'un demi-ton, comme C et V.

³⁷) Huygens fait sans doute allusion à un passage des „Harmonicorum Elementa”, Lib. I, Meibom. I, p. 27. Toutefois en cet endroit Aristoxène excuse la confusion dans la définition des modes en la comparant non pas avec celle qui règne dans la numération des heures, mais avec celle qui se rapporte aux jours.

³⁸) Euclide, „Introductio Harmonica”, Meibom. I, p. 19 = „Euclidis Scripta Musica”, éd. Menge,

Bacchius et Ptolemæus non definiunt modos nominibus chordarum, sed gravissimum ponunt hypodorium; inde reliquos hoc ordine, et excessu qui ex adscriptis nostrorum sonorum nominibus cognoscitur ⁴³).

Mixolydius	F	Hypolydius	C
Lydius	M	Hypophrygius	L
Phrygius	R	Hypodorius	S
Dorius	V		

Hæc autem discrepant multum ab Euclidis et Gaudentij numeratione, in qua dorius acutior esset phrygio et hic lydio. Notandum tamen Euclidem et Gaudentium non loqui de tonis sed de diapason speciebus, si forte hæc diversa inter se fuere ⁴⁴).

§ 7. Aristox. lib. 2 pag. 46. multos deceptos fuisse ait quod putarent ipsum dicere tonum in 4 æqualia divisum cani ⁴⁵).

§ 8. Aristides Quintilianus l. 1 pag. 23 ⁴⁶). Singulis Tonis seu modis suas attribuit proslambanomenos, dicitque omnium 13 tonorum proslambanomenos contineri intervallo diapason quia nimirum singuli Toni hemitonio super præcedentes ascendunt, ut hypodorius sit omnium gravissimus nec quicquam addit unde colligatur Tonos seu modos Veterum aliter quam gravitate et acumine discretos fuisse; quod vix credibile videtur; Certe Ptolemæus aliam modorum differentiam statuere videtur, lib. 2 Harmonic. cap. 7. Et si non distinctè explicet qua in re sita sit. Sed forsitan in causa est inter-

Lipsiæ 1916, p. 218. Chez Meibomius il faut lire à la p. 20, l. 10 *βασύτατος* au lieu de *ᾗττατος*.

³⁹) Bacchius Senex est un musicologue grec du quatrième siècle de notre ère.

⁴⁰) Ptolémée, „Harmonica”, Lib. II, cap. 15, éd. Wallis p. 173 sq. éd. Düring, p. 74 sq.

⁴¹) Cette contradiction apparente résulte d'une confusion entre le ton (*τῶνος*) et le mode (*ἡμολύδιον*). Lorsqu'on écrit pour le grand système parfait La-La-La le mode myxolydien est rendu par l'octave B—B. Mais dans le système des tons le ton myxolydien ou hyperdorien est le plus haut des sept distingués par Ptolémée.

⁴²) Gaudentius. „Harmonica introductio”, Meibom. I, p. 19 dans une discussion des sept modes.

⁴³) Ici de nouveau (comparez la note 36 de la p. 93) les notes ajoutées ne servent qu'à indiquer les intervalles successifs.

⁴⁴) Il existe en effet une différence entre le ton (*τῶνος*) et le mode (*ἡμολύδιον*, species, diapason). C'est à cette différence qu'il faut avoir égard pour expliquer la contradiction signalée par Huygens; voyez la note 41 qui précède.

⁴⁵) Aristoxène observe à l'endroit cité qu'on chante les intervalles d'un demiton (*ἡμολύδιον*), d'un tiers de ton (*δισίς χορμηματικῇ*) et d'un quart de ton (*δισίς ἐναρμόμιονος*). Il paraît qu'on a donné de cette observation l'interprétation erronée qu'un ton serait chanté en quatre étapes successives d'un quart de ton.

⁴⁶) Aristides Quintilianus, „De Musica”, Meibom. II.

pretis Gogavini⁴⁷⁾ imperitia qui ita hunc auctorem vertit ut non sit intelligibilis. Apparet tamen differere Ptolemæum in eam sententiam ut non fuerit diversitas modorum ex gravitate aut acumine, sed quod diversi moris imagines auribus ingererent, sicut Dorium dixere virilem, Phrygium molliorem, Lydium lugubrem⁴⁸⁾.

Cum ex speciebus diapasôn Ptolemæus modos constituat, non alienum est credere extremos seu infimos sonos cujusque diapasôn quo modus designatur definivisse l. 2. cap. 1 [?]. Quod si verum est, sequitur⁴⁹⁾ dorium modum fuisse VSV qui primus nostrorum, Phrygium RLR, Lydium MCM vel potius MLM.

Alypius⁵⁰⁾ 15 modos statuit pag. 2. horum primum Lydium. Reliquos non enumerat sed credibile est talem eorum ordinem agnoscere qualem in notarum descriptione sequutus est.

§ 9. *Epigonium* citharæ genus ab Epigono inventum, 40 chordas habebat. aliud *simicum* vocatum, 35. Notis in Aristox. p. 79⁵¹⁾. Epigonus iste digitis sine plectro fides pulsavit primus.

πυκνόν, spissum, est quod ex duobus constat intervallis quæ simul addita minus intervallum continent eo, quod in diatessaron relinquitur. Aristox. pag. 24⁵²⁾.

Pars toni dimidia canitur quæ dicitur hemitonium. Item toni pars tertia, quæ vocatur diesis chromatica minima. Item toni pars quarta quæ vocatur diesis enarmonia minima, qua nullum canitur minus intervallum. Aristox. pag. 46. l. 2.

Genus diatonum duplex erat, molle, et syntonum, quod vertit contentum⁵³⁾.

⁴⁷⁾ En écrivant ce paragraphe, Huygens se servait donc encore de l'édition de Gogavinus, Venise, 1562. Ces remarques ne sont donc, pensons-nous, pas postérieures à 1682, date de l'édition de Wallis. C'est cette dernière que nous verrons Huygens citer dans des notes ultérieures, dont l'une au moins semble, il est vrai, être de beaucoup postérieure à 1682 (voyez l'Avertissement).

⁴⁸⁾ Les caractères éthiques des différents modes ne sont pas mentionnés par Ptolémée. On en trouve un bon aperçu chez Reinach „La Musique grecque”, Paris 1926, p. 46.

⁴⁹⁾ Voyez la note 31 de la p. 93 qui précède.

⁵⁰⁾ Comparez la note 27 de la p. 93.

⁵¹⁾ Aristoxène „Harmonicorum Elementa Lib. I”, Meibom. I, p. 3 parle de „Epigoniorum quidam” ce qui, suivant Meibomius „Notæ in Aristoxenum” p. 78, se rapporte aux disciples d'un célèbre musicien du nom d'Epigonus, natif d'Ambracia, et créé plus tard citoyen de Sicyon. Un instrument à quarante cordes de son invention, nommé „epigonium”, est mentionné par Iulius Pollux Lib. IV, Cap. 59 („Pollucis Onomasticum” éd. E. Bethe, Vol. I, Leipzig 1900) qui parle aussi d'un autre instrument à 35 cordes, le „simicum”. Lui et Athenæus (Lib. IV) racontent qu'Epigonus fut le premier à toucher les cordes avec les doigts, sans plectrum.

Dans le „Dialogo della Musica antica et della moderna” de 1581 de Vincentio Galilei on trouve aux p. 40 et 41 deux grandes figures représentant l'„epigonio” et le „simico”.

⁵²⁾ Voyez la note 6 de la p. 90.

⁵³⁾ Aristoxène, „Harmonicorum Elementa Lib. II”, Meibom. I, p. 51 distingue deux genres diatoniques, le genre diatonique amolli (μυκνόν) et le genre diatonique tendu (συντόνον), ce que

Molle, in quo diatessaron ab hypate ad mesen dividitur in hemitonium et intervallum trium diesium enarmoniarum et aliud quinque ejusmodi diesium. tota nempe diatessaron est 10 diesium enarmoniarum quarum duæ cedunt hemitonio. Contentum sive syntonum diatonicum constat intervallis hemitonij et toni et toni.

Hæ species diatoni etiam *χρόαι* colores⁵⁴⁾ vocantur. Introd. Harm. Euclidis pag. 10, 11. ubi et Chromatici generis colores 3 recensentur⁵⁵⁾. Secundum horum primum, vocatur Chroma molle, quod canitur per diesim chromaticam, quæ est $\frac{1}{3}$ toni et diesim illi æqualem et per intervallum incompositum quod æquale est tono et $\frac{1}{2}$ tono et $\frac{1}{3}$ ejusdem. Secundum alterum vocatur chroma sesquialterum, quod canitur per diesim et diesim quarumque utraque sesquialtera dieseos enarmonia et per intervallum incompositum septem diesibus enarmonijs constans. Tertia species chromatis denique est quod Tonium dicitur quod eadem qua genus divisione utitur, quippe quod canitur per hemitonium et hemitonium et trihemitonium.

Meibomius traduit par „contentum”.

Dans ces deux genres le tétrachorde des moyennes comprend les parties suivantes

Diatonique amolli	Diatonique tendu
Mèse	
5 dièses enharmoniques	ton = 4 dièses enharm.
Lichanos	
3 dièses enharmoniques	ton = 4 dièses enharm.
Parhypate	
demitons = 2 dièses enharm.	demiton = 2 dièses enharm.
Hypate	

où 1 dièse enharmonique = $\frac{1}{4}$ ton.

⁵⁴⁾ = nuances. *χρόαι δὲ ἐστὶ γένους εἰδικὴ διαίρεσις.*

⁵⁵⁾ Euclide „Introductio Harmonica”. Meibom. I, p. 10 („Euclidis Scripta Musica”, éd. Menge, p. 200). Les trois modes du genre chromatique sont déterminés par les divisions suivantes du tétrachorde des moyennes

Chromatique amolli	Chromatique sesquialtère	Chromatique tonié
Mèse		
$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$ ton	7 dièses enharm.	3 demitons
Lichanos		
dièse chrom.	$\frac{3}{2}$ dièses enharm.	demiton
Parhypate		
dièse chrom.	$\frac{3}{2}$ dièses enharm.	demiton
Hypate		

où 1 dièse chromatique = $\frac{1}{3}$ ton et 1 dièse enharmonique = $\frac{1}{4}$ ton.

Systemata in immutabili systemate non tantum sunt diatessaron, sed et diapente diapason et compositorum ex diapason et diatessaron, et ex diapason et diapente, et disdiapason ⁵⁶⁾.

§ 10. Pag. 15. Introd. Euclid. Per diversas species diapason quæ sunt 7, definit rotidem, ut videtur, modos. Prima species inquit est ejus primus tonus est *in acumine* hoc est parte supera. estque ab hypate hypaton ad paramesen hoc est a *ci* ad *ci*. cur autem à *ci* ad *la* tonum vocet quasi alij non essent toni in distantia diapason, hinc est; quod in diapason illo non inveniatur aliud toni intervallum inter sonos immobiles præter istud a mese L ad paramesen C. immobiles autem adhibere non debebat quia in universum diapason omnium generum differentias explicare voluit ⁵⁷⁾.

Pag. 17 et 18 ⁵⁸⁾ explicat systemata perfecta minus et majus et ex his compositum quod immutabile vocatur. Minus est trium diatessaron similium et conjunctarum a *ci* ad *re*. una cum tono inter proslamb. et hypat. hypaton. Majus systema est bis diapason a proslamb. ad neten hyperbol. *la, la, la*.

Sed difficultas hæc est quod necesse sit tertiam diatessaron minoris systematis esse *la, çà, ut, re*, ut sit similis reliquarum duarum inferiorum, adeoque a mese ad triten synnemmenon esse hemitonium. at in majori systemate oportet inferiorem diatessaron esse *ci, ut, re, mi*.

Gaudentius ⁵⁹⁾ de his systematibus scribens videtur significare nunc hoc nunc illo

⁵⁶⁾ Euclide „Introductio Harmonica”. Meibom. I, p. 12—13 („Euclidis Scripta Musica”, éd. Menge, p. 210).

⁵⁷⁾ Il nous semble que les mots „ejus primus tonus est in acumine” doivent être interprétés autrement que chez Huygens. Le texte grec est le suivant: τοῦ δὲ διὰ πρῶτον εἶδη ἐστὶν ἐπτά. πρῶτον γὰρ τὸ ἐπὶ βραχυπυκνωσὶς περιεχόμενον. οὗ πρῶτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. Le sens du dernier bout de phrase est apparemment: dont le ton fondamental est le premier ton (après le proslambanomenos) vers le haut. Cette interprétation écarte la difficulté signalée par Huygens.

⁵⁸⁾ Euclide „Introductio Harmonica”. Meibom. I, p. 17—18 („Euclidis Scripta Musica”, éd. Menge, p. 214). Les systèmes en question sont 1° le grand système parfait

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} a & b & \bar{c} & \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} & \bar{g} & \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} & \bar{g} & \bar{a} \\ \hline & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

comprenant deux octaves et consistant en deux paires de tétrachordes conjoints, séparés par l'intervalle de la mèse à la paramèse (a—b) et précédés par l'intervalle du proslambanomenos à la hypate hypaton (a—b);

2° le petit système parfait consistant en trois tétrachordes conjoints, comprenant ensemble l'intervalle d'un octave et quart

$$\begin{array}{cccccccccccc} a & b & \bar{c} & \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} & \bar{g} & \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \\ \hline & & & & & & & & & & \end{array}$$

Pour *bes* Huygens écrit ici *çà*.

veteres usos fuisse. ait vero mesen a trite synnemmenon ⁶⁰) dislare hemitonio, eandem vero mesen a paramese tono. nunquam vero composito ex utrisque systemate utebantur, quod inutiles fuissent synnemmenon tetrachordi duæ superiores; fortasse solam triten synnemmenon adjugebant supernumerariam ut haberent C⁷. Ptolemæus lib. 2. cap. 7 ⁶¹) superfluum dicit tetrachordum synnemmenon, ac ubique in recensione tonorum id omittit.

Hemitonium quod vocabant non ignorabant non esse toni dimidium. Nicomachus Manuale lib. 1. pag. 27 ⁶²), etsi diatessaron est $2\frac{1}{2}$ tonorum, diapente vero $3\frac{1}{2}$, non ideo diapason quod ex utrisque componitur est tonorum 6, sed 5 tonorum et 2 hemitoniorum quæ dicuntur. quæ si essent revera tonorum dimidia, fieret diapason tonorum 6. Est autem major, quod et Philolaus notavit ⁶³).

Duplices notas veteres versibus apposuisse scribit Gaudentius Harmon. Introd. p. 23. quarum superiores τὴν λέξιν, inferiores τὴν κροῦσιν ostenderint ⁶⁴).

Quorum hoc si idem cantabant ac sonabant. Itaque hinc aliqui putant symphoniam cantus ac citharæ non fuisse homophoniam ⁶⁵). Sed cum alia multa contrarium suadent, tum hoc quoque quod eadem semper duplices notæ recurrant, adeo ut ad eundem sonum vocis semper idem tonus consonans apponi debuerit, quod absurdum est cum plane ineptus ingratusque auribus concentus hinc nascatur. Quid tamen significant illa, λέξιν nempe et κροῦσιν duplicibus notis designatas fuisse. Fortasse alijs notis cantores musici, alijs cytharedi, vel qui lyram pulsabant, assueverant; utque cantoribus superiores notas suffecisse scimus (quod veteres cantilenæ simplicibus hujusmodi scriptæ inveniantur) ita organa pulsantibus inferiores suffecerint; qui vero canere et pulsare

⁵⁹) Gaudentius „Harmonica Introductio”. Meibom. I. p. 7 et 8.

⁶⁰) La trite synnemmenon est le ton qui suit la mèse du troisième tétrachorde du petit système parfait (tétrachorde des conjointes), la paramèse est le premier ton du troisième tétrachorde du grand système parfait (tétrachorde des disjointes).

⁶¹) Ptolémée „Harmonica”. Lib. II, Cap. 7, éd. Wallis p. 122, éd. Düring, p. 57.

⁶²) Nicomaque „Harmonices Manuale”, Lib. I, Meibom. I, p. 27.

⁶³) Le texte de Philolaos cité par Nicomaque est, d'après Diels „Fragmente der Vorsokratiker”, Berlin 1922, I, p. 312: οὕτως ἀρμονία (c.à.d. octave) πέντε ἐπὶ γῶνα καὶ δύο διέσεις, δι' ὅξυτον (c.à.d. quinte) ὅς τρις ἐπὶ γῶνα καὶ διέσεις, συλλαβὰ (c.à.d. quarte) ὅς δύο ἐπὶ γῶνα καὶ διέσεις.

Par διέσεις il faut ici entendre hemitonium. Philolaos savait donc que deux hemitonia n'équivalent pas à un ton ($\text{ἐπὶ γῶνον} = \frac{9}{8}$); sinon il aurait égalé l'octave à 6 ἐπὶ γῶνα.

⁶⁴) Gaudentius „Harmonica Introductio”. Meibom. I, p. 23. La note marginale de Huygens percussio nem interpr. s indique la traduction „percussio” donnée par Gaudentius de κροῦσις. Voyez sur les „duplices notæ” la p. 80 (note 12) qui précède.

⁶⁵) Voyez sur la question de l'existence de la musique polyphone dans l'Antiquité la Pièce III D. à la p. 78 qui précède.

fides simul vellent ijs utræque notæ adscribendæ fuerint. quamquam insignis fuerit hæc istorum hominum *περιεργία*. sed hanc mirari non debemus cum totum hoc harmonices negotium miris adeo tricis quibusque carere potuisset, involutum fuerit. quid enim aliud diversitas illa notarum uniuscujusque modi, quarum ab Alypio recensentur ⁶⁶⁾ atque ita ut chorda eadem sæpe alio charactere in singulis modis designaretur. Sane tensionem chordarum non fuisse mutatam in modis (quomodo enim inter sonandum potuissent mutare modum, ut faciebant sæpe) sed tantum in generibus scimus ⁶⁷⁾, et in his quoque non omnium. ut proinde facile potuerint iisdem notis omnium tonorum odas perscribere. Quod tamen aliter plane se habet, nec ulla ratio reddi posse videtur, nisi ut apud diversos populos diversæ notæ primum adhibitæ fuisse dicantur, Lydios, Dores, Phryges. Quo exemplo cæteri quoque deinceps reperti modi dissimiles notas tum prioribus tum inter se acceperint.

Si quis ergo interroget cur diversæ notæ fuerint in cantu ac pulsu cum idem utrobique sonus designandus esset; quæram et ego cur iisdem soni diversas notas habuerint in diversis modis. Eadem hic et illic responsio, superfluis nimirum quampluribus onerata fuisse harmonicam veterum disciplinam, uti adhuc hodie non paucis laborat, quale est ista clavium quas vocant tanta varietas, quæ septem sunt, cum duæ aut tres sufficiant ac fortasse nullis opus sit, si aliam scribendi rationem sequi placeat. Quia vero non nisi difficile admodum à recepta semel consuetudine disceditur, notarum scriptio lineis quinque distincta ut retineatur censeo cum non inseite alioqui excogitata sit. Quippe quod eadem nota et tonum et tono conveniens tempus ostendat ⁶⁸⁾.

§ 11. pag. 172 Ptol. Harm. Wallisij ⁶⁹⁾.

Diatonicum syntonon Ptolemei ⁷⁰⁾.

⁶⁶⁾ Alypius „Introductio Musica”. Meibom. I. Voyez la p. 93 (note 26).

⁶⁷⁾ Voyez cependant ce que Huygens dit à la p. 94 (l. 5 et suiv.). Il s'agit ici d'une distinction des genres en genres diatonique, chromatique, enharmonique.

⁶⁸⁾ Il est assez connu que c'est seulement au douzième siècle qu'on a eu l'idée d'introduire un système de notes mesurantes, c.à.d. de notes indiquant par leurs formes la durée de chaque ton.

⁶⁹⁾ Portef. „Musica” f. 20v. Huygens cite ici — apparemment en 1691 ou plus tard, puisque la f. 20 r. se rapporte à un ouvrage de Werckmeister de 1691 (p. 88 qui précède) — l'édition „Claudii Ptolemæi Harmonicorum Libri Tres. Ex Codd. MSS Undecim primum Græce editus. Johannes Wallis recensuit, edidit, Versione & Notis illustravit, & Aucuarium adjecit. Oxonii, E Theatro Sheldoniano, An. Dom. 1682.

⁷⁰⁾ Cette table se rapporte au genre diatonique tendu décrit, avec d'autres genres, aux p. 167 et suiv. de l'éd. Wallis, p. 70 et suiv. de l'éd. Düring. Les valeurs numériques des longueurs successives des cordes sont données en notation sexagésimale, éd. Wallis, p. 172 (en fractions ordinaires dans l'éd. Düring, p. 73). Les intervalles du tétrachorde sont 10 : 9, 9 : 8 et 16 : 15.

Les lignes $\left\{ \begin{array}{l} \text{re } 133.20 \\ \text{ut } 150.0 \end{array} \right.$ ont été ajoutées par Huygens à la liste de Ptolémée.

	Diapason	
mi	60.0	
re	66.40	> 10.9*
ut	75.0	> 9.8
si	80.0	> 16.15
la	90.0	> 9.8
sol	100.0	> 10.9
fa	112.30	> 9.8
mi	120.0	> 16.15
re	133.20	* c. à d.
ut	150.0	10:9
		9:8, etc.

Hæc divisio proxime ad nostram hodie usitatam accedit, reliquæ tum Ptolemæi tum aliorum quas recenset longius recedunt. Sed ne hæc quidem ejusmodi est ut in Instrumentis Musicis ea uti possimus si plurium partium concentu utendum sit uti apud nos fieri solet. Erunt enim ut, sol; ci, mi; la, mi; quintæ ut et fa, ut et sol, re. at nequaquam re, la; sed multo minor⁷¹⁾. Item re, fa minor quam tertia minor⁷²⁾. Si igitur ad concentus ejusmodi tonis instruxissent instrumenta, invenissent defectum hunc, dixissentque supplendum altero superaddito *re* vel aliter. Quod cum non fecerint apparet concentum qualis nobis in usu est non cognovisse. Idque etiam ex varietate illa reliquarum divisionum

clarius liquet, quæ multo pauciores consonantias præbent.

Vult Zarlinus⁷³⁾ cantum vocalem per istos tonos incedere idque ita ut quæ intervalla imperfecta sunt suppleant sponte sua velut re, la. quod non potest fieri. si enim cantet diapente perfectam U, S, itemque S, r; tum descendendo diapason perfectam r, r: tum diapente perfectam r, l: ac porro deorsum tertiam majorem perfectam l, f; et hinc diapente perfectam f, u. Iam hoc *ut* non erit diapason ad illud primum *ut* unde incepit canere, sed altius commate integro⁷⁴⁾. Sic etiam si canat perfectis intervallis deorsum tertiam minorem f, r; ac rursus fursum diatess. r, s; ac rursus deorsum s, m; et fursum m, l: et deorsum tertiam majorem l, f; hoc fa non erit idem fa unde incepit cantus sed Commate gravius⁷⁵⁾. unde repetito novies hoc cantu circiter tono integro descendisset vox. Hoc vero nequaquam contingere experientia docet; ejusque

71) L'intervalle $\frac{40}{27}$ re—la est en effet inférieur à $\frac{3}{2}$.

72) L'intervalle $\frac{32}{27}$ re—fa est en effet inférieur à $\frac{6}{5}$.

73) Probablement Huygens fait ici allusion aux remarques de Zarlino dans le cap. 45 de la Parte II des „Istitutioni Harmoniche”: „Se nelle Canzoni seguitiamo cantando gli Intervalli prodotti da i veri e sonori Numeri; ovvero li temperati: e della risoluzione di alcuni dubij”. Zarlino pense que la voix produit toujours des intervalles justes. Comparez la p. 65 qui précède.

74) Cette observation s'accorde avec le contenu de la Pièce III C, de la p. 76 qui précède. Sont successivement parcourus les intervalles $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}$ qui, dans leur ensemble, ne constituent pas un intervalle $\frac{2}{1}$, mais un intervalle $\frac{81}{40} = \frac{81}{80} \cdot \frac{2}{1}$, c.à.d. un comma de plus qu'une octave.

75) Dans cet exemple les intervalles considérés $\frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}$ forment ensemble l'intervalle $\frac{80}{81}$, c.à.d. un comma.

ratio est quod nimis inhæret memoriæ primus tonus fa, ut ab eo tantum deprimatur vox. Quid igitur sit? Nempe vel ipso temperamento, quod adhiberi solet, vox utitur vel paulum diverso, sed quod idem efficiat tamen. Itaque non canuntur intervalla consonantia perfecta.

§ 12⁷⁶⁾. Putat Wallisius, in Appendice ad Ptolemæi Harmonica⁷⁷⁾, Musicam nostri avi solum genus diatonicum complecti, cum tamen chromaticum admisceat non eo modo quo veteres (non enim rectè illi) sed quomodo tantum ratio patitur. Imo cum et enarmonij quoque chordas usurpemus, quas veteres illi absurda quadam ratione adhibebant si unquam mere enarmonico genere cecinerunt.

Putat⁷⁸⁾ rationem 9 ad 8, et 10 ad 9 quæ tonos majorem et minorem constituunt aliquo modo concinniores esse quam e majoribus numeris compositos (quid vero de plane asymmetris diceret?) quod verum non est. Nam nec istæ proportionales quidquam auribus gratum consonant.

⁷⁶⁾ Portef. „Musica” f. 22r. Comparez la note 1 de la p. 375 du T. XIX. La f. 22—23 peut fort bien être antérieure à la f. 20 (note 69 de la p. 100 qui précède).

⁷⁷⁾ Appendix. „De Veterum Harmonica ad Hodiernam comparata”, p. 281 et suiv. La remarque de Wallis (p. 300) est formulée comme suit: „Nostra vero atate, vix aut ne vix aliud quam Diatonum intensum [in usu est]; aut quod huic suppar sit”.

⁷⁸⁾ Huygens fait probablement allusion à la p. 322 où Wallis combat la division du tétrachorde dans les intervalles $\frac{9}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{265}{243}$ (genre diatonique d'Euclide et d'Eratosthène et genre diatonique ditonide de Ptolémée) en alléguant qu'il s'ensuivrait pour la tierce mineure le rapport $\frac{32}{27}$ bien que la tierce mineure soit plus consonante que le ton entier $\left(\frac{9}{8}\right)$ „adeoque rationem exigere minoribus numeris exponendam”.

⁷⁹⁾ Pour autant que nous voyons les exemples donnés par Huygens ne se trouvent pas dans le traité de Wallis. Mais il applique (p. 324 et suiv.) le principe sur lequel reposent les énoncés de Huygens, principe qui consiste dans l'introduction dans l'intervalle mi—la d'un ton, situé entre fa et sol, appelé „fa acuta” ou „sol mollis” et formant avec mi l'intervalle $\frac{8}{7}$, avec la l'intervalle $\frac{6}{7}$; il intercale de même dans l'intervalle de la tierce mineure $\left(\frac{6}{5}\right)$ un ton qui forme respectivement les intervalles $\frac{11}{10}$ et $\frac{11}{12}$ avec les tons le plus bas et le plus haut de cette tierce. Huygens a appliqué cette méthode à d'autres cas, application justifiée par la remarque suivante de Wallis (p. 325): „Atque hæc quidem . . . adhibendæ forent divisiones, pluresque interponendæ voces, si resumenda essent Veterum Genera Enarmonica, Chromatica, variaque Diatonica”.

Ad interjicienda hemitonia chromatica putat⁷⁹) rectè facturos si duplicentur 9 et 8, et inter 18 et 16 ponatur 17 pro hemitonio inter fa, sol. similiterque duplicatis 10 et 9, inter 20 et 18 statuatur 19 pro hemitonio inter sol, la, absurdè prorsus, nec attendit talia ponenda hemitonia quæ quamplurimis chordis diatonicis consonent. In enarmonicis chordis eadem methodo utendum putat quod adhuc magis alienum est.

APPENDICE

AUX „NOTES SE RAPPORTANT À DES ÉCRITS DE MUSICOLOGUES ANCIENS”.

[1686]¹⁾

TONS DE MA FLUTE [Fig. 1]

[Fig. 1] ²⁾	u	g. .(?) open ⁴⁾	u × 8 open
0 1	r	8 open	r × 8 ₇ open
	m	8 ₇ open	
	f	8 ₆ open	f × 5 open
0 2	f	8 ₇ 6 ₅ open	f × 4 ₈ open
	l	1 2 3 toe ⁴⁾	
	c	1 2 toe	
0 3	b	1 2 4 5 toe	
	u	1 3 toe	u × 2 3 toe
	r	3 toe	r × 1 8 open
0 4	m	1 8 ₇ open	m ^b 3 4 5 6 7 toe
	f	1 6 ₇ open. Soufflez un peu fort	f × 1 2 3 4 6 toe
0 5	f	1 2 3 4 toe	f × 1 2 3 4
	l	1 2 3 4 6 7 8 toe	of 1 4 5 open
0 6			1 2 3 5 7 toe
	c	1 2 3 5 6 toe	c 1 2 3 6 toe, met de 5 daer bij beg[in]nen ⁵⁾
0 7	b	1 2 3 5 6 7 toe	u 1 2 5
	u	1 2 5 toe	r 1 2 3 4 7

1 est le trou du pouce 8 celui du petit doigt.
la ligne — dessous les chiffres 1 ³⁾ signifie que ce
trou doit estre ouvert en partie.

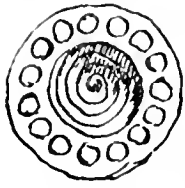
¹⁾ La Pièce „Tons de ma flute” mentionnée à la p. 87 de l’Avertissement, est empruntée à la p. 231 du Manuscrit E. La p. 227 porte la date du 5 mai 1686 et la p. 239 se rapporte à une publication de septembre 1686.

²⁾ Comparez la Fig. 124 de la p. 377 du T. XIX.

³⁾ Et apparemment aussi sous d’autres chiffres.

LA SIRÈNE (?)

[Fig. 2]



conçu l'idée de la sirène.

On trouve sur les feuilles du portef. „Musica“ quelques figures sans texte, qui ne se rapportent pas toutes à des instruments de musique. Nous les publierons parmi les Varia; mais nous faisons une exception pour la Fig. 2 indiquant que, pour mesurer les nombres des vibrations correspondant à des tons déterminés (comparez sur ce sujet la p. 375 du T. XIX), Huygens a peut-être

⁴⁾ open = ouvert; toe = fermé.

⁵⁾ Huygens dit ici que pour obtenir le ton c de la manière indiquée il faut au commencement tenir aussi le trou 5 fermé.

V.

NOTES SE RAPPORTANT À DES ÉCRITS
DE MUSICOLOGUES MODERNES.



Avertissement.

Ces notes datent d'après 1671* puisqu'elles sont empruntées en majeure partie au groupe de feuilles 1 — 45 déjà mentionné deux fois dans les Avertissements précédents. D'autre part le § 4b, emprunté au Manuscrit E, est de 1674. Le § 8, emprunté au portefeuille „*Physica varia*”, ne peut être antérieur à 1680 puisqu'il traite d'une œuvre de Cl. Perrault qui parut en cette année¹⁾. Le § 1c, emprunté au Manuscrit G, date de 1691, et le § 6, emprunté au même Manuscrit, doit être environ de la même date. Le § 9 (sur Werckmeister) est de 1691 au plus tôt.

Les remarques de Huygens se rapportent à Zarlino, Salinas, Maillard, Merfenne (et Vincentio Galilei), Kircher (parlant e.a. de Guido Aretinus), van der Elft, Simpson, Perrault, Werckmeister et Salmon, ce qui ne veut pas dire qu'on ne rencontrera le nom d'aucun autre musicologue moderne dans cette Pièce-ci ou — nous songeons à Artusi²⁾ — dans les Pièces antérieures. D'autre part Merfenne a déjà été cité bien des fois dans les Pièces précédentes. Il en est de même pour Zarlino et Salinas. Nous avons rangé les auteurs nommés dans l'ordre indiqué d'après leurs dates de naissance.

* Voyez aussi la note 83 de la p. 123.

¹⁾ D'autre part le § 8 ne peut être postérieur à 1689 puisque Isaac Vossius qui décéda en février 1689 y est mentionné comme une personne encore vivante.

²⁾ Voyez la p. 74 qui précède.

Il nous est impossible d'énumérer ici tous les sujets traités.

Les notes sur Salinas et Zarlino se rapportent surtout à la question du tempérament traitée aussi dans la *Divisio Monochordi* et dans le *Cycle Harmonique*. Puisque ce dernier écrit n'a reçu sa forme définitive qu'en 1691 on peut considérer les remarques sur ces deux auteurs comme des notes préparatoires.

Huygens a voué beaucoup d'attention à Kircher dont il paraît avoir étudié soigneusement l'importante *Musurgia*. Il critique les recherches expérimentales du jésuite polymathe sur la question de l'existence ou la non-existence du son dans le vide et ses considérations sur les expériences de Merfenne servant à déterminer les fréquences des vibrations des cordes. Il est question en outre du célèbre fragment que Kircher prétend avoir découvert de la musique d'une ode de Pindare sur l'authenticité duquel les musicologues disputent encore aujourd'hui³⁾.

En lisant van der Elst Huygens fait surtout attention à son essai de justification théorique de la défense des quintes, octaves, etc. successives, question brûlante à laquelle il a aussi réfléchi lui-même. On l'a toujours su puisqu'il en dit un mot dans son livre posthume, le *Cosmotheoros*⁴⁾.

Observons en dernier lieu qu'il n'approuve guère les remarques de Werckmeister sur la représentation géométrique des différents intervalles ni aussi le nouveau tempérament que cet auteur propose, tempérament qui, soit dit en passant, n'est nullement identique avec la gamme uniformément tempérée dont on a parfois voulu lui attribuer la paternité

³⁾ Voyez la note 106 de la p. 126 qui suit.

⁴⁾ Voir pour quelques remarques historiques sur cette question la note 119 de la p. 129 qui suit, où l'on trouve aussi un passage de Huygens sur ce sujet dans lequel il ne désapprouve pas absolument une suite de deux octaves. Quant au *Cosmotheoros*, il sera publié dans le T. XXI.

NOTES SE RAPPORTANT À DES ÉCRITS DE MUSICOLOGUES MODERNES.

§ 1. a¹). **Salinas**: errat cum hexachordon minus item diapason et semiditonum multifque alias consonantias putat Harmonicè et Arithmeticè dividi a consonis intervallis. æque ac diapason, diapente, hexachordon majus et aliæ consonantiæ²). Tonos 12 cum Zarlino et plerisque alijs statuit³).

¹) Portef. „Musica”, f. 27. r. Les notes du § 1 se rapportent à l'ouvrage de Salinas „De Musica” de 1577 cité dans la note 7 de la p. 45.

²) Nous n'avons pas réussi à attacher un sens raisonnable à cette observation. Dans le Cap. 16 du Lib. II, intitulé „De consonantijs perfectis, & imperfectis. & quid sit Arithmeticè, & Harmonicè diuidi in consonantijs” Salinas parle de la division arithmétique et harmonique des intervalles. Un intervalle déterminé par le rapport $p:q$ des longueurs des cordes (où nous supposons $p < q$) est dit être divisé arithmétiquement dans les intervalles $p:r$ et $r:q$, lorsque r est la moyenne arithmétique de p et de q ; harmoniquement, lorsque r est leur moyenne harmonique. L'octave ($1:2$) se divise arithmétiquement en une quarte inférieure ($3:4$) et une quinte supérieure ($2:3$), puisque les nombres 2, 3, 4 forment une suite arithmétique (nous rappelons que dans l'intervalle considéré p correspond au ton le plus haut et q au ton le plus bas), harmoniquement en une quinte inférieure et une quarte supérieure, puisque les nombres 3, 4, 6 forment une suite harmonique. Ces deux divisions sont également possibles dans les cas de la quinte, de la tierce majeure, et de la sixte majeure: la quinte se divise de deux manières différentes en une tierce majeure et une tierce mineure, suivant les séries 4, 5, 6 et 10, 12, 15; la tierce majeure en un ton majeur et un ton mineur, suivant les séries 8, 9, 10 et 36, 40, 45; la sixte majeure en une quarte et une tierce majeure, suivant les séries 3, 4, 5 et 12, 15, 20. Mais ces divisions ne sont pas possibles dans les cas de la quarte, de la tierce mineure, et de la sixte mineure, à moins qu'on ne voulût introduire des intervalles dissonants.

En admettant que dans la première ligne du texte il faille lire *diatessaron* au lieu de *diapason* („diapason” étant sans doute une faute d'écriture puisque l'octave ne peut guère être mentionnée entre la sixte mineure et la tierce mineure; d'ailleurs le „diapason” est mentionné de nouveau dans la troisième ligne, cette fois avec la quinte et la tierce majeure) on peut conjecturer que Huygens veut faire ressortir cette différence entre les deux groupes d'intervalles. Mais il n'est pas clair quelle est l'erreur qu'il croit devoir imputer à Salinas: dans le chapitre mentionné (16 du Lib. II) celui-ci dit lui-même que la quarte et la tierce mineure ne se divisent pas arithmétiquement et harmoniquement, comme il en est pour l'octave. En cet endroit il ne parle pas, il est vrai, de la sixte mineure. Mais dans le Cap. XXV du Lib. II il traite de nouveau la question des divisions harmonique et arithmétique, et cette fois il dit expressément que la sixte mineure, ainsi que la quarte et la tierce mineure, n'admettent pas ces divisions.

³) Huygens entend sans doute parler ici des 12 modes de la musique grecque et de la musique d'église (comparez les p. 69 et 70 qui précèdent) traitée par Salinas dans le Cap. XI du Lib. IV intitulé „Quod nomina, quibus harmonias Græci, & antiqui Latini modos appellabant, mirificè quadrant duodecim modis, eo quo positi sunt ordine collocatis, neque aliter dispositis conuenire possint”.

§ 1. *b*⁴⁾). 1577 editus. Salinas lib. 3 cap. 27 de prava constitutione cujusdam instrumenti scribit in Italia ab annis 40 instrumentum fuisse fabricatum, incerto auctore, in quo tonus omnis in 5 partes æquales divisus erat, diapason in 31, semitonium majus 3, minus 2 partes habebat. Idque a magni nominis musicis in pretio habitum. Deinde docet quomodo tonum illi in 5 partes æquales diviserint, nempe sumendo ab utroque termino semitonium majus, et ab horum terminis rursus semitonium minus. quam divisionem merito carpit quia non hoc modo in 5 æqualia tonus secatur⁵⁾. Sed quod sensui ingratum esse hanc positionem asserit, fallitur. Recte enim se habet ad sensum, et a vera nihil pene differt ut demonstrabo. Dicit non credere se quantum temperamenti genus inveniri posse. dicit illos semiditono tribuere dieses ejusmodi 8, ditono 10, diatessaron 13, diapente 18, diapason 31. quod recte. Sæpe se expertum ait hoc modo disponere instrumentum sed ingratum auribus omnium sonum prodidisse, eoque hoc temperamentum ab omni harmonica ratione tam perfecti quam participati instrumenti⁶⁾ abhorreere conclusit. Toto capite de hoc agit. Proculdubio non bene experimentum instituit.

§ 1. *c*⁷⁾). Franciscus Salinas De Musica lib. 3 cap. 15⁸⁾), tria genera Temperamenti

⁴⁾ Portef. „Musica” f. 32 r. Le sujet du § 1 *b* est aussi considéré dans le (nouveau) Cycle Harmonique; voyez la p. 157 qui suit. Mais en cet endroit il n'est pas question, comme ici, de la manière dont, dans la construction de l'instrument considéré, s'effectuait la division du ton en cinq intervalles.

⁵⁾ La construction se fait comme suit (Salinas, l.c. p. 165). Considérons un ton mineur (intervalle 10 : 9) appelé C—D (ce qui est en effet C—D dans le syntonon de Ptolémée). Ce ton mineur est la somme d'un demi-ton majeur et d'un demi-ton mineur (puisque $\frac{10}{9} = \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24}$). En montant à partir de C d'un demi-ton majeur on parvient à Des (D molle enarmonium). En descendant d'autre part à partir de D d'un demi-ton majeur on parvient à Cis (C chromaticum). Il faut ensuite descendre à partir de Des d'un demi-ton mineur et monter à partir de Cis du même intervalle. Les intervalles obtenus sont alors

C		C. chrom.	D molle enarm.		D
1	$\frac{128}{125}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{625}{576}$	$\frac{10}{9}$
	dièse		dièse		dièse

Quant au deuxième et au quatrième intervalle, ce ne sont pas des dièses, de sorte que le ton n'est pas divisé en cinq intervalles égaux.

⁶⁾ Le terme „harmonica ratio perfecti instrumenti” s'applique apparemment au système harmonique naturel, tandis que la „harmonica ratio participati instrumenti” désigne le tempérament du ton moyen (voyez pour le terme „mezzo tuono participato” l'Avertissement de la „Divisio Monochordi” à la p. 45 qui précède).

⁷⁾ Manuscrit G, f. 92 r. Les f. 79 et 93 partent respectivement les dates du 1 janvier et du 28 mars 1691.

⁸⁾ P. 143 du livre de Salinas.

inventâ ait, quorum primum sit ⁹⁾, ut Comma, cujus ratio est 81 ad 80, dividatur in partes æquales tres; quarum una augeatur Tonus minor, (cujus ratio 10 ad 9) et duabus diminuatur Tonus major (cujus ratio 9 ad 8).

Secundum Temperamentum statuit ¹⁰⁾ in quo Comma in 7 partes æquales distribuitur, quarum partibus 4 diminuatur tonus major; minor verò augeatur tribus.

Denique et Temperamentum Tertium idque optimum, exponit cap. 22 ¹¹⁾.

Caput 27 eodem lib. 3^o ¹²⁾, hanc habet inscriptionem:

De prava constitutione cujusdam instrumenti quod in Italia citra quadraginta annos fabricari cœptum est, in quo reperitur omnis Tonus in partes quinque divisus.

Ait ignoti authoris esse, et archicymbalum vocatum. In eo semitonium majus habere $\frac{3}{5}$ toni. Semitonium minus $\frac{2}{5}$. A quibusdam magni nominis musicis in pretio habitum dicit et usu receptum, eo quod omnis in eo sonus habeat omnia intervalla et omnes consonantias (ut illis inquit videtur) inferne et superne, et post certam periodum ad eundem aut æquivalentem sibi sonum post 31 intervalla reditur &c.

Diapason in partes 31 æquales ipsis divisa est, quarum partes 5 habet tonus, semiditonum seu tertia minor 8; ditonum seu tertia major 10; diatessaron 13; diapente 18.

Ex ijs quæ de modo dividendi toni in partes 5 exponit quo illi utebantur, apparet ipsos ignorasse qua ratione id perfici posset. Hinc contra illos argumentatur, non dividere eos tonum in quinque dieses ut putabant. Deinde factò experimento *tantum se ait invenisse consonantiarum imperfectionem ut eam aures pati non possent.*

Hanc tamen divisionem, atque hoc temperamentum optimum ¹³⁾ esse nec sensibilibiter ab illo tertio quod in usu est, differre, ostendimus inventa per Logarithmos vera divisione octavæ in 31 partes æquales; sunt enim diapente $\frac{1}{116}$ commatis majores quam in vulgari illo Temperamento, adeo ut paulo meliores efficiantur.

Cap. 28 ¹⁴⁾ vult in violis ¹⁵⁾ semitonia omnia esse æqualia, ut olim puto Aristoxe-

⁹⁾ Ce tempérament est traité dans les cap. 15—17 du Lib. III.

¹⁰⁾ C'est le tempérament dit de Zarlino; voyez l'Avertissement de la „Divisio Monochordi” ainsi que la p. 168. Salinas le considère dans les cap. 18—20 et le compare avec le précédent dans le cap. 21.

¹¹⁾ C'est le système du ton moyen; consultez l'Avertissement de la „Divisio Monochordi”. Salinas en traite dans le cap. 22 et le compare avec le précédent dans le cap. 23. Il s'agit toujours du Lib. III.

¹²⁾ L.c. p. 164. Voyez la p. 157 qui suit.

¹³⁾ Voyez la p. 153 et suiv. (Pièces se rapportant au „Cycle Harmonique”).

¹⁴⁾ Cap. 28 „De alio instrumentorum genere, quæ Lyræ, et vulgo Violæ vocantur, in quibus alio modo, quam in Organis, ac Cymbalis imperfectio Participata reperitur” (p. 166—168).

¹⁵⁾ On entend par „Violæ” un „genus cythararum, quarum chordæ digitis, aut pectine pulsantur”.

¹⁶⁾ Aristoxène considère en effet le demi-ton comme la moitié du ton, ce dernier étant défini comme la différence d'une quinte et d'une quarte. C'est pourquoi sa division de l'octave est souvent

nus¹⁶⁾. Sed nihil vetat quin efficiantur inæqualia ut in cymbalis nostris et organis, quoniam non opus est chordas omnes iisdem divisionibus secari, a transversarijs illis collo illigatis, quæ ijs locis ubi opus est, uni chordæ attribui possunt, ac separatim deligi, ut vera semitonia efficiant.

Cap. 31¹⁷⁾. Paralogismus est, quod lineam extrema et media ratione continuè divisam putat exhibere divisiones semitoniorum in violis.

§ 2¹⁸⁾. Zarlino lib. 3 cap. 6¹⁹⁾. Et si Didymus ac Ptolemæus tertiam majorem perfectam inter secundam quartamque chordam collocaverint, neuter tamen eam consonantijs adnumeravit²⁰⁾. Mersennus et alij contrarium dixerunt²¹⁾. unde putabam illos alia Ptolemæi scripta legisse, quorum ego copiam non habuissém.

jugée identique avec celle du système de la gamme uniformément tempérée; voyez p. e. R. Westphal „Aristoxenus von Tarent. Melik und Rhythmik des klassischen Hellenentums“, Leipzig 1883, p. 251 et suiv.; ou Th. Reinach „La musique grecque“, Paris 1926, p. 22. On peut toutefois douter de la justesse de cette identification, puisqu' Aristoxène ne parle pas d'un tempérament, mais exprime la conviction que p. e. la quinte juste vaut sept demi-tons dont l'octave en contient douze. Zarlino dans ses „Sopplementi“ de 1588 traite d'Aristoxène à la p. 161 et dans sa „Tauola“ à la fin du livre résume ce passage comme suit: „non è da credere, e'hauesse detto semplicemente [Aristosseno], che'l Tuono si potesse diuidere in due parti eguali & proportionali, nel modo ch'ei lo diuide“. Comparez sur ce sujet les notes 69 et 70 de la p. 121 qui suit.

¹⁷⁾ Cap. 31 „Quòd propter diversam trium temperamentorum in Organis inventam constitutionem non varietur in Violis temperamentum superius positum, sed idem semper, immotumque manere contingat: et qualiter data quævis linea recta in quocunque segmenta invicem proportionalia dividenda est“ (p. 172—174).

En cet endroit Salinas veut indiquer sur une corde les points où il faut successivement la presser pour faire monter chaque fois le son d'un demi-ton. A cet effet il divise la corde *ab* en *e* en moyenne et extrême raison, *ae* désignant la plus grande partie; ensuite de la même manière *eb* en *f*, *ef* étant la plus grande partie etc. jusqu'à ce qu'il a obtenu douze points de division *e*, *f*, *g*, *h*, *i* etc. Il pense que lorsque, en partant de *b*, l'on presse successivement la corde en ces douze points, le son montera chaque fois d'un demi-ton et qu'on obtiendra l'octave du ton de la corde entière en la pressant au point *a*. C'est ce que Huygens appelle à bon droit un paralogisme.

¹⁸⁾ Portef. „Musica“, f. 41—42. Voyez sur Zarlino la note 2 de la p. 169 du T. X, sur ses ouvrages la note 8 de la p. 45 qui précède.

¹⁹⁾ „Istitutioni Harmoniche“ Parte III, cap. 6 intitulé „Diuisione delle Consonanze nelle Perfette & nelle Imperfette“ (p. 188).

²⁰⁾ Voyez sur ce sujet notre Avertissement sur „la Théorie de la Consonance“. Huygens ne fait, comme on voit, aucune différence entre Ptolémée et les musicologues antérieurs.

²¹⁾ Huygens peut avoir raison pour les „alii“ (voyez, à la p. 27 qui précède, notre citation de Tite-louze); mais il se trompe en affirmant que „Mersennus contrarium dixit“. Nous n'avons du moins pu trouver aucun passage de Mersenne où celui-ci „contrarium dicit“. Il s'exprime fort

Zarlin. Ragionamento 4. proposta 1. dicit Temperamentum ab alio — quem qui fuerit nescit — et casu fuisse inventum²²). Item lib. 4. cap. 12. Supplementorum Musicalium multum laudat hoc inventum²³). Institut, lib. 2. cap. 42²⁴). Temperamentum non optimum docet in quo 3^{tiac} majores et minores æque multum a perfectione absunt, et quintæ quartæque $\frac{2}{3}$ commatis. Et cap. 43. demonstrare contendit aliud temperamentum tolerabile non dari, et improbat illud quod tono majori adimit $\frac{1}{2}$ comma ac tantundem tono minori addit. quod tamen verum atque optimum est temperamentum²⁵). sed ab illo tunc non adhuc bene perspectum. ita enim proponit ut 5^{tas} et 4^{tas} relinquat perfectas²⁶).

Salinas²⁷) idem explicat et pretend l'avoir trouvé aussi bien que Zarlin, c'est à dire l'explication ou démonstration. il parle seulement des Instit.^{ons} de Zarlin et non pas des démonstrations ou le vray temperament docetur²⁸), et que Zarlin dit avoir esté imprimées auparavant le livre de Salinas²⁹).

clairement en 1633 à la p. 257 de ses „Questions harmoniques dans lesquelles sont contenues plusieurs choses remarquables pour la Physique, pour la Morale, & pour les autres sciences” (Paris, Jaques Villery); on y lit: „Certainement les Anciens ne connoissoient pas si bien les degrez de la Musique que ceux de maintenant; car ils ne mettoient que le ton majeur, & le demy ton Pythagoricien, & n'usoient point des deux tierces que nous auons, & qui font quasi toute la variété de la Musique, qui seroit tres-imparfaite sans elles. Et bien que Ptolomée ayt mis le ton majeur, & le mineur, & par consequent le demy ton majeur, & les 2 tierces, avec les 2 sextes, dans l'une de ses especes de la Diatonique, neantmoins il ne les a pas admises pour consonances; Ce qui fait voir tres-clairement qu'il n'en a point reconnu l'excellence, la douceur, & l'utilité”.

²²) „Dimostrazioni Harmoniche.” Ragionamento IV. Proposta I „Potiamo dimostrare nel Genere diatonico la Compositione del Monochordo regolare”. Zarlino ne dit pas nettement qu'à son avis le tempérament a été trouvé par hasard; il observe (p. 200) que l'inventeur, qu'il l'ait trouvé par hasard ou bien par réflexion („à caso, ouero studiosamente”), a découvert quelque chose de bien remarquable.

²³) Dans le Cap. XII du Libro Quarto des „Sopplementi” Zarlino dit e.a.: „Partecipazione ô Temperamento laqual in uerità è stata di non poco giouamento alla Musica, & di non poco commodo à quelli che trattano cotali Istrumenti; all' Autor delquale, sia stato che si voglia, si dee hauer molto obligo; del che, per quanto fin' hora si uede, non è alcuno, che n'habbia reso la vera cagione; ne io anco uoglio prometter di far questo; ma solamente diro quel che sento, & ch' io tengo per fermo, fin che si troui raiglor ragione”.

²⁴) „Istituzioni Harmoniche” Parte II, Cap. 42 „Quel che si dee osservare nel temperare ouero accordare gli Istrumenti artificiali moderni” etc. Il y est question du système dit de Zarlino. Voyez l'Avertissement de la „Divisio Monochordi”.

²⁵) C'est le système du ton moyen. Voyez l'Avertissement de la „Divisio Monochordi”.

²⁶) „Istituzioni Harmoniche”, Parte II, cap. 43. Zarlino y critique en effet le système du ton moyen en disant à tort que seuls les tons entiers sont rendus égaux l'un à l'autre, tandis que les autres intervalles garderaient leurs valeurs naturelles.

²⁷) „De Musica”, Lib. III, cap. 14 (p. 140): „Quod non sit nova consonantiarum imperfectarum in

Mon opinion est que le Temperament veritable ³⁰⁾ a esté longtemps auparavant pratiqué par les organistes &c. seulement a l'ouïe en diminuant un peu les quintes, sans examiner aucunement la proportion de cette diminution qui n'appartenoit qu'aux geometres. Et la plupart des organistes l'ignorent encore et j'en ay trouvé qui nioient que les tierces majeures et 6^{tes} mineures fussent justes.

Zarlino Instit.^s et Demonstr. eodem anno 1589 editas habeo. Supplementis adscribitur annus 1588 ³¹⁾. Nescio an non Institutiones ante editæ fuerint ³²⁾. At in institutionum editione hac allegat demonstrationum opus, de participatione seu temperamento loquens parte 2^{da} cap. 41. ubi trium temperamentorum meminit ³³⁾, sed unum tantum explicat et admittit ubi $\frac{2}{7}$ commatis diminuuntur 5^{tae} ³⁴⁾. At in demonstrationibus prefert omnibus illud ubi $\frac{1}{4}$ commatis aufertur 5^{tis} ³⁵⁾. Hinc plane opinor Institutionum secundæ editioni aliquid fuisse adjectum ³⁶⁾.

Cap. 47. Parte 2 Instit. ³⁷⁾ Clavicymbalum suæ inventionis describit ubi adjunctæ sunt chordæ Enarmonicæ præter Chromaticas. Tonum ibi ait divisum in 4 partes. Ego in 5 partes eum divido. Palmulas bene ordinat, sed tamen difficultas erit in sonando quod enarmonicarum et chromaticarum vicinia faciet ut sæpe duæ simul pro una deprimantur.

Il fait fort valoir ce qu'il scait de la geometrie, ce qui ne regarde que les proportions comme tous les autres qui ont fait les docteurs en musique Boethius, Glareanus, Salinas.

Il a brouillé tout par le mélange de la musique ancienne et de ses termes parmi la moderne ³⁸⁾. comme en nommant les tons par les noms des Grecs hypate hypaton trite diezeugmenon &c. et parlant toujours des tetrachordes.

Musici instrumentis positio, sed eas semper usus obtinuerit: et omnino necessario ponendas esse". ²⁸⁾ „Dimostrazioni Harmoniche", Ragionamento IV, Prop. I, p. 198 et Rag. V, Prop. I, p. 259.

²⁹⁾ Ceci est en effet parfaitement juste. Les „Dimostrazioni Harmoniche" parurent en 1571 et 1573, l'ouvrage de Salinas en 1577.

³⁰⁾ Le tempérament du ton moyen.

³¹⁾ Les „Sopplimenti Musicali" mentionnés plus haut (note 23). Le Catalogue de la vente de 1695 des livres de Chr. Huygens (p. 389 du T. XIX) mentionne en effet (Libri Mathematici in Folio N°. 48) „Tutte le Opere di Gioseffo Zarlino con i Supplementi Musicali, Ven. 1588".

³²⁾ Elles avaient en effet été publiées en 1558, 1562 et 1573.

³³⁾ Dans le chapitre mentionné („che negli Istrumenti artificiali moderni non si adopera alcuna delle mostrate specie Diatoniche") on lit à la p. 152: „in tre maniere (lasciando alcuni altri modi da un canto per breuità), si può fare il Temperamento di qual si uoglia de i nominati Istrumenti, & la Distributione del nominato Còma, etc."

³⁴⁾ Savoir dans le Cap. 42 de la Parte II des „Istitutioni Harmoniche".

³⁵⁾ Ce système est annoncé comme une nouvelle découverte à la p. 241 dans le Ragionamento V

Il se glorifie beaucoup d'avoir trouvé qu'on chante aujourd'hui l'espèce de diatonique que Ptolomée nomme *syn-tonon* ³⁹⁾. ce qui est vrai; s'entend mêlée des chordes chromatiques. Dans ses démonstrations harmoniques ou il enseigne le bon et véritable temperament ⁴⁰⁾ il n'ajoute pas les demitons ou tons chromatiques, ni même le C[♭]. Et ainsi il n'a pu remarquer deux quintes et 2 quarts que l'on gagne par ce temperament. qui sont C[♭]F et CF[♯] quintes et F[♭]C[♭], F[♯]C quarts.

Ces consonances étoient imparfaites dans le monochorde diatonique ou les quintes et tierces sont parfaites. Et le remède du double D ou RE ne faisoit rien à celle-ci, quoique il donnaît la quinte parfaite RL, et par conséquent la quarte parfaite LR, comme il a remarqué ⁴¹⁾; mais il ne devoit pas dire que c'étoit gagner 2 quintes et 2 quarts car ce n'est qu'en considérant le système de 2 octaves de suite depuis L à L³ ou il a deux fois RL et LR.

En ajoutant les tons chromatiques aux diatoniques on n'avoit pas le S[♯], ni le M[♯].

Sur les instrumens qui n'avoient que les sons diatoniques ils ne pouvoient pas faire les cadences RV[♯]R, SF[♯]S, LS[♯]L.

Cap. LXXIX *tertiæ partis instit.* ⁴²⁾ existimat antiquos musicos cantum ita junxisse liræ citharæ alijsque organis ut fuerit quod nunc appellatur un faux bourdon d'octave quinte et quarte. Vel etiam absque cantu, putat altera manu easdem chordas istius faux bourdon sonare solitos, dum alterâ cantilenam isti consonantiæ accommodatam exprimebant simplicibus tonis. Et hæc sententia vero non est absimilis ⁴³⁾.

des „Dimostrazioni Harmoniche”. Il est expliqué aux p. 259 et suiv.

³⁶⁾ En effet, le passage considéré (note 33) ne se trouve pas encore dans la troisième édition des „Ist. Harm.” Huygens appelle deuxième édition celle de 1589 qui est en réalité la quatrième.

³⁷⁾ „Ist. Harm.” Parte II, Cap. 47 „In che maniera possiamo inspessare il detto Monochordo con le chorde Enarmoniche”.

³⁸⁾ „Dimostrazioni Harmoniche”, Rag. IV, passim.

³⁹⁾ Zarlino parle de ce sujet dans les „Ist. Harm.” Parte II, cap. 16 „Quel che sia Genere, e di tre generi di Melodia, o Cantilena appresso gli Antichi, e delle loro specie”. Nous ignorons à quel passage Huygens fait allusion en disant „Il se glorifie beaucoup”.

⁴⁰⁾ Voyez la note 35.

⁴¹⁾ „Dimostr. Harm.” Rag. V, p. 263.

⁴²⁾ „Ist. Harm.” Parte III, cap. 79 „Delle cose che concorreuano nella compositione de i Generi” (p. 372). Zarlino ne se sert pas de l'expression „faux bourdon”; il parle comme suit: „Et io tengo per fermo, ch' alcune delle chorde de i loro Istrumenti erano accordate. . . per Ottava, per Quinta, & per Quarta; & l'Harmonia che usciva da queste chorde, sempre si udiua continuata & senz' alcuna quiete, mentre sonauano: & dopoi sopra di esse faceuano vna parte al modo loro con l' altre chorde più acute”.

Cap. 75 parte tertia Inſtit. Zarl.⁴⁴⁾) incompoſitum intervallum vocatur ex. gr. ſemiditonus in Genere chromatico, ditonus in Enarmonio quod illic abſque ullo ſono medio accipiantur. Eſt enim MF[♯]L tetrachordum chromaticum. MM[♯]FL tetrachordum enarmonium. Idem ditonus et ſemiditonus in genere diatonico vocantur intervalla compoſita. Non bene mihi videntur uti ſigno * ad notandos ſonos enarmonios. melius enim ſignis [♯] et [♭] omnia perficiuntur, quorum illud indicat appoſitionem ſemitonij minoris ſurſum ſeu in partem acutiorem; alterum vero remiſſionem ſimilis ſemitonij deorſum ſeu in partem graviorem.

Cap. 74 ibid.⁴⁵⁾). Si ad veterum normam cantum componere libeat, nihil vetat generibus quibuſque ſimpliciter uti; ſi vero concentum deſideremus qualis hodie viget, fruſtra conabimur uti chromatico vel enarmonio ſolis.

Cap. 19. Rag. 1⁴⁶⁾). Male ſupponit terminos datos quibus medius prop. harmonicè inveniendus eſt diſferre inter ſe unitate. deinde in demonſtratione plane παραλογίζει.

Duodecima, octava, ſexta major, quinta a tono intermedio conſono harmonice dividuntur non autem 6^a minor licet ipſa quoque tonum intermedium conſonum bifariam recipiat.

§ 3 a⁴⁷⁾). Maillard⁴⁸⁾) eſcrit que l'octave contient moins de 6 tons.

Salinas croid⁴⁹⁾) que la fixte mineure ſe diviſe authentiqument et harmoniquement par la tierce mineure en bas et par la majeure, ce qui eſt faux. Et il aſſure la meſme choſe de pluſieurs autres conſonances ou cela n'eſt pas vray non plus.

§ 3 b⁵⁰⁾). P. Maillard des modes imprimè 1610⁵¹⁾). Chap. 10⁵²⁾). Il parle de l'addition

⁴³⁾ Comparez ſur le faux-bourdon ici conſidéré la p. 65 qui précède.

⁴⁴⁾ „Iſt. Harm.” Parte III, cap. 75 „Che 'l Diatonico può procedere nelle ſue modulationi per gli Intervalli di Terza maggiore, & di minore; & che ciò non faccia variatione alcuna di Genere”.

⁴⁵⁾ „Iſt. Harm.” Parte III, cap. 74 „Che la Musica ſi può uſare in due maniere; & che le cantilene, che compoſgono alcuni de i Moderni, non ſono d'alcuno de i due nominati Generi”.

⁴⁶⁾ „Dimoſtr. Harm.” Rag. I, Prop. 19 „Tra due dati termini di qual ſi voglia proportioni, ſi può ritrouar' il mezano: il quale conſtituiſca la Proportionalitè harmonica; ouer quello che faccia la Contr'harmonica, ne i ſuoi termini radicali”.

⁴⁷⁾ Portef. „Musica”, f. 31 v.

⁴⁸⁾ Pierre Maillard, né vers 1550 à Valenciennes, devint en 1583 chanoine et chantre de la cathédrale de Doornik (Tournay). Il décéda en 1610. Voyez ſur ſon ouvrage la note 51; la remarque citée ſ'y trouve à la p. 11 du Ch. III.

⁴⁹⁾ Comparez la note 2 de la 111 qui précède. Nous y avons déjà dit ne pas ſavoir à quel endroit de Salinas Huygens fait alluſion. Nous n'avons pas réuſſi non plus à trouver chez lui un terme qui pourrait être rendu par le mot „authentiquement”.

⁵⁰⁾ Portef. „Musica”, f. 34. r.

⁵¹⁾ Voici le titre complet de cet ouvrage: „Les Tons, ou diſcours, ſur les modes de musique, et les

du Sy aux 6 notes de Guido, et mefine de o pour huitième qui fait l'octave du Vt⁵³). Et dit que l'an 1574 qu'il demouroit a Anvers on ne parloit entre les musiciens que de ces nouvelles notes. Il meprise⁵⁴) cette invention, disant qu'apres le LA on fait suivre tantost un ton entier et tantost un demi-ton, et que partant on ne scauroit donner un certain nom a la note apres le LA: *voila une bonne raison!*

Il loue⁵⁵) extremement l'invention des 6 notes de Guido et croit qu'il ait voulu indiquer par la les 6 modes authentiques⁵⁶). Et comme le Sy ou Ci ne peut constituer un mode pour n'avoir de 5 en haut ni 4 en bas, c'est pour cela⁵⁷) qu'il croit ce ton indigne d'avoir un nom.

Il dit⁵⁸) que Eric Puteanus dans son traité Musathenum ajoute aux 6 notes de Guido le BI⁵⁹). Il avoue⁶⁰) que par cette methode on apprend facilement a chanter

tons de l'église, et la distinction entre iceux, de Pierre Maillart Valencenois, chantre et chanoine de l'église cathedrale de Tournay: Divisez en deux parties: ausquelles a esté adioustée la troisieme, par le dict Autheur, en laquelle se traite des premiers elements et fondemens de la Musique". A Tournay. Chez Charles Martin Imprimeur Juré, au S. Esprit. 1610.

⁵²) L.c. p. 61. Chap. X „Où est respondu à aucunes obicctions”.

⁵³) En marge: Il met l'invention de Guido a l'an 1024 felon Genebrardus. Buttler met l'an 960. Maillart cite Genebrardus à la p. 49.

Gilbert Genebrard, érudit et prélat français, né à Riom en 1537, mort a Semur en 1597, publia un grand nombre d'ouvrages dont beaucoup sont des traductions.

Charles Buttler naquit en 1599 à Wycombe et décéda le 29 mars 1647 à Wootton. Il écrivit „The Principles of musick, in singing and setting; with the twofold use thereof, ecclesiastical and civil”, London 1636.

⁵⁴) L.c. p. 64.

⁵⁵) Maillart parle de l'invention de Guido aux Chap. IX (p. 49 et suiv.) et X (p. 65).

⁵⁶) L.c. p. 50, 57 et suiv.

⁵⁷) L.c. p. 52.

⁵⁸) Maillart cite (p. 66 et suiv.) la „Musathena” d'Erius Puteanus. Puteanus (van de Putte, Dupuy) naquit le 4 novembre 1574 à Venlo et décéda le 17 septembre 1646 à Louvain où il était professeur à l'Université depuis 1606. Outre de nombreux autres livres, il publia en 1599 à Milan un ouvrage intitulé „Modulata Pallas sive septem discrimina vocum ad harmonicæ lectionis usum aptata philologo quodam filo”, dont la deuxième édition porte le titre „Musathena sive notarum heptas ad harmonicæ lectionis novum et facilem usum”, Hanoviae, Typis Wecheliani, apud Claudium Marnium et heredes Ioan. Aubrii. 1602”.

⁵⁹) En marge: Il cite le passage de Puteanus où il parle de la difficulté et embarras des nuances.

Cette remarque s'applique à la p. 67 de l'ouvrage de Maillart où l'auteur cite le passage suivant de la „Musathena” (Cap. IX, p. 35): „Senæ hæ notæ sic inventæ usum sui apud Musicam passim gregem, sed tardum admodum difficilemque præbent. Quæ enim mora Mutationum; confusio Clavium; substitutio Vocum? Videas plerosque atque indigneris bonam ætatem impendisse huic Arti: et exiguum tamen profecisse, perfectos annis prius, quam istiusmodi Lectione.

toute forte de musique, mais pour parvenir à la connoissance des modes il foustient qu'il faut suivre celle de Guido. Et il a tort ⁶¹⁾).

§ 4. a ⁶²⁾). Mersenne liv. 5 prop. 34 ⁶³⁾). nomme le Maire ⁶⁴⁾ qui avoit divisé le ton en 4 parties sur son luth. Et Titelouze ⁶⁵⁾ qui l'avoit divisé en 3 parties égales sur une spinette particuliere. l'un et l'autre ne valoit rien ⁶⁶⁾).

Il dit que S. Augustin parle de la mesure qu'on bat qu'il nomme Plaufus ⁶⁷⁾).

Difficultas scilicet obstat, remoramque plerisque facit. Ego tollam: cursumque universum facilem et expeditum reddam". Et un peu plus loin: „Ego adiungo, et molestias istas fugiens Notarum numerum augeo: et senis receptis, ut Musathena constituatur comitem unam adicio, ex eodem illo Hymno (Solve polluti labij reatum): BI. Ordinem eundem servo: UT, RE, MI, FA, SOL, LA, BI".

La dernière partie de la citation n'est pas tout à-fait correcte chez Maillart.

⁶⁰⁾ L.c. p. 68.

⁶¹⁾ Huygens a noté ici en marge l'hymne bien connu de S. Jean (comparez la fin de la note 59) auquel sont empruntés les syllabes ut, re, mi, etc.

Ut queant laxis
Resonare fibris
Mira gestorum
Famuli tuorum
Solve polluti
Labij reatum
Sancte Iohannes.

⁶²⁾ Portef. „Musica", f. 28 r.

⁶³⁾ Ceci s'applique aux „Traitez des Consonances etc." faisant partie de l'„Harmonie Universelle". Mais il y a ici une faute d'impression au haut de la page. On y lit „Livre cinquiesme", tandis que le texte de la page fait partie du Livre VI „De l'art de bien chanter". C'est dans la Prop. 34 de ce livre, à la p. 439, qu'on trouve cette citation de notre § 4.

⁶⁴⁾ Le Maire, musicien français, naquit vers 1600. Mersenne le cite en outre à la p. 342 de l'„Harmonie Universelle" à propos de la syllabe *za* qu'il proposait d'introduire dans le chant et pour ses innovations dans la notation musicale.

⁶⁵⁾ Jean Titelouze, célèbre organiste français, naquit en 1563 à St. Omer et décéda le 25 octobre 1633 à Rouen, où il était organiste de la cathédrale depuis 1588. Mersenne parle de sa division du ton en trois intervalles égaux non seulement dans le passage cité dans le texte, mais aussi dans le Livre III „Des genres de la Musique, etc.", Prop. 20, p. 196; il est vrai qu'en cet endroit on ne trouve pas son nom, mais la périphrase „excellent organiste" indique que c'est bien de lui qu'il s'agit.

⁶⁶⁾ Pour autant que nous voyons, le jugement de Mersenne lui-même n'est pas si nettement défavorable. Il dit p. e. à la p. 196: „l'ajoute que si l'on aime mieux diviser chaque ton en trois parties... qu'il est libre à un chacun de faire ce qu'il luy plaira".

⁶⁷⁾ „Traitez des Consonances etc.", Livre V „De la Composition" (p. 324): „Le batement de la

§ 4. *b*⁶⁸). De la division du monochorde et de l'accord des instruments.

Aristoxene divisoit l'octave en 12 demitons égaux, ce que Vincent Galilée⁶⁹) maintient estre la meilleure division. Mersenne s'en sert pour le luth⁷⁰).

Du vray temperament et accord des instruments.

Mersenne rapporte pag. 73 et 74 des Instruments les divers genres de Diatonic, Chromatic et Enharmonic de plusieurs anciens, tous peu propres a la musique⁷¹) et qui montrent qu'ils ne chantoient pas a plusieurs parties⁷²).

mesure, laquelle saint Augustin et les autres anciens Latins appellent *Plausus*, n'est autre chose que le baisser et le lever de la main, qui signifient le temps qu'il faut donner a chaque note.

En effet, St. Augustin écrit: „In plaudendo enim quia levatur et ponitur manus, partem pedis sibi levatio vindicat, partem positio”, et ailleurs: „Intende ergo et aurem in sonum et in plausum oculos. Non enim audiri, sed videri opus est plaudentem manum, et animadverti acriter quanta temporis mora in levatione, quanta in positione sit”. Le premier passage se trouve à la p. 334, le deuxième à la p. 337 du „*Primus Tomus Eximii Patris D. Aurelii Augustini Hipponensis Episcopi*”, Basileæ per Ambrosium et Aurelium Frobenios, fratres, Anno Salutis humanæ MDLXIX. On les trouve aux p. 1110 et 1113 de l'édition moderne de Migne (*Patrologia Latina*, Tom. XXXII, Parisiis apud Garnier fratres et J. P. Migne successores 1877 = *Sancti Aurelii Augustini opera omnia* Tom. primus, respectivement Cap. X, 18 et Cap. XIII, 24, de „*De Musica*” liber secundus). Nous aurions pu citer plusieurs autres endroits.

⁶⁸) Manuscrit E, p. 9—10, datant de 1674. Nous avons déjà publié une partie de ces pages aux p. 370—371 du T. XIX.

⁶⁹) „*Dialogo di Vincentio Galilei nobile Fiorentino Della Musica antica Et Della Moderna*”, Firenze, G. Marescotti, 1581. Le dialogue a été réimprimé en 1934 à Rome, avec une préface de Fabio Fano, par la Reale Accademia d'Italia. On lit p. e. à la p. 53 „... molto bene sapena Aristosseno, d'hauere a distribuire in parti vguali la qualita del suono...”.

Voyez, dans la note 16 de la p. 113 qui précède, l'opinion exprimée en 1588 par Zarlino, laquelle ne s'accorde pas tout-à-fait avec celle de V. Galilée.

⁷⁰) Voyez les trois derniers alinéas de la note 9 de la p. 32 qui précède. Il est vrai que dans ses „*Questions harmoniques*” de 1633 (citées dans la note 21 de la p. 114 qui précède) Mersenne parle (p. 259) d'„Aristoxene, qui disoit que tous les tons, & les demy-tons sont esgaux, comme l'on pratique encore maintenant sur le Luth & sur les Violes, ce qui repugne neantmoins aux loix de l'harmonie & de la raison”. A propos de Vincent Galilée Mersenne écrit e. a. (Livre Second des Instrumens, Prop. V, p. 60—61): „Il y en a encore plusieurs qui croient que cette diuision d'Aristoxene doit estre preferée à toutes les autres, ce que Vincent Galilée s'est efforcé de prouuer en faueur de ses amis Aristoxeniens, parce que ce Systeme est le plus aysé de tous, & que le iugement des sons depend entierement de l'ouye”. Toutefois V. Galilée „confesse en faueur de la vérité, que la Quinte Pythagorique est plus agreable que l'Aristoxenique, & que la nature n'a pas esgard à nos commoditez, de sorte qu'il ne s'ensuit pas que le Systeme d'Aristoxene, dans lequel la quinte contient 7 douziemes de l'Octaue, soit plus parfait que celui, dans lequel elle est iuste”.

⁷¹) On trouve en effet une „*Table des Diatoniques de cinq Musiciens*” etc. etc. aux pages indiquées; „on peut ce semble conclure” dit Mersenne „que nous entendons mieux qu'eux la Théorie, ou du moins la Pratique”.

rf⁷² l u⁷² r f l u les 2 accords nouveaux du luth l'un par b quart l'autre par b mol. C'est depuis la 4^e chorde jusqu'à la chanterelle.

u l f r l m r u e l tout l'accord nouveau par b mol du descendant de la chanterelle.

Raison des différents sons que rend une même chorde⁷³); et des sons de la trompette marine, et de la trompette.

Du son des anches, qu'on baisse leur ton en mettant des morceaux de cire sur les languettes⁷⁴).

Que les tuyaux ouverts et à anches ne font pas plusieurs tons mais seulement les bouches⁷⁵).

S'il est vrai que des tuyaux de même longueur mais plus gros les uns que les autres font de tons différents de 5 ou 6 intervalles comme l'assure Merfenne. Le moindre avoir 3 lignes de diamètre. tous 6 pouces de long. les autres 6, 12, 24, 48 lignes de diamètre⁷⁶).

Pag. 342 des Orgues. Après avoir bien expliqué le temperament, il dit qu'on n'en peut user qu'en mettant 20 marches à l'octave, et que Salinas le prouve au livre 3. chap. 33. Que pour cela il faut faire les 12 demitons égaux comme au luth⁷⁶). Mal!

Voyez encore sur Merfenne la note 21 de la p. 114 et le § 5b qui suit.

⁷²) Voyez sur cette opinion, qui est aussi celle de Huygens, la Pièce III D qui précède.

⁷³) Voyez sur ce sujet la note 1 de la p. 26 qui précède.

⁷⁴) Voyez dans l'„Harmonie Universelle“ de 1636 le „Livre Sixiesme des Orgues“. A la p. 329 (Prop. XI) Mersenne dit que „les Anches montent ou baissent de ton par le mouvement de leurs ressorts, ou rafettes: mais on les fait encore baisser sans remuer le ressort, en mettant de petits morceaux de cire sur différents endroits des languettes qui se meuvent d'autant plus lentement qu'elles sont plus chargées: d'où il arrive que le son des Anches en est plus doux & plus agreable“.

⁷⁵) Comparez la note 7 de la p. 87 qui précède. La Prop. XII (p. 331) du „Livre Sixiesme des Orgues“ est ainsi conçu: „Determiner si l'on peut faire un Orgue qui ayt tous ses tuyaux de même hauteur, c'est à dire si la seule difference de leurs largeurs peut faire l'estenduë de quatre Octaves qui sont ordinairement sur l'Orgue, etc.“ Mersenne parle „de plusieurs tuyaux de même hauteur que j'ay fait faire exprez Quant à la longueur ils ont tous demy pied de Roy, & le diamètre de la base du plus delié a seulement trois lignes, le second a demy-pouce etc.“

⁷⁶) Voyez sur le luth la note 70 qui précède. A la p. 342 nommée Mersenne écrit en effet ce que Huygens cite sur les 20 marches et sur Salinas. Mais ensuite Mersenne ajoute „ . . . que les Orgues n'ont pour l'ordinaire que treize marches sur l'Octave. il faut user d'une autre industrie, par exemple de celle que j'ay monstrée dans le traité du Luth, par le moyen de laquelle tous les demy-tons de l'Octave sont égaux“. Il est vrai qu'il conclut comme suit: „Mais tous ces tempe-

§ 5. a⁷⁷). Kircher Musurgia⁷⁸) l. 1. cap. 6. digressione. an in vacuo fieri possit sonus⁷⁹). Experimentum indiligerenter factum refert, coque aerem in phiala experimenti toricelliani restare probat quod sonus campanulæ inclusæ audiretur⁸⁰). aquam ad 10 pedes constituisse ait. unde non bene rem peractam liquet⁸¹). in vacuo tamen si daretur putat sonum non fieri. Experimentum Florentinum similiter sonum fuisse auditum asserit⁸²). Meum vero contra⁸³).

L. 5. c. 2⁸⁴). inventum Guidonis Aret.⁸⁵) valde laudat quod mihi non videtur

ramens ne seruent de rien pour la fabrique de l'Orgue, d'autant que les tuyaux que l'on fait selon la iuste proportion, approchent si pres dudit temperament, que les mesmes tuyaux qui sont faits pour l'Orgue parfait, peuvent servir pour l'imparfait, ou l'ordinaire, parce qu'ils ne sont pas esloignez de plus d'un quart de comma les uns des autres".

⁷⁷) Portef. „Musica", f. 36r. — 37v.

⁷⁸) Athanasius Kircher, né le 2 mai 1601 à Geiss près de Fulda, devint membre en 1618 de la Compagnie des Jésuites. Il fut professeur à Würzburg, vécut à Avignon après 1635 et enseigna ensuite à Rome au Collegium Romanum; il décéda dans cette dernière ville le 30 octobre 1680. Kircher est un polymathe; il a publié des ouvrages volumineux sur des sujets fort divers. Les remarques de Huygens se rapportent à la „Musurgia" dont le titre complet est: „Athanasii Kircheri Fuldensis e Soc. Jesu Presbyteri Musurgia Universalis sive Ars Magna Consoni et Dissoni in X libros digesta. Quæ Univerſa Sonorum doctrina, et Philosophia, Musicæque tam Theoricæ, quam practicæ scientia, summa varietate traditur; admirandæ Consoni, et Dissoni in mundo, adeoque Univerſa Naturæ vires effectusque, uti nova. ita peregrina variorum speciminum exhibitione ad singulares usus, tum in omni poenè facultate, tum potissimum in Philologiâ, Mathematicâ, Physicâ, Mechanicâ, Medicinâ, Politicâ, Metaphysicâ, Theologiâ, aperiuntur et demonstrantur". Romæ. Ex Typographia Hæredum Francisci Corbelletti. Anno Jubilæi MDCL.

⁷⁹) „Musurgia", Lib. I, cap. VI, p. 11. „Digressio. Utrum in vacuo fieri possit sonus".

⁸⁰) L'expérience décrite par Kircher (l.c. p. 12) fut exécutée avec un tube de plomb d'une longueur de 100 pieds, à l'une des extrémités duquel un globe de verre était attaché hermétiquement. A l'intérieur de ce globe se trouvait une cloche ainsi qu'un marteau de fer pouvant être mis en mouvement du dehors au moyen d'un aimant. Le tube fut rempli d'eau et employé pour l'expérience de Torricelli: l'eau resta suspendue à une hauteur de 10 pieds. Le son de la cloche frappée par le marteau resta perceptible. Convaincu que dans le vide il ne pourrait y avoir de son, Kircher en déduit (ce qui ne cadre pas bien avec le titre de la Digressio) que le vide est impossible.

⁸¹) Le fait que l'eau resta suspendue à la hauteur de 10 pieds fait bien voir que l'espace au-dessus d'elle était loin d'être vide.

⁸²) Voyez sur ces expériences de l'„Accademia dei Lincei" la p. 240 du T. XIX. Kircher ne les mentionne pas.

⁸³) Huygens parle apparemment de son expérience du 19 décembre 1674 (T. XIX, p. 239).

⁸⁴) „Musurgia", Lib. V, cap. 2 „Utrum Antiquis cognita fuerit Symphoniurgia polyphona sive Musica ex pluribus composita vocibus".

⁸⁵) Aret. = Aretini. Guido Aretinus naquit d'après la tradition vers 995 à Arezzo près de Rome. Il décéda en 1050. Il appartenait à l'ordre des Bénédictins. Ses plus grands mérites pour la mu-

laude dignum. Cum jam ante lineis uterentur 8 et Elementis literarum septem fonos octavæ significarent ⁸⁶⁾. Guidonem refert ad annum 1024. 300 annis post ait Ioannem de Muris Parisinum ultimam manum imposuisse guidonianæ musicæ, inventis notis quæ tempora prolationis simul notarent ⁸⁷⁾.

Dicit ibidem ⁸⁸⁾ Guidonem invenisse primum symphoniam plurium vocum. Id constare ex præfatione Micrologi ad Theobaldum Episc. Aretinum ⁸⁹⁾. Edidit hunc Microlog. sub papa Ioanne 2⁹⁰⁾. Vellem videre. dicit et auctorem fuisse instrumentorum *polyplectrorum* ut clavicymb. &c. Sed fallitur puto nam organa et hydraulica etiam polyplectra erant jam diu ante ejus tempora, nisi tantum quæ fidibus tenduntur hoc nomine censenda sint ⁹¹⁾.

L. 6 c. 1. theor. 9. de cognoscendo numero diadromorum chordæ ⁹²⁾. Mersenni habet experimentum ⁹³⁾. chorda 17 pedum ex 12 intestinis tensa pondere $\frac{1}{2}$ libræ, bis currit et recurrit in minuto secundo. duabus libris tensa quater recurrit. 8 libris octies. Contradicit huic experimento ob difficultatem quod ubi primum vibrationes numerabiles fiunt sonus amplius audiri nequeat. stolidè. sufficit enim cognita proportio numeri vibrationum subdupla rationis ponderum quibus tenditur.

Guido promittit ⁹⁴⁾ menstruo spatio discendum quod antea vix multis annis etiam

musique consistent dans l'amélioration de l'écriture des notes et l'introduction des syllabes du chant ut, re, mi, fa, sol, la, par où il devint le fondateur du système de la solmisation.

⁸⁶⁾ Kircher lui-même dit (l.c. p. 213) avoir vu dans le couvent de S. Salvator à Messine un livre d'hymnes vieux d'environ 700 ans dans lequel un système de huit lignes était employé.

⁸⁷⁾ Johannes de Muris était originaire de Normandie où il doit être né avant 1300. En 1350 il devint recteur de la Sorbonne. Son décès eut lieu après 1351. Il publia une „Musica practica” en 1321 et une „Musica speculativa” en 1323. Voyez encore sur lui la note 119 de la p. 129 qui suit.

⁸⁸⁾ „Musurgia”, p. 215. Guido a fait connaître ses trouvailles (note 85) dans un ouvrage appelé parfois „Introductorium” et parfois „Micrologus” (savoir: de disciplina artis musicæ). Il était dédié à Théobald, évêque d'Arezzo.

⁸⁹⁾ Nous ne voyons pas que Kircher considère l'invention du chant polyphone par Guido comme démontré par un passage de la préface du „Micrologus”. Après avoir fait mention de cette préface il ajoute: „porro Guido necdum contentus hac nova cantandi methodo, inauditam ante hac plurium vocum symphoniam excogitavit primus”.

⁹⁰⁾ Lisez: sub papa Ioanne XX.

⁹¹⁾ Voyez sur ce sujet les Additions et Corrections à la fin du présent Tome.

⁹²⁾ „Musurgia”, Lib. VI, cap. 1, theor. 9. „Utrum in notitiam diadromorum, quos chorda quæpiam tensa conficit, certa scientia perveniri possit?”

⁹³⁾ Il est question de l'expérience décrite par Mersenne dans son „Harmonie Universelle” (voyez la note 9 de la p. 29 qui précède), plus précisément dans les „Traitez de la Nature des Sons, et des Mouvements de toutes sortes des Corps” Livre III „Des mouvemens et du son des cordes”. La longueur des cordes dont Mersenne parle ici était de $17\frac{1}{2}$ pieds.

⁹⁴⁾ Cette remarque appartient encore à l'alinéa précédent. La promesse dont il est question se trouve dans la préface mentionnée dans la note 89 qui précède.

ingenio pollens didicisset. quanta ergo difficultas illa prisca fuerit cum et Guidonis methodus tantum tricarum habeat.

L. 7 c. 5. ⁹⁵⁾ Improbatur consuetudinem componistarum ad clavicymb. sua examinantium. vultque absque illo per scientiæ regulas symphoniam condi. ineptè.

Recte ibidem ⁹⁶⁾ reprehendit illos qui vocibus singulis cantum accommodant non vero argumento, contra quod sepe peccant. ut qui ad verba illa seu thema ⁹⁷⁾ „*Absterget Deus omnem lachrymam ab oculis eorum ubi nullus luctus clamor aut dolor*“, plurimum ludit in verbis illis *lachrymam luctus dolor*, hoc agens omnibus modis ut tristem cantum, tristes clausulas, ijs accommodaret. Quid autem lachrymæ, dolor, luctus cum celestibus gaudijs commune habent. alterum exemplum refert *mors luctuosa festinat* ⁹⁸⁾; ubi illud festinat incitatis notis et mirè discurrentibus exprimit contra decorum.

Lib. 7. Exempla affert mœsti cantus ⁹⁹⁾.

Mihi videtur non adeo lentis syllabis dolorem exprimendum, ut nonnunquam \diamond ¹⁰⁰⁾ singulis dentur; sed prorsus imitandum tenorem sermonis qui non multo lentior est plangentibus quam loquentibus.

Vellem etiam ut non quæ artificiosissima sunt et inventu difficilia sectarentur melopœi nostri sed quæ aures maximè afficerent. Quid enim mihi cum imitationibus accurate servatis, quas fugas vocant, quid cum duplicibus, si absque his ut liberior ita et gravior efficitur melopœia. Artifices istis se delectari dicunt, non tam dulcedine concentus affectos quam consideratione artificiosæ compositionis; qui non recte hoc pacto melopœam æstimant, cujus finis est delectare sono quem auribus percipimus, non contemplatione artis. Hæc enim diversa sunt.

Illi vero artem magis ex regulis quibusdam quas sibi finxere et quibus sæpe nimis tenaciter inhaerent, quam ad effectum harmoniæ judicant. Ars autem nisi naturam moveat ac delectet nihil sane egisse videatur, ut Cicero inquit ¹⁰¹⁾. Itaque illam sibi

⁹⁵⁾ „Musurgia“ Lib. VII, Pars I, cap. 5 (p. 562) „De defectibus et abusibus modernorum Melothetarum, sive quos Componistas vulgò vocant“.

⁹⁶⁾ L.c. p. 563—564.

⁹⁷⁾ Apocalypse de Saint-Jean, cap. 21, vs. 4.

⁹⁸⁾ Kircher écrit: *mors festinat luctuosa*, disant: „Non ita pridem alius... huiusmodi clausulis ludit etc“.

⁹⁹⁾ „Musurgia“, Lib. VII, cap. 2 (p. 572 et suiv.) „Regularium et naturalium duodecim Tonorum proprietates exemplis demonstrata“.

¹⁰⁰⁾ La semibrevis: comparez la p. 68 qui précède. Actuellement ce signe est celui de la note entière, la „blanche“.

¹⁰¹⁾ Cicero „De Oratore“ III, 197: „ars cum a natura profecta sit, nisi naturam moveat ac delectet, nihil sane egisse videatur“. Toutefois, les éditions modernes adoptent, au lieu de „naturam“, la leçon „natura“.

unicè artem proponant quâ auditores delicatas aures habentes delectare ¹⁰²⁾ possint, sed ita ut et imperitioribus voluptatem pariant. Unde enim origo præceptorum nisi ab ijs rebus quas probabant suavesque sentiebant nondum ullis præceptis imbuti. Quamobrem nec præceptis ita confidere debent ac si geometriæ axiomata essent, sed multas exceptiones dari existiment semperque fixum illud teneant, propositum delectationem adferre auribus prius quam artis examen instituatur.

§ 5 b. Apud Mersennum ¹⁰³⁾ disputatur an gravior fit concentus monodijs nec rationes defunt.

§ 5 c. In methodo Guidonis illud operam dedit ut semitonium majus syllabis mi fa tyrones semper exprimerent, cum tamen tonum quatuor modis canant nempe UT RE, RE MI, FA SOL, SOL LA ¹⁰⁴⁾.

§ 5 d. Kirch. tom. 1. l. 7. Erotemate 4 ¹⁰⁵⁾. Explicat notas musicas odes Pindaricæ *χρύσεα φέρμιγξ Ἀτρίλωνος* ¹⁰⁶⁾. Strophe notas *τῆς λέξεως* habet five quæ cantum dirigunt, antistrophe notas *τῆς κρούσεως* instrumento sequendas, sed tamen et his verba subjiuntur. Modus est Lydius quod ex figura notarum patet ¹⁰⁷⁾. Cantus autem videri potest esse Toni MLM ¹⁰⁸⁾ nisi quod finit in R. Kircherus finit eum in G, sed

¹⁰²⁾ Leçon alternative: delectare.

¹⁰³⁾ Mersenne traite cette question dans le Livre IV („De la Composition de Musique”) des „Traitez des Consonances etc.” contenus dans l’„Harmonie Universelle”. La première Proposition est intitulée: „Determiner si les simples recits qui se font d’une seule voix, sont plus agreables que lors qu’on chante la mesme chanson à deux ou plusieurs parties”.

¹⁰⁴⁾ Cette remarque ne semble pas avoir de rapport direct avec la lecture de Kircher. Elle s’applique au système de la solmisation dans lequel l’intervalle d’un demiton, se trouvant dans tout hexachorde, était toujours chanté comme Mi-Fa.

¹⁰⁵⁾ Kircher „Musurgia” Lib. VII, Pars I, Erotema IV (p. 540 et suiv.) „Quibus Veteres Musici in melothesia exprimenda notis uti sint”.

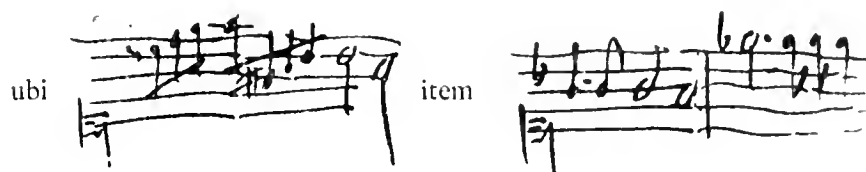
¹⁰⁶⁾ Il est question ici du célèbre fragment de la musique de la première ode pythique de Pindare, fragment que Kircher dit avoir découvert dans la bibliothèque du couvent San Salvator à Messine et sur l’authenticité duquel on dispute encore aujourd’hui. On peut consulter sur ce sujet Paul Friedländer „Die Melodie zu Pindars erstem Pythischen Gedicht” dans les „Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Phil. Hist. Klasse 86 (1934), Heft 4”, Hirzel, Leipzig, 1934. Comparez sur ce fragment la p. 85 qui précède.

¹⁰⁷⁾ Kircher lui-même écrit au-dessus de sa reproduction du fragment: „Musica veterum nostris notis musicis tono Lydio expressa”: il observe que les signes employés sont identiques avec ceux du ton lydien tels qu’ils sont représentés dans la table des notes d’Alypius qu’il vient de reproduire vis-à-vis de la p. 541.

¹⁰⁸⁾ Une explication de cette remarque nous a été donnée par M. A. Rome, professeur à l’Université de Louvain. M. Rome suppose que Huygens ait transposé le fragment publié par Kircher

hoc nihil refert cum idem ipsi ac mihi fiat cantus ¹⁰⁹). In fine notas quasdam male explicaverat quas correxi ¹¹⁰).

pag. 593 et 594 ¹¹¹). Exemplum Capsbergerianæ ¹¹²) melopœæ recitat



§ 5 d. Si per omnes tonos ita discurrere licet ut diu in illis maneant, aut faltem ad primum non redeant, quidni et in alio tono finire permittant; et sane vidi in Italicorum melismatis ubi hoc facitarent, incipientes in SVS, sunt qui finiunt in MCM. Hoc vero ut ineptum est ita etiam vagatio ista per tonos alienos ut plane ejus in quo cœperant obliviscantur. Hoc enervat vim ac decorem cantus nec perinde delectat auditores ac constans modulatio quæ tonum servat vel ita certe excurrit ut continuo revertatur.

Necesse est vocem canentis ope instrumenti dirigi et in ordinem cogi ne a tono

de telle manière „qu'il n'y ait plus ni dièse ni bémol. Il obtient ce résultat en commençant la mélodie par un *la* au lieu d'un *re*, comme le fait Kircher. Alors la première phrase de la pythique devient *la, la, sol, fa, mi; la, sol, fa, mi; la, sol, fa, mi, re, mi* et Huygens remarque que le sentiment de cette première phrase, surtout des 8 premières notes, est nettement celui du 4^e mode grégorien, dont le tonique est *mi* et la dominante *la*. Donc: cantus videri potest ton MLM. Seulement la fin du morceau (*fa, sol, sol, re, mi, re*) est dans le 1^{er} mode grégorien Huygens reste d'avis que c'est du 4^e mode, sauf que la finale du morceau est un *re*”.

¹⁰⁹) M. Rome explique cette phrase par la remarque suivante: „la structure modale restant la même dans tous les tons, Huygens avertit le lecteur non prévenu, que dans la transcription de Kircher le morceau finit par un *sol*, sed parum refert, cela ne fait rien, puisqu'en transposant dans un autre ton Huygens n'a pas changé la structure modale ni la ligne mélodique; cum idem ipsi ac mihi fiat cantus”.

¹¹⁰) Nous ne connaissons pas ces corrections. Elle se trouvaient (ou se trouvent) peut-être dans l'exemplaire de la „Musurgia” mentionné dans le Catalogue de la vente des livres de Huygens en 1695; nous ignorons ce que cet exemplaire est devenu.

¹¹¹) Kircher „Musurgia”, Lib. VII, Pars II, Cap. 5 „De vario stylorum harmonicorum artificio”. D'ailleurs les exemples récitatifs de Kapsberger commencent déjà à la p. 592.

¹¹²) Johann Hieronymus von Kapsberger, virtuose et compositeur d'origine allemande, demeurait à Venise vers 1604. Plus tard il habita Rome, où il décéda en 1650 environ.

Les paroles du deuxième exemple („Musurgia” p. 596) sont „miglior stato ma se pietà gli porge”.

evagetur. nam si verbi gr. canat V \acute{S} \grave{R} \acute{L} \grave{M} , hoc ultimum M non erit tertia major ad V sed toto commate altius vero ¹¹³⁾.

§ 6 ¹¹⁴⁾. Ad Jo. van der Elst ¹¹⁵⁾. Ouden en nieuwen grondt vande musycke. Gedruet te Gent. 1662 ¹¹⁶⁾.

Sex syllabas Guidonis Aretini retinet ¹¹⁷⁾ ideoque mutationes quas vocant, discentibus difficillimas, cum addito *f*, cuique tono suum nomen tribuatur. Semitonij ¹¹⁸⁾

¹¹³⁾ Ailleurs aussi Huygens parle des différences, évaluées en commas, qui peuvent résulter de la justesse d'un certain nombre de notes chantées consécutivement: voyez les p. 64 en 77 qui précèdent.

¹¹⁴⁾ Manuscrit G, f. 47 r. La f. 44 porte la date 1692, mais plus loin on trouve dans le Manuscrit des dates de 1690.

¹¹⁵⁾ Joannes van der Elst, moine augustin, naquit au commencement du dix-septième siècle au château Meulenakers en Brabant d'une famille gantoise, dit-on, bien connue. Il passa une partie de sa jeunesse en France. Avant l'ouvrage cité dans la note suivante il avait publié en 1657, également à Gand, ses „Notæ augustinianæ sive musices figuræ seu notæ novæ concinnendis modulis facillioris, tabulatis organicis exhibendis aptiores”.

¹¹⁶⁾ Le titre complet de cet ouvrage est le suivant:

Den Ouden ende nieuwen Grondt van de Musiecke. Bevanghende
De vermeerderinghe ende verbeteringhe van den Sangh.
De oude ende nieuwe Sangh-woorden.
De oude ende nieuwe Figuren.
De XII. Toonen van den Sangh.
De proportien van de Consonantien &c.
De bedeeelinghe van 't Monochordum.
Den grondt van de Chordosophie.
De Musicale Instrumenten.
Het volmaect Clauwier Diatonicum Syntonum.
Dry fundamentale manieren van accorderen.
De Reghels van de Compositie.
De Reghels van den Bas-continuël.
Het ghebruyck van de dry Musicale gheslachten.
In de welke met korte ende klare Reghels ende redenen wt-gheleydt
wordt het mergh van de Musijcke, soo kerckelicke, Figurêle, als
Instrumentêle, soo voor de Theorie als voor de Practijcke, door
P. I. V. E. A. Te Ghendt, by Maximiliaen Graet in den Enghel. 1662.

L'„Epistola Dedicatoria” est signée F. Joannes van der Elst.

¹¹⁷⁾ L.c. p. 3.

¹¹⁸⁾ L.c. p. 10 „De Nieuwe Chromatycke Sangh-woorden”. A la p. 11 on trouve la règle („Reghel”) suivante: „Het teeken van B-dure (♯) ghestelt wesende voor eenighe besonder Note verheescht in de Sangh-woorden de Vocale I, ende het teeken van B-molle (♭) de Vocale A”.

Nous remarquons qu'outre les „Sanghwoorden” cités par Huygens van der Elst emploie aussi les syllabes *li* et *lae*.

sua nomina dat si, fil, it, ri, item at, ra, ma, fal, quod fieri potest, sed non est tam necessarium atque vox *fi*.

Duæ perfectæ consonantiæ non debent sese consequi. ut quintæ, octavæ, unisoni. Rationem absurdam reddit ¹¹⁹⁾ quod audita perfectæ consonantia, plane acquiescat sensus; ideoque ne nausea sequatur subjungendam imperfectam. Nam primo divisio illa in perfectas et imperfectas consonantias inepta est. Deinde non sequitur dulcedo aut satietas nimia cum duæ quintæ sese sequuntur, sed contra offenduntur aures rudi ac dura illa consonantiarum successione quia subito quasi in alium Tonum transitur; nam etiam tertiæ intermediæ vel accedunt, vel subaudiuntur. Octavæ vero continuatæ improbantur, quod eadem modulatio Bassi et Cantus nequaquam satif faciat expectationi auditoris, cui gratiores essent aliæ consonantiæ quintarum et tertiarum.

Si pluribus Choris canatur. debent Bassus diverforum vel unisonis vel octavis vel interdum tertijs inter se referri, nunquam vero quintis.

Dans son „Bericht” de 1732, mentionné à la p. 69 qui précède, Q. van Blankenburg, qui connaît aussi les ouvrages de van der Elst, écrit: „Wat aangaat de namen *Si* en *Sa*, *It* en *Ur*, die heb ik in den jare 1681 met den Ed. Heere Christiaan Huygens vastgesteld, en zijne zwarigheid, dat men de naam *Ci* (diemen in d'oude musie vind) in geen *Ca* mogt veranderen door 't verwisselen van die *C* in een *S*, weggenomen; in dezelfde tijd heeft zijn Ed. zijn Cycle Harmonique van 31. klanken in 't octaaf in cyffer gestelt, en bij de *Mi* een *Ma* gevoegt”, etc. Comparez le § 3 à la p. 167 qui suit.

À la même p. du Man. G Huygens cite aussi **Ludovicus Viadana**; voyez les Additions et Corrections.

¹¹⁹⁾ L.c. p. 61. Le passage de van der Elst dont il s'agit est le suivant: „De reden van desen Reghel is, dat als gehoort wort een perfectæ Consonantie het ghehoor ten vollen voldæen is; ende om datter geen versaetheyt oft walgh en soude wt-spruyten, moet naer de perfectæ ghestelt worden een imperfectæ, die wederom verweckt eenen appetijt ofte begheerte tot de perfectie”.

Sur la question de la défense de la succession de deux quintes etc. — déjà mentionnée aux p. 81 et 110 qui précèdent — on peut consulter p.e. A. W. Ambros „Zur Lehre vom Quintenverbot”, Leipzig, H. Matthes, sans date; où l'on voit que la règle „debemus binas consonantias perfectas seriatim conjunctas ascendendo vel descendendo prout possumus evitare” provient de Joh. de Muris („Quæstiones super partes musicæ”, vers 1300; comparez sur lui la note 87 de la p. 124 qui précède). „Die alten Niederländer des 15. Jahrhunderts nahmen vorerst von dem glücklichen Funde der Theorie wenig Notiz”. Quelques compositeurs célèbres (J. Seb. Bach, Händel) n'observent pas non plus rigoureusement cette règle. Elle fut cependant de plus en plus respectée. Zarlinio la discute dans le Chap. 29 de la Troisième Partie de ses „Istituzioni Harmoniche”.

À la f. 15 du portef. „Musica” Huygens écrit: Quand on defend 2 octaves de fuite a 2, 3 ou 4 parties si ce n'est pas parce que cela rend l'accord defectueux d'harmonie. Et si peut estre a 5, 6 ou plusieurs parties ce n'est pas une faute en effet, estant non obstant cela l'harmonie complete.

§ 7¹²⁰). Simpson¹²¹). *Compendium Musicae Angl.^e 122).*

Varios effectus modorum apud veteres, ortos inde existimat, quod præter diversa intervalla cantus etiam diversitatem mensuræ seu rythmi contineant¹²³).

Quintas perfectas et imperfectas eleganter poni deinceps censet, in notis non longis¹²⁴).

En b mol l'on fait des cadences sur la note mediant¹²⁵). Mais cela n'est pas aisé en ♯; mais alors il veut la cadence mediant à la seconde ou quarte plus haut que la finale. Ainsi dans le ton de VSV les cadences mediantes seront en R ou F. J'y ajoute encore la cadence imparfaite ou le dessus finit en M et la Basse en L.

Christoph. Simpson eserit que de C^b a Ci est le demiton majeur et de Ci a V le demiton mineur, justement a rebours, et de même dans tous les autres demitons¹²⁶).

Il croit aussi que le triton et la fausse quinte sont des intervalles egaux¹²⁷).

¹²⁰) Portef. „Musica“, f. 34 et f. 31.

¹²¹) Christopher Simpson, anglais, était un virtuose sur la Viola da Gamba. Né en 1610, il décéda en 1669 à Turnstile.

¹²²) Chr. Simpson „A Compendium, or Introduction to practical musick“, London, Playford 1655. Cet ouvrage fut plusieurs fois réimprimé; il y eut même encore une huitième édition en 1732.

Nous avons pu consulter la troisième édition. „A Compendium of Practical Musick in five Parts. Teaching by a New, and easie Method, 1. The Rudiments of Song. 2. The Principles of Composition. 3. The Use of Discords. 4. The Form of Figurative Descant. 5. The Contrivance of Canon. Together with Lessons for Viols &c“. The Third Edition. By Christopher Simpson, London MDCLXXVIII.

¹²³) L.c. p. 69.

¹²⁴) L.c. p. 100.

¹²⁵) L.c. p. 36.

¹²⁶) A la p. 83 de l'ouvrage cité Simpson dit que l'intervalle A—Bes (ou La—Si bé mol) est un demi-ton mineur et Bes—B (ou Si bémol—Si) un demi-ton majeur.

¹²⁷) Nous rappelons que le triton est la quarte augmentée, composée de trois demi-tons majeurs et de trois demi-tons mineurs du système du ton moyen, tandis qu'on entend par fausse quinte, ou quinte diminuée, le complément du triton par rapport à l'octave.

Simpson (l.c. p. 67) appelle le „tritonus“ un „Greater or Excessive 4th“ et la „semidiapente“ un „Lesser or Defective 5th“. Son assertion de l'égalité des deux intervalles est moins catégorique que Huygens nous la représente. Il dit „... which, according to the Seale, where we have no other divisions or distinctions than *Semitones* or *Half-Notes*, seem to be the same Interval, as to proportion of sound, either or them consisting of six Semitones“.

¹²⁸) Portef. „Varia“, suite f. 25.

¹²⁹) Il s'agit de l'article „De la musique des anciens“ par Claude Perrault (né à Paris en 1613, médecin et architecte, devenu membre de l'Académie des Sciences en 1666 et mort à Paris le 9 octobre 1688; voyez aussi sur lui le T. XIX). Il fait partie de ses „Essais de Physique, ou Recueil de plusieurs Traitez touchant les choses naturelles“, Paris 1680—1688, 4 vol. Nous

§ 8 ¹²⁸). *Sur un traité de Musique de M. Perrault le medecin* ¹²⁹).

6 ¹³⁰). Que les systemes estoient les intervalles, si cela se prouve clairement. Je crois plustost qu'on le prenoit pour la quarte remplie des tons d'entredeux ¹³¹).

14. Bonne remarque de ce que leurs chants n'avoient pas la douceur des nostres faite des demitons aux cadences ¹³²).

19. Comment scait on si le Symphonia de Daniel estoit la mesme des vielleurs ¹³³).

21. Iroquois ¹³⁴). dites cette comparaïson a Vossius ¹³⁵).

28. Comment ils ont chanté à la tierce qu'ils prenoient pour dissonance ¹³⁶).

l'avons consulté dans l'édition „Oeuvres Diverses de Physique et de Mechanique” de M^r. C. et P. Perrault. Volume Premier. Leiden, P. v. d. Aa. 1721.

¹³⁰) Les nombres 6, 14, 19 etc. ne s'appliquent pas, comme cela est évident, aux pages de l'édition de 1721.

¹³¹) L.c. p. 297. „Les Systemes étoient les Intervalles, qui ne sont pas entre deux sons voisins, que l'on pourroit appeler Intervalles simples, mais qui sont composez d'autres Intervalles, qui sont voisins”. Nous ne voyons pas ce que Huygens trouve à objecter à cet énoncé. Il s'accorde absolument avec ceux d'Aristoxène „Harm. Elem.” I, éd. Meibom. p. 15—16 et Euclide „Introd. Harm.”, éd. Meibom. p. 1 = éd. Menge p. 186.

¹³²) L.c. p. 300. „Il est évident que leur modulation ou simple chant n'avoit point la douceur qui se trouve dans la nôtre, faite des demi-tons qui servent à faire les cadences avec agrément”.

¹³³) L.c. p. 303. Dans le Livre de Daniel, Chap. III, vs. 5 et 7, il est question d'un instrument de musique appelé Symphonia; voici le texte latin cité par Perrault: „In hora, quâ audieritis sonitum Tubæ, et Fistulæ, et Citharæ, et Sambucæ, et Psalterii, et Symphonie” etc. D'après Perrault cet instrument était encore récemment en usage chez les vielleurs (la vielle est un instrument à cordes frottées que l'on fait agir au moyen d'une roue mue par une manivelle). Perrault dit qu'il était „en forme d'un arc sur lequel trois cordes étoient tendues: il ne servoit que comme de bourdon [le mot bourdon signifie une basse continue et uniforme que font entendre, toujours sur la même note, certains instruments tels que la vielle]: et celui qui en sonnoit n'avoit rien autre chose à faire qu'à suivre le mouvement et la cadence du Violon”.

¹³⁴) L.c. p. 304. Perrault compare la musique des Anciens avec „celui qui regne encore parmi les Nations barbares, où la Symphonie de la Musique consiste dans un bruit confus pour ce qui est des tons, mais fort bien réglé à l'égard du mouvement: nous en avons vu un échantillon il n'y a pas longtemps dans le concert des Hiroquois, qui furent amenez en cette ville”.

„Iroquois” est le nom français pour la confédération des six nations peaux-rouges du sud-est des lacs Erié et Ontario.

¹³⁵) Isaac Vossius était d'avis que la musique des anciens avait une grande valeur: en 1687 (p. 242 du T. IX) Huygens dit à propos d'un ouvrage sur cette musique ne pas savoir si l'auteur „est du sentiment de Is. Vossius ou du contraire, qui est aussi le mien, c'est à dire que cette ancienne musique estoit tres peu de chose”.

¹³⁶) L.c. p. 307. Perrault s'appuie ici sur un texte d'Athenæus d'après lequel, suivant Perrault, Pindare, écrivant à Heron dit que la Musique chantée par un enfant, qui joint sa voix à celle d'un homme, s'appelle Magadis, parce qu'ils chantent ensemble l'un et l'autre un même chant selon deux modes. Il juge que „chanter selon deux modes” signifie „chanter à la tierce”,

33. Si la mandore ¹³⁷) est semblable au Pandoron ancien ¹³⁷)? Barbitus ¹³⁸) est pris pour la viole par les modernes à ce qui me semble et non pas pour le luth.

38. O Testudinis aureæ &c. ¹³⁹). Il me semble qu'Horace dit O muse qui jouez du luth.

44. Qu'il faut quelque chose de plus à la sculpture que d'imiter simplement la nature ¹⁴⁰). Il y a apparence que la peinture des anciens n'étoit pas si peu de chose, vu les rapports de Pline et autres ¹⁴¹).

49. Je ne scay si on peut recevoir cette distinction entre toucher le cœur et toucher l'esprit ¹⁴²).

ceci d'après une remarque d'Aristote disant que les consonances octave, quinte et quarte ne se magadisent point. Il est évident qu'il ne peut être question d'une lettre à *Hiéron*: c'est d'une ode de Pindare dédiée au roi *Hiéron* de Syracuse (dont un fragment a été conservé) qu'il s'agit („Pindari Carmina”, éd. W. Christ, Lipsiæ 1896, fragm. 125, p. 408). Pindare y parle d'un *ψαλμῆς* qu'il appelle *ἀντιβάρβιτος*. D'après Athénée („Dipnosophistarum Libri”, éd. Kaibel, Leipzig. 1887, Lib. XIV, 635 b; éd. citée III, 401) le *ψαλμῆς* est identique avec la *μαγᾶδις* laquelle est appelée *ἀντιβάρβιτος*. . . . διὰ τὸ διὰ οὗτο γένωσι ἄμα καὶ διὰ πάντων ἔχου τὴν ἀντιβάρβιτον ἀντιβάρβιτον τε καὶ παρθόν.

Comparez sur la remarque de Huygens au sujet de la tierce dans l'antiquité, le troisième alinéa de la p. 114 qui précède où nous renvoyons le lecteur à un Avertissement antérieur.

¹³⁷) L.c. p. 309. Perrault parle ici du „jeu de la simple Mandore, dont l'usage est aboli depuis quelque temps. A la page suivante il ajoute que la Mandore est identique avec le pandoron mentionné par Athénée. Or, Athénée mentionne un instrument *πάρβιτος* (c'est sans doute de celui-ci que Perrault entend parler) au liv. IV, 176 b et 183 f (éd. citée, 395 et 401).

¹³⁸) L.c. p. 306: „Athénée dit que le Magadis étoit le même que le Barbiton et le Peëtis; et il y a apparence que c'est pour cette raison que les Modernes appellent notre Luth Barbiton”. La citation n'est pas tout-à-fait exacte: Athénée (IV, 182 f; éd. citée I, 398) applique tant au *βάρβιτον* qu'à la *μαγᾶδις* la désignation *ῥοχχίτα*, mais il ne dit pas que ces deux instruments sont identiques. Ailleurs (182 e, éd. citée I, 398) il dit que la *μαγᾶδις* est, comme le *βάρβιτον*, un *ῥοχχίτον ἐντατόν*.

¹³⁹) L.c. p. 312. Horace, Carmina IV, ode 3:

O testudinis aureæ
Dulcem quæ strepitum, Pieri, temperas.

Traduction de Perrault: „Ce sont vous mes Vers qui faites que le son de ma Lyre a quelque chose d'agréable”.

¹⁴⁰) L.c. p. 314. Perrault dit qu'il n'est pas permis de conclure de l'excellence de la sculpture des anciens à celle de leur peinture. „La raison de cela est, qu'un Sculpteur n'est à l'égard de la nature qu'il imite, que ce qu'un Peintre copiste est à l'égard d'un tableau qu'il copie”.

¹⁴¹) Pline parle de la peinture grecque dans le Lib. 35 de son „Historia Naturalis” (Caji Plinii Secundi Historiæ Naturalis Libri XXXVII ex rec. J. Harduini. Biponti 1783).

¹⁴²) L.c. p. 316: „Il ne faut donc pas s'étonner si les Musiciens et les Peintres de l'Antiquité faisoient de si grands miracles avec si peu d'art, puisqu'ils ne s'étudioient qu'à toucher le cœur et à contenter les sens; ce qui est bien plus aisé que de satisfaire l'esprit; parce que le cœur peut

Qu'il est assez disputable si les musiciens modernes avec leur contrepoint figuré ou l'on prononce des paroles différentes en même temps, font dans le bon chemin.

§ 9¹⁴³⁾. **Andr. Werckmeister**¹⁴⁴⁾ Organist zu Quedlinburg (en marge: *author in-eruditus ac parvi pretij*) improbat Temperamentum optimum quo quintæ diminuuntur $\frac{1}{4}$ commatis¹⁴⁵⁾. Errat autem in eo quod ab omnibus chordis tam diatonicis quam chromaticis putat diapente sursum postulari in hoc Temperamento¹⁴⁶⁾. Incipit enim ab V, S, et procedit ad S, R; R, L; L, M; M, Z; Z, F \sharp ; F \sharp U \sharp ; U \sharp S \sharp ac porro ponit etiam S \sharp d \sharp seu S \sharp e \flat ; malè, hoc enim nemo ut puto sic statuit; hinc rectè pergit per E \flat B (seu ut ille D \sharp B); B, f; F, c. Iam dicit 2 commatis inveniri gravius hoc e quam ut ad C inum diapason efficiat.

aimer également tous les objets, et même quelquefois plus fortement les moins aimables; ce qui n'arrive pas à l'esprit, qui n'est point sujet aux aveuglemens dont le cœur est capable, et qui n'estime ordinairement les choses qu'à proportion qu'elles sont estimables".

¹⁴³⁾ Portef. „Musica", f. 20.

¹⁴⁴⁾ Andreas Werckmeister naquit à Beneckenstein le 30 novembre 1645; il décéda le 26 octobre 1706 à Halberstadt où il était organiste après avoir exercé la même fonction à Hasselfelde et à Quedlinburg. C'est dans cette dernière ville qu'il publia l'ouvrage qui donna lieu aux observations de Huygens. En voici le titre complet:

Musicalische Temperatur, Oder deutlicher und warer Mathematischer Unterricht / Wie man durch Anweisung des Monochordi Ein Klavier / sonderlich die Orgel-Wercke / Positive, Regale, Spinetten / und dergleichen wol temperiert stimmen könne / damit nach heutiger manier alle Modi ficti in einer angenehm= und erträglichen Harmonia mögen genommen werden / Mit vorübergehender Abhandlung Von dem Vorzuge / Vollkommen= und weniger Vollkommenheit der Musicalischen Zahlen / Proportionen / und Consonantien, Welche bey Einrichtung der Temperatur wohl in Acht zu nehmen sind: Benebst einem darzugehörig= in Kupffer vorgebildeten deutlichen und völligen Monochordo beschrieben / und an das Tages= Licht gegeben durch Andreas Werckmeister / Stifts= Hof= Organisten zu Quedlinburg. Frankfurt und Leipzig / In Verlegung Theori Philippi Calvisii, Buch= Händler in Quedlinburg / ANNO 1691.

Outre celui-ci plusieurs autres ouvrages sortirent de sa plume.

¹⁴⁵⁾ Kapitel 1; pag. 1.

¹⁴⁶⁾ Ibidem.

¹⁴⁷⁾ Kap. 17; pag. 32.

¹⁴⁸⁾ Gibelius = Otto Gibel naquit en 1612 à Borg sur Fehmarn, devint Kantor à Stadthagen en 1634, ensuite Kantor à Minden en 1642, puis Recteur d'une école dans la même ville, où il décéda en 1682. Il écrivit e.a. une „Introductio musicæ didacticæ" (1640) et „Proportiones mathematico-musicæ" (1666).

¹⁴⁹⁾ Baryphonos, nom grec de Heinrich Pipegrop, né le 17 septembre 1581 à Wernigerode, décédé

Videtur ¹⁴⁷) cum alijs authoribus (e quibus Gibelium ¹⁴⁸), Baryphonum ¹⁴⁹) allegat) optimum temperamentum statuere hujusmodi ¹⁵⁰).

3600	3456	3375	3240	3200	3072	3000	2880	2700	2592	2560
G	Cis	Cis	D mol	D	Dis	E mol	E	F	Fis m	Fis
		dur								
2400	2304	2250	2160	2133 $\frac{1}{3}$	2040 ¹⁵¹⁾	2025	2000	1920	1800	
G	Gis	A m	A	A dur	As	B m	B	H	c	

ubi D auxiliare apponitur ¹⁵²).

Intervallum vero Gis, Dis, ponitur diapente ¹⁵³). Hanc vocat unferer Temperatur ¹⁵⁴) et in monochordi figura primum collocat et huic tantum ac 6^{to} Temperamento numeros adscribit. sed hic nihil temperatum.

le 3 (13) janvier 1655 à Quedlinburg. En 1606 il devint Subconrector et Stadtkantor à Quedlinburg. Il écrivit une „Isagoge musica“, Magdebourg 1609.

- ¹⁵⁰) La division du monochorde qui suit dans le texte a été obtenue comme suit: la longueur de la corde entière, correspondent au ton C, étant par hypothèse de 3600 unités, l'auteur détermine celle de l'octave c en prenant la moitié de 3600; celle de la quinte G est déterminée par la fraction $\frac{2}{3}$, de la quarte F par $\frac{3}{4}$, de la tierce majeure E par $\frac{4}{5}$, de la tierce mineure (E mol, c.à.d. E molle = Mi bémol) par $\frac{5}{6}$. Ensuite A est déduite de F et H de G en réduisant à $\frac{4}{5}$ la longueur de la corde (tierce majeure). Werckmeister observe qu'on peut aussi déduire A de C et H de D en prenant les $\frac{3}{5}$ de la longueur de la corde (sixte majeure). Cependant D elle-même n'est pas encore déterminée. C'est sans doute à cette circonstance que Huygens fait allusion en disant: ubi D auxiliare apponitur. On peut cependant remarquer qu'à la p. 35 Werckmeister donne pourtant une détermination directe de D en prenant les $\frac{8}{9}$ de la longueur de la corde de C. Ensuite Werckmeister trouve Fis, Gis, Cis, Dis, Ais comme tierces majeures supérieures respectivement de D, E, A, H et Fis (éventuellement avec réduction d'octave). B mol étant déterminée comme octave de la quinte inférieure (ou comme quarte) de F, Cis dur (durum) s'en déduit comme étant la tierce mineure et D mol comme étant la tierce majeure de B mol, tandis que Fis mol est la tierce majeure de D mol, A mol la tierce mineure de F, A dur la tierce mineure de Fis et enfin B celle de G.

¹⁵¹) Lisez 2048 et Ais.

¹⁵²) Voyez la note 150.

¹⁵³) D'après la méthode de Werckmeister tel est en effet le cas.

¹⁵⁴) Werckmeister prend „Temperatur“ dans le sens de „Divisio Monochordi“, donc dans celui de détermination de rapports mathématiques correspondant aux intervalles. Huygens fait probablement allusion ici à un endroit de la p. 51: „Dieses ist also die Vorstellung aller Proportionen und Intervallorum, so weit in unserer Temperatur operiret wird“.

Hoc est ipsius temperamentum ¹⁵⁵) 1 : 132 ¹⁵⁶).

4 : 3					4 : 3						
196	186	176	165	156	147	139	131	124	117	110	104
C	Cis	D	Dis	E	F	Fis	G	Gis	A	B	H
98	93	88	82½	78	73½ ¹⁵⁷)	69½	65½ ¹⁵⁸)				
c	cis	d	dis	e	f	fis	g				

¹⁵⁵) C'est dans les Kapitels 26 et 27 que Werckmeister fait connaître ses propositions à lui sur la Temperatur: (26) „Noch eine sonderliche Art einer Temperatur durch den Septenarium, so mit der Weitläufigkeit der commatum nichts zu thun hat"; (27) „Process der Temperatur ex Septenario zweyerley Arten". On voit que l'un et l'autre système reposent sur le Septenarius, c.à.d. sur les propriétés du nombre 7. Suivant celui des systèmes dont parle Huygens la longueur de la corde (monochorde) est divisée en 7. 4196 parties (p. 72 du livre). Werckmeister n'indique d'ailleurs pas comment il a obtenu les diverses longueurs qu'il donne en cet endroit. Pour faire voir dans quelle mesure cette Temperatur se rapproche du système de la gamme tempérée uniformément (dite „gamme tempérée") — laquelle est souvent attribuée à Werckmeister — nous calculons ici en Cents la valeur des différents intervalles (voyez sur les Cents la note 16 de la p. 146 qui suit, faisant partie de l'Avertissement du „(nouveau) Cycle Harmonique").

Intervalles de la corde C suivant le système

	de Werckmeister	de la gamme tempérée
Cis	90,66	100
D	186,33	200
Dis	298,07	300
E	395,17	400
F	498,04	500
Fis	594,92	600
G	697,54	700
Gis	792,62	800
A	899,41	900
B	1000,02	1000
H	1097,12	1100
c	1200	1200

¹⁵⁶) Ce nombre indique apparemment que l'intervalle E—A s'écarte de $\frac{1}{132}$ de la quarte. En

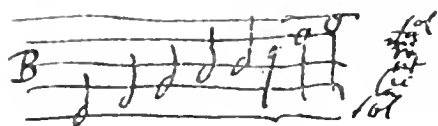
$$\text{effet } \frac{176}{131} = \frac{4}{3} \cdot \frac{132}{131}.$$

¹⁵⁷) Huygens a mis ici le nombre juste au lieu du nombre erroné (72) de Werckmeister. Mais dans la planche vis-à-vis de la p. 38 du livre on trouve la vraie valeur $73\frac{1}{2}$.

¹⁵⁸) Le reste de la page de Huygens est recouvert par des calculs brouillonés servant à vérifier les grandeurs des intervalles. Pour l'intervalle re—sa (D—Bes) il trouve $\frac{5}{8}$; pour dis—sa

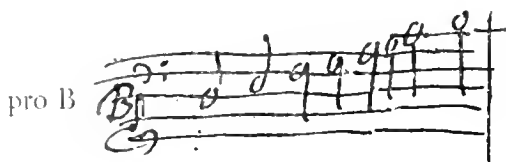
§ 10¹⁵⁹). **Thomas Salmon**¹⁶⁰) (mag. art. in Colleg. Trin. Oxon. impr. 1672) *An Essay to the advancement of musick*¹⁶¹).

Docet absque clavibus vel potius unica musicam omnem commodè scribi, in quinque lineis quarum infima semper sit locus soni G seu sol¹⁶²). Idemque vult fieri in singulis partibus quas vocant ut Bassi Tenore Superio¹⁶³).

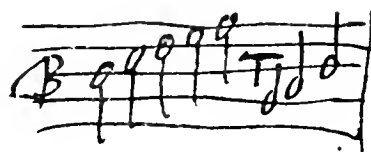


Singulis octavam suam tribuendo per diapason a proxima differentem quas litera prefixa diferiminat. B Bassi diapason notat. T tenoris (apud illum T est Treble seu superius), C Cantus. Tum si longe ultra lineas excurrant

notæ ad altioremi inferioremi diapason referuntur præposita litera ejus partis indice, sic



erit



quæ mutatio perecommoda est quod distantia per diapason mutetur. Hæc meo judicio non contemnenda est inventio, atque eo facilius in usum recipienda, quod, Clavis Bassi ordinaria, ipsdem locis sonos signet atque hæc methodus: nec non et supremæ partis clavis una, ut nihil novi addiscere sit necessè. utilitas autem et discipulis musicam et componentibus concentus non exigua hinc oritur.

(Dis — Bes) $\frac{2}{3}$; pour sol — re (G — d) 3.88 2.131 2, desorte que l'écart par rapport à la quinte

juste est de $\frac{1}{132}$; Huygens observe: „plus quam $\frac{2}{3}$ commatis hæc diapente deficit”; c'est ce qu'il calcule à l'aide de logarithmes. Nous nous abstenons d'une reproduction intégrale de ces calculs.

¹⁵⁹) Portef. „Musica”, f. 34 v.

¹⁶⁰) Thomas Salmon naquit le 24 juin 1648 à Hackney et fut enterré le 16 août 1706 à Mepsal où il était recteur.

- ¹⁶¹) Voici le titre complet: „An Essay to the Advancement of Musick by Casting away the Perplexity of Different Cliffs and Uniting all sorts of Musick.

Lute	}	{	Organ
Viol			Harpsechord
Violin			Voice &c.

in one Universal Character". By Thomas Salmon, Master of Arts of Trinity College in Oxford. Frustra fit per plura, quod fieri potest per pauciora. London. Printed by J. Macock and are to be sold by John Car at the Middle-Temple-Gate. 1672.

- ¹⁶²) La forme dans laquelle cette proposition est formulée dans le „Musik-Lexikon" de Riemann (11^{ème} édition par A. Einstein, Berlin, 1929) peut induire en erreur. On y lit: „er schlug in dem Essay in the Advancement of Musick (1672) als etwas neues vor, statt der Noten die Buchstabennamen der Töne auf die Linien zu schreiben" Or, la proposition de Salmon consiste en ceci qu'à chaque endroit situé à la même hauteur par rapport aux lignes parallèles il veut toujours faire correspondre la même lettre.
- ¹⁶³) Nous observons encore que Salmon se sert des trois lettres T (Treble), M (Meanne) et B (Base).

VI.

LE (NOUVEAU) CYCLE HARMONIQUE.



Avertiffement.

L'étude sur le Cycle Harmonique a déjà été imprimée dans le T. X ¹⁾ dans la forme que Huygens lui donna en 1691, bien longtemps après avoir fait les calculs ²⁾, savoir celle d'une lettre à l'éditeur ³⁾ de l' „Histoire des Ouvrages des Sçavans” ⁴⁾. La traduction latine de cette publication de 1691 dans les „Opera Varia” ⁵⁾ de 1724 porte le nom „Novus Cyclus Harmonicus”.

Dans la l. 19 de la p. 168 de la Pièce qui constitue notre Appendice I Huygens parle lui-même des „nombres du *nouveau* [nous foulignons] temperament. l'octave en 31 parties égales”. En effet, plus loin dans la même Pièce il écrit :

„Que sans doute les divisions de 3 a 2, 4 a 3, 5 a 4, 6 a 5 donnent les consonances les meilleures qu'elles puissent estre. contre Stevin [nous considérons cette première sentence plus loin]. L'octave en 31 parties que donne Merfenne prop. 10 des Genres

¹⁾ P. 169—174.

²⁾ La Pièce A qui suit doit dater de 1661; en effet, Huygens écrivait le 1 août 1661 (p. 12 qui précède) avoir trouvé que dans la musique „les logarithmes sont de grand usage”, ce qui ne s'applique pas aux Pièces de 1661 sur la Division du Monochorde dans lesquelles il n'est pas fait usage de logarithmes.

³⁾ Basnage de Beauval.

⁴⁾ Voyez sur ce périodique la note 11 de la p. 83 du T.X qui mentionne aussi une nouvelle édition de 1721.

⁵⁾ P. 747—754.

de musique n'est pas la nôtre. *et ne sont ses parties aucunement égales* [nous foulignons]". Il pouvait donc fort bien, en écrivant cette page, programme de la Pièce *E*, considérer comme nouvelle la division en 31 parties *égales*.

Il parle autrement sur Merfenne dans la suite. Dans le § 2 de la Pièce *E* il écrit: „je veux icy aller au devant de ce que me pourroient objecter ceux qui ont lu les livres de Salinas ou du Pere Merfenne, a sçavoir qu'il y est parlé bien expressement de cette mesme division de l'octave *en 31 parties égales. Ce qui est vray et je l'avoue volontiers* [nous foulignons]".

Or, les nombres donnés par Merfenne au lieu cité de l'„Harmonie Universelle" de 1636, après les paroles énigmatiques „Je donne néanmoins [c. à. d. sans l'approuver] le système qui supplée les défauts de celui de Salinas, afin que l'on ayt tout ce qui se peut desirer sur ce sujet: or il y a 32 notes, ou 31 intervalles, dont on voit les raisons exprimées par les nombres qui sont à costé vis a vis de chaque note, mais il est si aisé de remarquer ce qu'il a de plus que les autres qu'il n'est pas besoin de l'expliquer, joint que nous en parlons plus amplement dans le liure des Orgues", ces nombres, disons-nous, sont les suivants:

14000[0]	}	32 nombres, voyez sur eux l'Appendice II à la p. 171 qui suit.
138240		
135000		
129600		
72000		

Le rapport des deux premiers nombres est 1,0127; celui du deuxième et du troisième 1,0240; celui du troisième et du quatrième 1,0417 etc. Huygens avait donc pleinement raison en écrivant que les intervalles de Merfenne ne sont nullement égaux et il a eu tort d'avouer un peu plus tard le contraire. Nous ajoutons que les différences des rapports paraissent beaucoup trop grandes pour que nous puissions croire que Merfenne ait eu au moins l'*intention* de les rendre égaux. Quant à Salinas (dont Merfenne dit corriger les défauts) il écrit e. a. ⁶⁾: „non inficiamur, Tonum atque omne

⁶⁾ „Musica", Livre III, chap 27.

intuallum in quinque partes, & plures æquæ proportionales diuidi possẽ Geometricè, sed eas effẽ Dieses, prorsus negamus". Voyez la p. 112 qui précède, avec la note 5. Chez Salinas il est donc manifestement question de séries d'intervalles égaux, mais, comme l'observe Huygens, seulement pour les désapprouver.

Or, dans la Pièce *F*, c. à. d. dans le „Cycle Harmonique" de 1691, Huygens écrit, comme auparavant dans la Pièce *E*: „Salinas fait mention de cette invention de diviser l'Octave en 31 parties égales, mais ce n'est que pour la condamner; & le P. Merfenne après luy la rejette de même, d'où l'on pourra bien me croire, si je dis que ce n'est pas de ces Auteurs que je l'ay prise". Dans l'une et l'autre Pièce Huygens parle de son „nouveau système".

La raison donnée par Huygens pour nous faire croire „que ce n'est pas de ces Auteurs" qu'il a pris la division en 31 intervalles nous paraît faible. Ce qui est parfaitement croyable à notre avis — et tel peut être le véritable sens de sa phrase — c'est que ce ne soient pas ces auteurs *seuls* qui lui aient donné l'idée de sa περιουλωσις. En effet, dans la Pièce qui constitue notre Appendice I il mentionne aussi Stevin; nous avons cité plus haut l'alinéa qui contient ce nom, lequel est immédiatement suivi par celui où Huygens dit que les 31 intervalles de Merfenne ne sont nullement égaux. D'autre part, nous l'avons exposé dans la note 9 de la p. 32, Merfenne savait tout aussi bien que Huygens que chez Stevin il est question de douze intervalles égaux, et les rapports des treize nombres de Beaugrand donnés par Merfenne pour les exprimer sont en effet (à fort peu près) égaux; cette circonstance met encore plus en relief l'inégalité des 31 rapports dont il est question plus haut. Nous avons vu (p. 27) que Huygens désapprouve, tout aussi bien que Descartes, la division en 12 de Stevin, qui d'ailleurs chez cet auteur n'est pas un *tempérament*, mais est censée correspondre à la nature des choses. N'y a-t-il donc pas lieu, tout bien considéré, de soupçonner que le tempérament de Huygens, son *nouveau* [mot de Huygens] cycle harmonique, provient de l'ancien cycle de Stevin, qu'il connaissait sans doute depuis sa jeunesse, corrigé par l'augmentation du nombre des intervalles? De cette façon l'avantage de la περιουλωσις était conservé, sans que les écarts des tons avec ceux du tempérament ordinaire (le tempérament du ton moyen, que Huygens appelle le tempérament véritable ⁷⁾) fussent trop grands.

⁷⁾ Voyez la l. 1 de la p. 116 qui précède.

Tout-le-monde fait, et nous l'avons déjà dit plus haut, que c'est le système de Stevin (ou d'Ariftoxène) qui a triomphé, du moins jusqu'aujourd'hui⁸⁾. Mais celui de Huygens est sans doute plus exact.

Nous ajoutons encore la remarque historique qu'on trouve déjà chez Vicentino⁹⁾, que Huygens ne mentionne pas, la proposition de diviser l'octave en 31 intervalles égaux, dont cinq formeraient un ton entier et trois un demiton majeur. D'autre part la division d'un ton en cinq „dièses” se trouve déjà chez Marchetto de Padoue¹⁰⁾.

Consultez sur un manuscrit qui nous est resté inconnu et qui a pu avoir une certaine influence sur Huygens la note 11 de la p. 46 qui précède.

Voyez aussi la fin de la note 21 de la p. 160 qui suit.

Chez Huygens le système prend un nouvel aspect à deux égards. D'abord il est en état d'indiquer fort exactement les longueurs des cordes correspondant aux différents

⁸⁾ Ici nous exagérons légèrement. „Tout-le-monde” sait que le système de la gamme tempérée, à 12 intervalles égaux, a triomphé; mais il n'est pas généralement connu que Stevin a préconisé le système des 12 intervalles égaux au début du dix-septième siècle et que c'est à lui que Mersenne, dans l'„Harmonie Universelle”, l'attribue en premier lieu (p. 33 qui précède). James Jeans („Science and Music”, Cambridge, Univ. Press, 1938, p. 175) écrit: „All semitones are now equal and . . . each represents precisely the same frequency ratio 1,0587 . . . these frequency ratios had been correctly calculated by the French mathematician Mersenne [voyez cependant ce que nous disons à la p. 34 qui précède sur Beaugrand, Boulliau et Gallé], and published in his *Harmonie Universelle* as far back as 1636”. J. P. N. Land écrit („Het toonstelsel van Chr. Huygens”, 1891, p. 198): „Met name wilde de praktijk, dat men de toonladder, zonder op een instrument met vaste tonen (klavier of orgel) al te veel toetsen in te voegen, op elk harer eigene trappen zou kunnen transponeren. Sedert J. Seb. Bach is dit, naar men weet, bereikt door de verdeeling der octaaf in twaalf gelijke halve tonen, waarvoor men de berekening heeft gemaakt”.

⁹⁾ Nicola Vicentino, né en 1511 à Vicenza, décédé à Rome en 1572, compositeur et théoricien, tâcha de faire revivre les systèmes chromatique et enharmonique des Anciens. Il traite ce sujet dans son ouvrage „L'antica musica ridotta alla moderna prattica”, Rome 1555. Comparez K.W.J.H. Riemann, „Geschichte der Musiktheorie im IX—XIX Jahrhundert”, Leipzig, 1898, p. 358.

¹⁰⁾ Marchetto de Padoue, théoricien, florissait vers 1300. Comparez Riemann, l. c. p. 136.

¹¹⁾ Voyez les notes 4, 5 et 6 des p. 171 et 172 qui suivent.

tons, puisqu'il se fert, lui le premier, paraît-il, du calcul des logarithmes ¹²⁾; désormais, la vraie mesure d'un intervalle devient le logarithme du rapport correspondant: comparez le premier Avertissement du présent Tome et la lettre de Huygens à Moray de 1661 ¹³⁾. En second lieu il démontre que le système des 31 tons ainsi définis diffère si peu de celui du ton moyen que les deux peuvent être considérés comme passablement identiques: partant le système du ton moyen acquiert pour ainsi dire un nouveau fondement mathématique.

Nous publions ici (Pièce *D*) un fragment inédit d'un projet de lettre à Basnage de Beauval ¹⁴⁾; (Pièce *E*) une rédaction française du Cycle Harmonique — d'ailleurs fragmentaire elle aussi: elle se termine par une phrase inachevée — antérieure à celle (Pièce *F*) qui parut en octobre 1691; (Pièce *A*) la „*Divisio octavæ in 31 intervalla æqualia*” datant sans doute déjà de 1661 puisque le revers de la feuille contient la nouvelle méthode ¹⁵⁾ de cette année du calcul des logarithmes (dont Huygens fit part à l'Académie des Sciences de Paris en 1666 ou 1667, voir plus loin dans le présent Tome); enfin une table (Pièce *B*) mentionnée et partiellement reproduite dans l'article de 1891 „*Het toonstelsel van Christiaan Huygens*” de Land ¹⁵⁾; un commentaire sur une autre table (Pièce *C*), quelques notes (Pièce *G*) et l'important Appendice I mentionné plus haut. Voyez sur l'Appendice II la p. 142.

Notons encore que les claviers mobiles que Huygens fit construire à Paris paraissent être de 1669: voyez la note 22 de la p. 161. Consultez sur un clavier mobile dont Huygens entendit parler en 1663 le deuxième alinéa de la note 2 de la p. 154.

Pour terminer nous donnons ici une table des intervalles que forment avec la tonique C les différents tons de la gamme chromatique respectivement suivant le système de Huygens, suivant celui du ton moyen et suivant celui du tempérament uniforme ou division de la gamme en 12 intervalles égaux. Nous exprimons les inter-

¹²⁾ P. 7 et 12 qui précèdent. F. J. Fétis, „*Biographie universelle des musiciens*” (2^{ème} édition, Paris 1864, T. VI s. v. Neidhardt), émettait l'hypothèse que J. G. Neidhardt dans son ouvrage „*Sectio canonis harmonici, zur voelligen Richtigkeit der Generum modulandi*”, Königsberg, 1724, aurait été le premier à appliquer les logarithmes dans la théorie de la musique. Riemann, „*Musik-Lexikon*”, 9^{ème} éd. Leipzig, 1919 (de même Riemann—Einstein „*Musik-Lexikon*”, 11^{ème} éd. Berlin, 1929 s.v. Logarithmen), ne connaît pas d'application de logarithmes à la musique avant L. Euler. Comparez la p. 7 qui précède (note 10).

¹³⁾ Comparez la note 3 de la p. 141.

¹⁴⁾ Comparez la fin de la Pièce II à la p. 12 qui précède.

¹⁵⁾ Mentionné dans la note 4 de la p. 44 qui précède.

valles en Cents ¹⁶⁾ et en outre en dièses dans le cas du système de Huygens. Les différences de grandeur des intervalles du système de Huygens et de ceux du système du ton moyen sont indiquées en Cents et aussi en fractions du comma syntonique.

<i>Intervalles avec C. d'après le système</i>						<i>du tempérament égal</i>
<i>de Huygens</i>		<i>du ton moyen ¹⁷⁾</i>	<i>différence</i>			
	en dièses	en Cents	en Cents	en Cents	en fractions de comma	
Cis	2	77,42	76,06	1,36	1/16	100
Des	3	116,13				
D	5	193,55	193,15	0,40	1/54	200
Dis	7	270,97				300
Es	8	309,68	310,28	—0,60	—1/36	
E	10	387,10	386,31	0,79	1/27	400
F	13	503,23	503,44	—0,21	—1/102	500
Fis	15	580,65	579,48	1,17	1/18	600
G	18	696,78	696,58	0,20	1/108	700
Gis	20	774,20	772,63	1,57	1/14	800
As	21	802,91				
A	23	890,33	889,73	0,60	1/36	900
Ais	25	967,74				1000
Bes	26	1006,45	1006,80	—0,35	—1/61	
B	28	1083,87	1082,90	0,97	1/22	1100
C	31	1200.	1200.			1200

¹⁶⁾ Le nombre de Cents correspondant à l'intervalle de deux tons donnés par des cordes de longueurs respectives m et n (où nous supposons $m < n$), en d'autres termes, celui de deux tons dont les fréquences des vibrations sont dans le rapport $n:m$, est le logarithme de la fraction $\frac{n}{m}$ pour la base $2^{\frac{1200}{\log 2}}$. On calcule donc le nombre de Cents d'après la formule $\frac{1200 \log \frac{n}{m}}{\log 2}$. L'octave vaut évidemment 1200 Cents; la dièse de Huygens en comprend $\frac{1200}{31} = 38,71$; et le comma syntonique 21,5.

¹⁷⁾ Le calcul a été exécuté par l'application de la formule de la note 16 aux valeurs de la table du «(Nouveau) Cycle Harmonique» dressée par Huygens.

A. DIVISIO OCTAVAE IN 31 INTERVALLA AEQUALIA ¹⁾

[1661] (per logarithmos)

1676. bon. Publié dans les Ouvrages des Scavants ²⁾ de Mr. Beauval, au mois de Dec. 1691 ³⁾.

Differentia logarithmorum 100000 et 50000 dividitur per 31 quia inter chordas partium 100000 et 50000 quærimus medias proportionales 30 ut fiant intervalla 31 æqualia.

Quotiens 97106450 additus continuè ad logarithmum numeri 50000, dabit logarithmos omnium chordarum intermediarum inter eam quæ partium 50000 et maximam partium 100000.

diff. ⁴⁾ log. 100000 et log. ⁵⁾ 50000.

5,0000000000

4,6989700043

0,3010299957

qui est log. 2, quem ex cap. 7 log. ⁶⁾ Vlacquii accersivi ⁷⁾.

31 / 30102999566 / 971064502 ⁵⁾

31 / 30102999566 / 971064502 ⁵⁾

quinta minor est verà $\frac{1}{4} - \frac{1}{110}$ commatis. tantundem quarta exuperat. tertia major excedit veram $\frac{1}{27\frac{1}{2}}$ commatis. tertia minor deficit $\frac{1}{4} + \frac{1}{32}$ commatis ⁶⁾.

5,0000000000

log. 100000

97106450

4,9902893550 ⁷⁾

¹⁾ Portefeuille „Musica“, f. 11. Les remarques initiales, datées de 1676 et de 1691, ont évidemment été ajoutées plus tard. Comparez la note 3.

²⁾ Ou plutôt „Histoire des Ouvrages des Scavans“.

³⁾ D'après la note 1 de la p. 169 du T. X ce fut dans le fascicule d'octobre; celui-ci parut deux mois plus tard.

⁴⁾ Voyez sur cet ouvrage la note 1 de la p. 478 du T. XIV.

⁵⁾ Nous indiquons ainsi la division de Huygens de 30102999566 par 31.

⁶⁾ Comparez le § 3 de la Pièce E sur le „Cycle Harmonique“ qui suit (p. 158), où sont indiquées les différences suivantes par rapport aux intervalles du système usuel; pour la quinte $\frac{1}{110}$ comma (excès), pour la tierce mineure $\frac{1}{37}$ comma (défaut), pour la tierce majeure $\frac{4}{110}$ comma (excès).

⁷⁾ La table qui suit contient les colonnes I, II, III, V et IV de celle de la „Lettre touchant le Cycle Harmonique“ (Pièce F. qui suit ou plutôt T. X, p. 173). Seulement dans la table du texte toutes les unités de la dixième décimale des logarithmes qui forment la colonne I sont plus grandes de six unités. Dans celle de la „Lettre“ Huygens prendra $\frac{1}{31} \log 2 = 0,0097106450$

scripti 9 pro 3 ⁷), addito 6 quod proventurum erat ex 2 sibi addito 31 ^a .	971064502	N			
	4,69897000497)	log. 50000	V	50000	C
	4,7086806499	51131			
	4,7183912949	52287			
	4,7281019399	53469	C	53499	B ²
	4,7378125849	54678			
	4,7475232299	55914		559017	B
	4,7572338749	57179	L ²	57243	A ² 8)
	4,7669445199	58471			
	4,7766551649	59794	L	59814	A
	4,7863658099	61146			
	4,7960764549	62528	*	62500	A ² 9)
	4,8057870999	63942	S ²	64000	G ²
	4,8154977449	65388			
	4,8252083899	66866	S	66874	G
	4,8349190349	68378			
	4,8446296799	69924	*	69879	
	4,8543403249	71506	F ²	71554	F ²
	4,8640509699	73122			
	4,8737616149	74776	F	74767	F
	4,8834722599	76467			
	4,8931829049	78196			
	4,9028935499	79964	M	80000	E
	4,9126041949	81772			
	4,9223148399	83621	M ²	83592	E ²
	4,9320254849	85512	*	85599	D ² 9)
	4,9417361299	87445			

en négligeant les 2 unités de la 11^{ème} décimale. Puisque le nombre trouvé doit être ajouté 31 fois à log. 50000, la somme des fautes s'élève alors à 6 unités de la 10^{ème} décimale. C'est pourquoi dans la présente table Huygens ajoute ces 6 unités au premier terme de la série.

8) La présente Ais n'a dans la „Lettre” d'autre nom que celui de corde enharmonique.

9) Note dépourvue de nom dans la „Lettre”.

4,9514467749	89422	R	89443	D
4,9611574199	91444			
4,9708680649	93512	*	63459	D ²
4,9805787099	95627	V ²	95702	C ²
4,9902893549	97789			
4,9999999999	100000	V	100000	C

En marge au crayon : V[oyez] Merfenni traité des Consonances et Dissonances p. 117 ¹⁰⁾.

B. TABLE INTITULÉE
„DIVISION DE L'OCTAVE EN 31 PARTIES EGALES" ¹¹⁾

Division en parties égales	Division suivant le temperament ordinaire
50000	V ²) 50000
51131	
52287	
53469	C 53499
54678	
55914	C ²
57179	*
58471	
59794	L 59814
61146	
62528	* 62500

¹⁰⁾ Ceci se rapporte aux „Traitez" cités e.a. dans la note 63 de la p. 120 qui précède. Livre II. Des Dissonances. Prop. II. „Expliquer tous les Demitons, et les Dieses dont on se sert dans la Musique considérée en sa plus grande perfection". Mersenne y traite des observations de Salinas („De Musica", Lib. III, cap. 27) sur l'Archicymbalum dont il sera question à la p. 157 qui suit.

¹¹⁾ Portefeuille „Musica", f. 4. La table a été mentionnée, et les dernières lignes ont été publiées en 1891 par J. P. N. Land, comme nous l'avons indiqué dans l'Avertissement. Comme cette table est à fort peu près identique avec celle de la Pièce A qui précède nous l'aurions omise si nous n'avions voulu tenir compte de l'article de Land.

Division en parties égales	Division suivant le temperament ordinaire	
63942	S [♯]	64000
65388		
66866	S	66874
68378		
69924		
71506	F [♯]	71554
73122		
74776	F	74767
76467		
78196		
79964	M	80000
81772		
83621	M [♯]	83592
85512	*	85599
87445		
89422	R	89443
91444		
93512	*	93459
95627	V [♯]	95702
97789		
100000	V	100000

Dans la division égale les quintes sont moindres que les parfaites d'un $\frac{1}{4} - \frac{1}{110}$ de comma; et partant un peu meilleures que dans le temperament ordinaire où il y a $\frac{1}{4}$ de comma entier. Les quarts sont donc plus grandes que les parfaites d' $\frac{1}{4} - \frac{1}{110}$ de comma. La tierce majeure excède la parfaite d' $\frac{1}{27}$ de comma. La tierce mineure est trop petite d' $\frac{1}{4} + \frac{1}{37}$ de comma.

C. COMMENTAIRE SUR UNE TABLE¹⁾.

La 2^{de} colonne de cette table²⁾ contient les nombres qui expriment les longueurs des 31 chordes qui font les 31 intervalles égaux suivant la nouvelle division, la chorde entière étant supposée de 100000 parties et par conséquent sa moitié, qui fait l'octave contre elle de 50000. Et à côté font les noms des tons, qui font employez d'ordinaire et des * pour quelques chordes enharmoniques, dont celle auprès du sol³ est la plus nécessaire.

Ces nombres ont été trouvez par ceux de la 1^{re} colonne qui font leur logarithmes respectifs. Et pour avoir ceux cy, j'ai divisé le logarithme de 2 qui est 0,30102999566 par 31, d'où est venu le nombre N 97106450, que j'ay adjouté continuellement au logarithme de 50000, qui est 4,6989700049. D'où font procédéz tous ces logarithmes jusqu'au plus grand 4,9999999993, qui manquant si peu de 5,0000000000, fait voir que le calcul a été bien fait. Ceux qui entendent les Logarithmes savent qu'il a falu faire ainsi pour avoir les 30 nombres proportionaux entre 100000 et 50000.

La 3^e colonne comprend les longueurs des chordes suivant le Temperament ordinaire³⁾, et dans la 4^e colonne font leurs logarithmes; qui ont été trouvez par les nombres Algebriques de la 5^e et 6^{me} colonne. Et ceux cy par la methode qui l'enfuit⁴⁾, et qui fait voir comment ce Temperament pourroit avoir été trouvé lors qu'il estoit encore inconnu.

J'ay nommé a la longueur de toute la chorde dont le ton soit Vt d'où la moitié estoit $\frac{1}{2}a$, dont le ton est marqué Vt^2 . Pour la longueur de la chorde sol j'ay mis x , m'imaginant que ce fut la quinte au dessus de ut. Et, faisant l'intervalle de sol Re^2

¹⁾ Portefeuille „Musica”, f. 9r et v.

²⁾ Nous ne possédons pas la table en question. Le texte fait voir qu'elle doit avoir été partiellement identique avec celle du „Cycle Harmonique” (la présente Pièce F) publiée à la p. 173 du T.X: les colonnes I et II doivent avoir été les mêmes à cette différence près que dans la table du texte les noms des notes formant les colonnes III et IV de l'autre table faisaient partie de la colonne II. Les colonnes III et IV de la table du texte correspondaient donc aux colonnes V et VI (voyez sur cette dernière les corrections de Huygens de la p. 240 du T.X.) de l'autre. Quant aux colonnes V et VI, elles étaient apparemment identiques avec les deux premières colonnes de la Pièce C. „Divisio Monochordi II” (p. 57 qui précède), du moins en ce qui se rapporte à l'intervalle Ut- Ut^2 , et à cette différence près que la table du texte ne donnait pas les longueurs des cordes enharmoniques entre C^{\sharp} et D, entre D et E^{\sharp} , entre G^{\sharp} et A et entre A et B (c. à. d. Bes).

³⁾ C'est du système du ton moyen que Huygens entend parler. Comparez la note 14 de la p. 158.

⁴⁾ Consultez la Pièce B. Divisio Monochordi I.

derechef d'une quinte il falloit que comme a à x ainfi fut x à $\frac{x \cdot x}{a}$ longueur de la chorde Re^2 . Et de cellecy l'octave en bas, scavoir Re devoit estre $\frac{2 \cdot x \cdot x}{a}$; et d'icy montant derechef d'une quinte en La , sa longueur devoit estre $\frac{2 \cdot x^3}{a a}$, parce que comme a à x ainfi $\frac{2 \cdot x \cdot x}{a}$ à $\frac{2 \cdot x^3}{a a}$. Et montant encore d'une quinte en Mi^2 , elle estoit $\frac{2 \cdot x^4}{a^3}$ et son octave en bas Mi , $\frac{4 \cdot x^4}{a^3}$.

Or je scavois que l'intervalle de Ut , La devoit faire la sexte majeure, et qu'on l'emploioit pour tel. Mais en posant les quintes justes selon la proportion de la 3 à 2, c'est a dire en faisant $x \propto \frac{2}{3}a$, on avoit $\frac{2 \cdot x^3}{a a} \propto \frac{16}{27}a$. Donc la proportion de a à $\frac{16}{27}a$ devoit estre comme de 5 à 3 qui est celle de la sexte majeure, ce qui n'est point, car la raison de a à $\frac{16}{27}a$, ou bien la raison de 27 à 16, excède celle de 5 à 3 de la raison de 81 à 80, qu'on appelle le Comma, donc en voulant que les quintes soient justes, la sexte majeure surpassoit la vraye d'un comma entier, ce que l'oreille ne peut pas souffrir estant pres de 1/9 de ton. Mais outre cela l'intervalle de Ut , Mi , qu'on veut que ce soit une tierce majeure, devient plus grand que le veritable, car Mi a esté trouvé $\frac{4 \cdot x^4}{a^3}$ qui devient $\frac{64}{81}a$ si on suppose $x \propto \frac{2}{3}a$. Or la raison de a à $\frac{64}{81}a$, ou de 81 à 64, est plus grande que celle de 5 à 4 (qui donne la tierce majeure juste), de la raison de 81 à 80, qui est encore justement celle du Comma. Et les tierces mineures seront moindres que les veritables de ce mesme Comma parce qu'elles sont le complement a la quinte des tierces majeures. J'ay donc vu qu'il estoit bon de diminuer les quintes de quelque chose en posant x plus grand que $\frac{2}{3}a$, parce que de là les sextes majeures décroissoient estant trop grandes; et qu'en mesme temps la tierce majeure Ut Mi se diminuoit aussi parce que $\frac{4 \cdot x^4}{a^3}$ devient plus grand lors qu'on augmente la quantité de x . Mais de combien plus grande falloit il prendre x que $\frac{2}{3}a$. La voie du milieu parut estre la meilleure qui estoit de faire que les quintes et les sextes majeures différassent également des vraies, les unes en perdant les autres en excédant. J'ay donc fait que la longueur de x fut à $\frac{2}{3}a$ comme $\frac{3}{5}a$ à $\frac{2 \cdot x^3}{a a}$, c'est a dire comme la longueur de La parfaite à celle qui a esté trouvée cy dessus. d'ou vient l'equation $\frac{2 \cdot x^4}{a a} \propto \frac{6}{15}a a$ et $x \propto \sqrt[4]{\frac{1}{5}a^4}$.

Par là la corde Mi qui a esté trouvée $\frac{4x^4}{a^3}$ devient $\frac{4}{5}a$, x étant donc supposée telle les quintes seront diminuées de la même quantité que les sextes majeures ⁵⁾. Or la

raison de $\sqrt[4]{\frac{1}{4}a^4}$ à $\frac{2}{3}a$ est la même que celle qui constitue le quart du comma, puisque cette raison étant quadruplée fait la raison de 81 à 80 ou du comma entier, comme il est aisé de voir en prenant le quarré carré de chacun des deux termes.

Diminuant donc la quinte Ut, sol, et par conséquent aussi les autres de $\frac{1}{4}$ de Comma, les sextes majeures surpasseront d'autant les véritables; et pour les quartes et les tierces mineures qui sont les compléments à l'octave de ces consonances, les premières surpasseront les vraies du même $\frac{1}{4}$ de comma et les autres defaudront d'autant.

D. PROJET D'UNE LETTRE À BASNAGE DE BEAUVAL ¹⁾.

Je vous envoie comme j'avois promis, ma remarque en matière de Musique. Elle regarde le premier fondement de cette science, savoir la détermination des Tons que l'on observe dans le Chant et dans la fabrique des Instrumens qui servent à l'harmonie. Ceux qui ont un peu étudié en cecy la Théorie, savent que l'Octave est divisée en tons et semitons, qui ne sont pas formés par hasard ni par caprice, mais qui sont comme des suites nécessaires des consonances; ce qui est cause que par tout le monde ces Tons ou degrez du chant ne scauroient être que les mêmes, c'est à dire du chant le plus naturel, qu'on appelle diatonie. Ils savent aussi que depuis qu'on a commencé à vouloir définir ces mêmes Tons selon l'exactitude mathématique, l'on a trouvé quelque diversité dans la division de l'octave faite en divers temps et par diverses personnes. Car les anciens qui ne comptoient pour consonances que l'octave, la quinte et la quarte, et qui ne pratiquoient point la composition à plusieurs parties, prenoient seulement garde en divisant leur octave ou double octave, que les intervalles des tons leur rendissent en certains endroits ces consonances dans toute leur perfection. Mais dans la Musique moderne où l'on a trouvé que la pluralité des consonances est nécessaire et que toute l'harmonie des concerts en dépend; on a reconnu que sur nos instrumens les plus parfaits comme les Orgues et les Clavecins, on ne pouvoit suivre aucune des constitutions des Tons des Anciens, ou bien qu'il falloit ajouter à ces

⁵⁾ Lisez: de la quantité dont les sextes majeures seront augmentées.

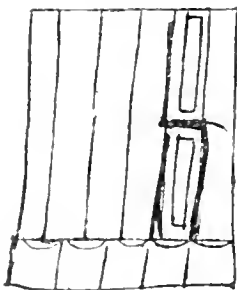
¹⁾ F. 10 r et v du portefeuille „Musica”. Comparez, aux p. 169 et suiv. du T. X, le texte définitif de la „Lettre touchant le Cycle Harmonique”.

instrumens des cordes et des touches extraordinaires, outre les feintes ou tons chromatiques qu'on y avoit desja adaptees avec beaucoup de raison²⁾. parce que sans ces cordes adjoutees on manquait de plusieurs consonances necessaires, ou on les avoit si imparfaites que l'oreille ne pouvoit les souffrir. mais ce nombre des touches super-numeraires apportant trop de confusion et de difficultè, on a a la fin trouvé heureusement ce qu'on appelle le Temperament, a l'aide duquel, en ostant quelque peu à de certaines consonances et adjoutant à d'autres sans que pourtant cela choque l'oreille, on a formé le système dont on se sert aujourd'hui qui est abondant en accords; et fournit tout ce qu'il faut pour l'Harmonie de plusieurs Parties. Apres cette invention, dont les meilleurs auteurs comme Zarlín et Salinas parlent comme d'une des plus belles et des plus utiles qui se puissent trouver en fait de Musique, l'on a laissé la tous les Systèmes des Anciens, et les supplémens des cordes des modernes; sur tout depuis que ces auteurs que je viens de nommer, ont examiné et défini le meilleur temperament par regle et par raison, dont ils se disputent entre eux la gloire; car l'expérience et la nécessité l'avoient desja introduit en quelque maniere auparavant, sans qu'on fust pourtant la vraie mesure ni methode.

On apprend au reste chez ces mesmes auteurs, que pour pratiquer ce Temperament dans l'accord des instrumens il faut diminuer la consonance de quinte d'une petite quantité qui fait le quart de ce qu'on appelle Comma; ce qui est si peu que cette diminution à peine est perceptible à l'oreille et ne l'offense nullement; le comma entier étant le rapport entre les tons de la corde entiere contre elle mesme racourcie d'une $\frac{1}{80}$ partie. Toutes les quintes étant ainsi diminuees, il s'en ensuit que les quartes sont

²⁾ On connaît l'existence d'instrumens à touches scindées (p.e. pour dis et as) déjà dans la deuxième moitié du 15^{ème} siècle. Ils s'appelaient: instrumens enharmoniques. D'autre part il y avait des constructions permettant de modifier par voie mécanique les tons des touches supérieures. Pour les particularités on peut consulter la dissertation de 1935 de W. Dupont (comparez la note 9 de la p. 157 et la note 14 de la p. 158).

[Fig. 3]



En 1663 Huygens visita à Londres un nommé Senti qui demandait une certaine somme „voor een clavecingel die 2 halve toonen gesneden soude hebben, en met het uyttrecken van 't clavier een toon hooger gaen” (Journal de voyage à Londres, p. 176 de H. L. Brugmans „Le séjour de Christian Huygens à Paris etc.” 1935).

La Fig. 3 de Huygens, empruntée à la f. 1 du portef. „Musica”, représente une touche scindée.

augmentées de cette même quantité de quart de comma, que les tierces mineures sont encore diminuées, et les sextes majeures augmentées, de cette même quantité. Et qu'enfin les Tierces majeures demeurent parfaites ce qui est fort considérable. Enfin tous ces petits changements aux consonances dont il n'y a que ces tierces majeures et les octaves d'exceptées, n'empêchent pas que toute l'harmonie ne soit écoutée comme si rien ne manquoit ³⁾).

E.¹⁾ CYCLE HARMONIQUE PAR LA DIVISION DE L'OCTAVE EN 31 DIESES ²⁾, INTERVALLES ÉGAUX.

Cette étude est précédée (également f. 16 du portef. „Musica”) par la Pièce, le programme peut-on dire, que nous publions comme Appendice à la p. 168 qui suit.

§ 1. Ceux qui ont un peu étudié la Théorie de la Musique (et ce n'est que d'eux que je pourrai être entendu) savent ce que c'est que le Temperament qui sert à bien accorder les instruments à clavier qui sont les plus parfaits que nous ayons. Zarlin et Salinas en parlent comme d'une des belles choses et des plus nécessaires, qu'on peut trouver dans la musique et se disputent l'honneur de l'avoir examiné et réglé par raison car l'expérience et la nécessité avoient déjà auparavant introduit l'affaiblissement des 5^{tes} qui est le point principal, mais sans précise mesure, sans savoir de combien. C'est aussi ce Temperament qui a fait négliger avec raison tous les divers systèmes et divisions du monochorde des anciens, la plupart absurdes et impraticables; et qui rend

³⁾ En marge: vocem temperamentum sequi. — Salinas parle de la division 31. Comparez la p. 112 qui précède.

¹⁾ Portefeuille „Musica” f. 16—19.

²⁾ Huygens donne à l'intervalle 31 fois répété le nom dièse (*δίσσις*), lequel dans le système harmonique naturel désigne l'intervalle dont une octave surpasse la somme de trois tierces majeures (grand dièse) ou bien celui dont la somme de 4 tierces mineures surpasse l'octave (petit dièse). Dans le système pythagoricien le même mot est parfois employé pour indiquer le *λίσσις* (256:243). Chacun de ces dièses a sa propre valeur: celle du grand dièse est de 62,6 Cents, du petit 40,1 Cents, du *λίσσις* ou limma 90,23 Cents, de celui de Huygens 38,71 Cents.

Généralement, chez les musicologues, le mot *δίσσις* est employé pour désigner un petit intervalle. La manière dont Huygens applique ce terme s'accorde en principe avec celui d'Aristoxène, qui appelle son plus petit intervalle ($\frac{1}{4}$ ton) *δίσσις ἐναρμόνιος ἐλάχιστη* („Harm. Elem”. éd. Meibomius, p. 21). On pourrait parler d'un intervalle-atome.

Comparez l'„intervalle-atome” de la Tabula de Meibomius mentionnée à la p. 6 qui précède.

notre système plus abondant en accords et plus selon la nature du chant, que n'étoient ceux la ³⁾).

On apprend au reste chez ces auteurs ⁴⁾ que pour le pratiquer les quintes et les 6 mineures sont diminuées d'un quart de comma, qui est un petit intervalle à peine perceptible à l'oreille, le comma entier étant le rapport entre le son de la corde entière contre elle même raccourcie d'une partie 81^{me}, et que les 4^{tes} et les sixtes majeures par conséquent s'y trouvent augmentées de ce même quart de comma et qu'ainsi outre les octaves et les tierces majeures qui demeurent parfaites, tous les accords sont modifiés ⁵⁾ en sorte que l'oreille n'en est aucunement offensée, mais s'en contente comme s'ils étoient parfaits, que je suppose que l'on connoit, sçavoir que la quinte parfaite s'entend entre le son de la corde entière et celui de ses $\frac{2}{3}$. ou bien que la proportion qui produit cette consonance est de 3 à 2, celle de la quarte de 4 à 3; de la tierce majeure de 5 à 4, de la tierce mineure de 6 à 5. de la sixte majeure de 5 à 3, de la sixte mineure de 8 à 5.

Or la remarque que j'ay faite, c'est que si on divise l'Octave en 31 parties égales, ce que se fait en trouvant 30 longueurs moyennes proportionnelles entre toute la corde qu'on prend pour règle l'harmonique, et sa moitié; on trouvera dans les tons qui proviennent en faisant sonner apart toutes ces longueurs, un système si approchant de celui qui provient du dit Temperament, tant pour les tons diatoniques que chromatiques et enarmoniques qu'on y voudra joindre, qu'il sera entièrement impossible que l'oreille la plus délicate y trouve de la différence. Et que pourtant ce même nouveau système sera d'une nature bien différente de l'autre, et apportera de nouveaux avantages tant pour la théorie que pour la pratique.

Le son contiendra 5 de ces parties égales, qu'on peut nommer dieses, le grand demiton 3, le petit demiton 2, la tierce mineure 8, la tierce majeure 10, la quarte 13, la quinte 18; la sixte mineure 21; la sixte majeure 23; le triton 15 et la fausse quinte par conséquent 16 ⁶⁾).

§ 2. Mais devant que de faire voir la proximité de cette division avec celle qui naît du Temperament susdit, je veux icy aller au devant de ce que me pourroient objecter ceux qui ont lu les livres de Salinas ou du Pere Merfenne, à sçavoir qu'il y est parlé bien expressément de cette même division de l'octave en 31 parties égales. Ce qui

³⁾ Leçon alternative : les leurs.

⁴⁾ Voyez, à la p. 49 qui précède, la Pièce B. „*Divisio Monochordi I*”.

⁵⁾ Leçon alternative : ordonnez.

⁶⁾ Voyez l'Avertissement. Le triton ou quarte augmentée est un intervalle composé d'un ton majeur, d'un ton mineur et d'un deuxième ton majeur, p.e. c — fis¹. Le rapport correspondant est 45:32 ou approximativement 7:5. La „fausse quinte” est le complément du triton par rapport à l'octave.

est vray et je l'avoue volontiers. Mais comme Salinas ne fait mention de cette invention que pour la condamner absolument, et que le P. Merfenne la rejette de même, on pourra bien me croire si je dis que ce n'est pas de la que je l'ay pris⁷⁾. Mais quand cela seroit, je croirois avoir fait assez d'avoir examiné cette division par la voye de la geometrie et de l'avoir soutenuë contre l'injuste sentence prononcée par ces 2 celebres auteurs. je crois qu'on me seroit obligé.

Salinas fait un Chapitre entier dont l'inscription est *De prava constitutione cujusdam instrumenti quod in Italia citra quadraginta annos fabricari coeptum est, in quo reperitur omnis tonus in partes quinque divisus*⁸⁾. Il dit que cet instrument estoit nommé archicymbalum⁹⁾ qu'il estoit *incerti auctoris*¹⁰⁾, que certains musiciens celebres en faisoient grand estime, et particulierement de ce qu'il avoit tous les intervalles et toutes les consonances (comme ils croient dit il) en dessus et en dessous, et qu'après certaine periode on y revenoit au même son, ou équivalent, d'où on estoit parti. marquant aussi combien de ces 31 parties egales de l'octave, chaque consonance en contenoit, de même que je viens de faire. Mais il ajoute qu'il a essayé d'accorder un instrument de cette maniere, mais qu'il a rendu un son desagréable et qui bleissoit si fort les oreilles de tous ceux qui l'entendoient; qu'il en conclut qu'un tel accord s'éloigne de toute raison harmonique, soit qu'on considere les accords justes ou bien les temperez¹¹⁾.

Outre son experience il ajoute encore cette raison prise de la maniere dont pour cet archicymbalum on divisoit l'intervalle du ton en 5 parties egales, qui estoit de prendre sur cet intervalle depuis ses 2 extremités deux demitons majeurs, et puis d'où ceux cy finissent en arriere deux demitons mineurs. Il dit que par ce moien le ton n'est pas divisé en 5 parties egales. Mais de quel ton pretend il parler puis qu'il s'agissoit de leur ton de $\frac{5}{31}$ de l'octave, du quel il n'a point scéu la grandeur, ni peut estre ceux la même qui estoient inventeurs, car on a besoin pour cela des logarithmes inconnus alors¹²⁾.

⁷⁾ Voyez sur ce passage l'Avertissement qui précède.

⁸⁾ Cap. 27 du Lib. III de „de Musica”.

⁹⁾ Nous ignorons le constructeur de cet instrument que Salinas paraît avoir vu déjà vers 1537 („citra quadraginta annos”, écrit-il en 1577). Il est bien connu que plus tard dans le cours du seizième siècle il en a existé plusieurs. Vicentino en construisit un qu'il décrit dans „L'antica musica ridotta alla moderna prattica” de 1555 (comparez la note 9 de la p. 144).

Arnolt Schlick fait également mention d'instruments de ce genre: voyez N. Dupont „Geschichte der musikalischen Temperatur”, Inaug. Diss. Erlangen 1935. Nördlingen, 1935, p. 51.

¹⁰⁾ „... ab eius autore, quisquis ille fuit, Archicymbalum appellatum”.

¹¹⁾ L. c. p. 166.

¹²⁾ En marge: comment sçavoit il la valeur de leur ton. s'il eust su les logarithmes. du ton qui fait $\frac{5}{31}$ d'octave. voir Salinas l. 3. ch. 15 ou 27. — Le chap. 15 du livre 3 est intitulé „Quod tres sunt inventa temperamenti constitutiones in Musicis, quibus utimur. instrumentis: et de illarum prima”. Voyez sur le chap. 27 la note 6 de la p. 142 qui précède.

Sans cela il n'étoit pas possible presque de trouver 30 moienes entre 2 nombres donnez, de forte que ni Zarlin¹³⁾ a pu examiner cette division, ni les inventeurs de l'archicymbale connoître s'il estoit accordé suivant ce qu'ils pretendoient. Enfin ce nouveau temperament qu'il rebute si fort se peut dire le plus excellent de tous, ayant tous les avantages qu'il dit qu'on luy attribuoit, et encore d'autres dont je parleray en suite, et son harmonie ne pouvant estre distinguée avec celle que donne le Temperament ordinaire dont tous se servent.

§ 3. Pour le faire voir je dis premierement que les quintes de cette division ne surpasseront celles du Temperament que de $\frac{1}{110}$ de Comma¹⁴⁾, difference qui ne scauroit aucunement estre appercue par l'oreille, puisque celle de $\frac{1}{4}$ de Comma l'est si peu qu'elle ne l'offense pas. Et il faut noter que c'est de ce $\frac{1}{110}$ de Comma, que les quintes de la division approchent d'avantage des 5^{tes} parfaites que ne sont celles du Temperament. les quartes par consequent ne sont excédées que de $\frac{1}{110}$ de Comma de celles du Temperament, et elles tendent d'autant plus vers la perfection de cette Consonance.

Les tierces mineures sont excédées de celle du Temperament par $\frac{3}{110}$ ou environ

¹³⁾ Ceci doit probablement s'entendre de Salinas.

¹⁴⁾ Voyez la Table de l'Avertissement. La différence est de 0,20 Cents. Le comma contient 21,5 Cents. $\frac{1}{110}$ comma = 0,196 Cents.

A propos des endroits du „Cycle harmonique” ou „Novus Cyclus Harmonicus” (Pièce F), où se trouve la même affirmation, Riemann observe dans une note de la p. 359 de sa „Geschichte der Musiktheorie” (nous l'avons déjà dit dans la note 10 de la p. 7 qui précède): „Huyghens . . . wirft Salinas und Mersenne vor, dass sie aus Unkenntnis der Logarithmen, die Vorzüglichkeit der 31-stufigen Temperatur nicht hätten erkennen können; nicht um $\frac{1}{4}$ des syntonischen Kommas zu klein, sondern um $\frac{1}{110}$ desselben zu gross seien die Quinten dieser Temperatur. Nach meiner grossen Tabelle der Tonwerte in Logarithmen auf Basis 2 . . . sind aber doch die Quinten um $\frac{1}{4}$ Komma zu klein — ich überlasse die Nachprüfung Mathematikern von Fach!” Dupont dans sa „Geschichte der musikalischen Temperatur” (note 9 qui précède) aboutit à la même conclusion par un raisonnement analogue. Or, ces remarques sont le résultat d'un malentendu. Huygens dit clairement que ses quintes surpassent de $\frac{1}{110}$ de comma les quintes du tempérament usuel, *c. à. d. du système du ton moyen*. En effet, tout son discours tend à faire voir que son système ne diffère qu'imperceptiblement de celui du ton moyen. Mais les auteurs cités le font dire bien à tort que sa quinte ne diffère que de $\frac{1}{110}$ de comma de la quinte *naturelle* et combattent ensuite cette assertion prétendue.

Notons en passant que Huygens se rendait parfaitement compte du fait que Salinas, mort en 1590, ne pouvait pas connaître les logarithmes: voyez les dernières lignes de la p. 157.

$\frac{1}{37}$ de Comma ¹⁵⁾). Et les fixtes majeures excèdent d'autant les fixtes majeures du Temperament, toutes deux à la vérité en s'éloignant de la proportion parfaite. Mais on voit que cette différence ne sauroit encore être perceptible.

Les tierces majeures enfin excèdent celles du temperament, qui sont parfaites, de $\frac{4}{110}$ ou $\frac{1}{28}$ de Comma ¹⁶⁾, qui est une si petite différence qu'on ne les pourra prendre que pour parfaites puisque sur une corde de 5 pieds elle n'importe pas $\frac{1}{3}$ de ligne. Les demitons majeurs comme de E, F y approchent un peu plus de leur vraie proportion que dans le temperament, car cette vraie proportion étant de 16 à 15, sçavoir la différence d'entre la quarte et tierce majeure parfaite, le demiton du Temperament la surpasse de $\frac{1}{4}$ de comma, et le nôtre de $\frac{1}{4}$ moins $\frac{1}{22}$ de comma ¹⁷⁾ ce qui ne pourroit qu'adoucir tant soit peu ce demiton et seroit du bien dans les cadences ¹⁸⁾.

On peut dire au reste qu'il n'est qu'avantageux de gagner quelque perfection sur les 5^{tes} et sur les 4^{tes} en perdant un peu plus sur les tierces, parce que plus les consonances sont parfaites, c'est à dire plus leur tremblements s'unissent souvent, et moins l'oreille leur souffre d'alteration. ainsi à l'unisson et à l'octave on n'en peut souffrir la moindre. Et la quinte est plus sensible en cela que la quarte et celle cy que les tierces et les fixtes. Mais, comme j'ay déjà montré, toutes les différences de ces 2 Temperaments sont imperceptibles, et il l'en suit que lors qu'un jeu d'Orgue ou un clavecin sera accordé suivant le Temperament ordinaire, on peut dire qu'il le sera aussi suivant le nouveau, autant que l'oreille peut discerner. Mais si pourtant on veut se satisfaire entièrement la dessus, et avoir en même temps la division de l'octave en 31 parties égales on n'aura qu'à diviser un monochorde suivant les nombres que l'on verra dans le Table que je donne ¹⁹⁾, et en mettant sa corde en unisson avec le c du clavecin ou orgue, accorder de même les autres cordes ou tuyaux avec les sons de la corde successivement raccourcie du Monochorde.

Que si l'on demande, quel avantage on tire donc de cette Division puis qu'elle donne des tons si semblables à ceux du Temperament, je dis qu'il y en a plus d'un. car

¹⁵⁾ La différence est de 0,60 Cents. $\frac{1}{110}$ comma = 0,59 Cents.

¹⁶⁾ La différence est de 0,79 Cents. $\frac{4}{110}$ comma = 0,78 Cents.

¹⁷⁾ Dans le système harmonique naturel le demi-ton majeur est de 112 Cents, dans celui du ton moyen il est de 117,13 et chez Huygens de 116,13 Cents. La différence des écarts est donc de 1 Cent ou environ $\frac{1}{22}$ comma.

¹⁸⁾ Savoir dans toutes les cadences où le dessus monte d'un demi-ton.

¹⁹⁾ Voyez la Pièce F qui suit, c. à. d. le (Nouveau) Cycle Harmonique, T. X, p. 173.

premierement elle nous apprend que sans rien faire perdre du bon effect du Temperament, mais plustost en y adjoutant, nous avons un systéme dans lequel chaque chorde tant des tons que semitons et diésès se trouve avoir toutes les consonances et intervalles en dessus et en dessous, et cela partout de la mesme façon.

que dans ce systéme le demiton majeur contient trois cinquiemes parties du ton, et le demiton mineur les autres deux cinquiemes.

qu'enfin il constitue [comprend] un parfait Cycle Harmonique, en ce qu'en y montant ou descendant tout de suite par l'intervalle de quinte ou quelqu'autre que ce soit, on revient apres certaine revolution a la chorde d'ou l'on a commencé ²⁰⁾.

§ 4. Je dis de plus que sur ces fondemens on peut construire un jeu d'orgue ou un Clavecin, qui servira a transposer en haussant ou en baissant de tel intervalle qu'on voudra, comme de 4^{te}, tierce, ton, demiton, &c, jusqu'a une diésès ou cinquieme de ton. Ce qui sur les instrumens ordinaires de cette sorte est impossible; et se fait icy sans peine ni sans avoir l'habileté que la transposition demande. Et a fin que ceux qui voudront faire fabriquer un tel instrument scachent comment s'y prendre je veux icy donner l'instruction.

Il faut disposer les tuyaux ou les chordes en sorte qu'il y en ait 31 dans chaque octave sans comprendre la dernière chorde, ce qui est aisé aux orgues et encore aux Clavecins, puis qu'on y met desja d'ordinaire 24 chordes a ceux qui ont deux registres à l'unison et quelque fois encore 6 ou 8 autres pour 3 ou 4 feintes extraordinaires ²¹⁾. Les batons qui font partir ces tuyaux ou chordes se feront précisément d'egale largeur, qui soit d'une cinquieme partie de la largeur d'une touche et seront rangez pres les uns des autres et tous a mesme hauteur, sans aucune difference. La dessus on posera un clavier mobile ayant les touches à l'ordinaire qui seront attachees par un bout à une regle platte qui puisse couler dans une autre regle fixe et arrestée sans en pouvoir fortir ce qui est aisé. De la regle mobile vers chaque bout on coupera 3 ou 4 morceaux chacun de la largeur d'une touche, ce qui fera que les touches atta-

²⁰⁾ C'est à cette propriété que le petit traité de Huygens doit son titre (*Cycle Harmonique*). Elle résulte immédiatement du fait que chaque intervalle est un multiple entier du diésès. Lorsque l'intervalle considéré est de n diésès, une ascension par une série de 31 de ces intervalles-là conduit à la n^{ieme} octave du ton fondamental.

²¹⁾ Il en était ainsi p. e. pour le Gravicembalo construit en 1548 pour Zarlino par Domenico de Pasaro: entre b et c et de même entre e et f une touche blanche avait été intercalée; entre les autres touches blanches chaque fois deux touches supérieures colorées. Il est quelquefois fait mention d'une scission en deux de la touche noire entre d et e pour distinguer les notes dis et es , et même de celle entre g et a pour distinguer as et gis . Comparez Dupont l. c. p. 50 et suiv. Un „clavemusicum omnitonum” de 1606, possédant 31 touches pour chaque octave, a été conservé jusqu'aujourd'hui (Dupont, p. 53).

Le lecteur hollandais pourra consulter aussi l'ouvrage de M.^{me} Bertha van Beynum von Essen „Bouw en Geschiedenis van het Klavier” (Rotterdam, Brusse, 1932).

chées a ces morceaux se pourront transporter d'un bout de la regle immobile a l'autre a fin que la mobile puisse avancer ou reculer autant qu'il est besoin selon les marques qu'on escriera dessus. J'ay fait autrefois ajuster de tels claviers mobiles a des clavecins estant a Paris, et mesme a ceux qui avoient leur clavier ordinaire où il falloit que celui que je mettois par dessus egalast en mesme temps les hauteurs des touches et des feintes a fin que les touches pussent glisser sans empeschement. Et cette invention fut approuvée et imitée par des grands maitres qui y trouvoient de la commodité et du plaisir ²²⁾.

Il reste a dire pour celle dont je traite icy qu'il faut attacher par dessous à chaque touche et feinte du clavier mobile de petits bouts, disposez en sorte qu'ils se rencontrent placez pour presser directement sur les batons qui sont dessous et qui respondent aux tons de ces touches, à quoy il faut du soin et de l'exacritude. mais estant bien ajustez dans une situation ils seront bien dans toutes les autres a cause de l'egale largeur des battons.

Il y a aussi cette commodité que sans ajouter des chordes on peut avoir des feintes extraordinaires sur le clavier pour les tons enharmoniques qui servent principalement à suppleer des accords dont on a a faire en jouant dans certains tons. Car ces touches adjoutes trouveront aussi bien que les autres, leur vrayes chordes dans toutes les transpositions, comme il paroitra par le Table suivante ²³⁾ ou les plus necessaires de ces feintes à ajouter seront marquées.

§ 5. Je rapporteray encore icy une remarque a l'avantage de ce nouveau temperament qui est que l'intervalle du triton y est contenu par tout de la proportion de 7 à 5 ne manquant qu'un $\frac{1}{12}$ de comma et celui de la fausse quinte par consequent n'excedant que d'autant la proportion de 10 a 7. au lieu que ces differences dans le temperament ordinaire sont de $\frac{1}{7}$ de comma ²⁴⁾. Or je dis que ces intervalles de 7 a 5 et de 10 a 7 ont quelque chose de harmonieux estant examinez avec attention (du moins

²²⁾ En juillet et août 1669 (T. VI, p. 473 et 484) Huygens fait mention dans des lettres à son frère Lodewijk de son „invention du clavecin” ou „invention [du] clavier mobile”, dont il dit avoir envoyé une exacte et assez longue description à leur père. Nous ne la possédons pas, car les lettres échangées entre Huygens et son père pendant le séjour du premier en France nous sont défaut; comparez la note 3 de la p. 7 du T. XVIII.

²³⁾ Voyez la Table par laquelle se termine notre Avertissement (p. 146).

²⁴⁾ L'intervalle 7:5 vaut 582,52 Cents. Pour la vraie valeur 45:32 du triton on trouve 590,22 Cents. 15 dièses diffèrent en effet de 1,87 Cents ou $\frac{1}{12}$ comma du nombre de Cents mentionné 582,52.

je le trouve ainsi a mon oreille) et qu'on les pourroit compter parmy les consonances ²⁵⁾ quelque chose qu'en puissent dire les maitres compositeurs, qui les rangent autrement parmy les fausses relations ²⁶⁾. Il en peut estre de mesme que des Tierces majeures et mineures chez les anciens qui ne les voulurent jamais reconnoitre comme consonances, comme encore aujourd'huy on veut qu'elles ne soient qu'imparfaites et que les parfaites foyent l'octave, quinte et quarte qui est une distinction tres mal fondee ²⁷⁾. Mais pour prouver ce nouveau paradoxe que je viens de avancer touchant le triton et la fausse quinte, il faudra dire quelque chose touchant l'origine ²⁸⁾ des Consonances en general.

§ 6. On fait que ce qui fait bien sonner ensemble 2 chordes ²⁹⁾ ce sont les battements ou tremblements qu'elles causent dans l'air, qui viennent a s'unir souvent et reglement, et que d'autant plus frequentes que sont ces unions, d'autant plus la consonance estensee parfaite, ou du moins eminente en dignité. ainsi dans l'octave les battemens s'unissent a chaque fois que la chorde basse a fait 1 vibration et l'autre 2. dans la quinte a chaque 2 vibrations de l'une et 3 de l'autre, a la quarte de 3 et de 4, a la tierce majeure de 4 et de 5, a la tierce mineure de 5 et de 6. On veut que dans le nombre de 6 foyent bornees toutes les consonances ³⁰⁾, car bien que dans la fixte

²⁵⁾ Comparez le dernier alinéa de la p. 37 qui précède.

²⁶⁾ En marge: Mersenne trouue point de raison. 8 a 5 pourquoi plait a l'oreille. sert a accorder. orne le chant. intervalle fort frequenté et qui sert plus qu'on ne pense a faire des beaux chants. quelque place qu'on leur donne n'en feront pas moins beaux. La fixte majeure n'est elle pas sauvee presque toujours de l'octave. on l'entonne aisement. celui de 7 a 4 ne s'y trouve que 2 fois. cela le rend moins souffrable. 7 a 6 ni 7 a 3 ne se trouve point icy. — non audio qui allegant auctoritatem.

²⁷⁾ La remarque sur Mersenne se rapporte sans doute à ses considérations sur le nombre des consonances dans le Livre I „des Consonances”. Prop. 33 „Pourquoi il n'y a que sept ou huit simples consonances”.

Cette distinction est faitee. a. par Zarlino „Istitutioni Harmoniche” Parte III cap. 6 „Divisione delle Consonanze nelle Perfette e nelle Imperfette”. Elle repose sur le fait que les nombres indiquant les rapports de toutes les „consonances parfaites” sont compris dans la série 1, 2, 3, 4, tandis que pour exprimer toutes les consonances sans exception il faut la série 1, 2, 3, 4, 5, 6, le „senarius”: comparez la note 30 qui suit.

²⁸⁾ Leçon alternative: la nature.

²⁹⁾ En marge: et il en est de mesme des tuyaux d'orgue.

³⁰⁾ Huygens fait allusion ici à la théorie du „senarius” développée par Zarlino dans ses „Istitutioni Harmoniche”, Parte I, cap. 13—16, et par Salinas dans son „De Musica”, Lib. II, cap. 12, 24, 25. D'après cette théorie les rapports des intervalles consonants seraient tous compris dans la suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

mineure les battemens ne s'unissent qu'à chaque 5 vibrations de la corde basse et 8 de la haute; on voit que ces 8 font 4 vibrations doubles contre les 5 de l'autre corde ³¹⁾, et qu'ainsi cette consonance peut être censée en dedans du nombre de 6; et qu'elle ne doit guère céder en douceur à celle de la tierce majeure; et il en est de même de 3 contre 8, et de 3 contre 10, qui font l'Unzième et la Treizième.

Or puis que les 5 battemens contre 6 font consonance, pourquoy veut on que 6 contre 7 n'en fassent point, ni 5 ou 4 ou 3 ou 2 contre 7.

Le P. Mersenne après avoir longtemps cherché quelque raison à cela, avoue ³²⁾ qu'il n'en sauroit trouver qui soit bonne. Et je crois qu'en effet il n'y en a point, parce qu'on suppose une chose fautive, car puisque l'union fréquente des battemens fait la consonance, cette union revient assez souvent lors que contre 5 ou 4 ou 3 ou 2 battemens de la corde basse il se fait 7 battemens de la haute, mais ce qui rend quelques unes de ces consonances désagréables, c'est que quoique l'intervalle de chacune se trouve dans les tons de notre système, ces intervalles ne s'usent jamais ou fort rarement dans la suite de notre chant, ce qui fait en même temps qu'après avoir frappé cette consonance, on n'en trouve point où l'on puisse passer en suite. Ce qui sans doute doit rendre cette consonance fort méchante, puisque même la plus excellente de toutes, si on la frappe sur des cordes qui soient tout à fait éloignées du Ton ou Modes ou l'on joue, ne paraît pas consonance d'abord, et offense extrêmement l'oreille, comme si après avoir fait la cadence en D, l'on frappe la quinte C^2G^2 .

Mais les consonances de 5 battemens contre 7 se trouvant en plusieurs endroits sur nos claviers et de même celle de 10 ou 5 doubles battemens contre 7 (puisque ce sont comme j'ai dit les tritons et les quintes diminuées, dont il y en a 6 de chacun) et faisant de fort beaux intervalles dans le chant; ayant aussi des consonances voisines qui les suivent agréablement, il ne leur manque rien de ce qu'ont les autres consonances et elles doivent avoir leur rang après les autres, qui ont l'avantage de consister en des proportions plus simples.

Que si on veut argumenter ³³⁾ qu'elles sont fautes de ce qu'on les sauve l'un par les sixièmes, l'autre par les tierces, l'on peut répondre que la 4 le plus souvent a aussi besoin d'être sauvée, que la sixième majeure se sauve de même presque toujours par l'octave. il est vrai que ces sixièmes et tierces sont les meilleurs accords pour succéder à ces tritons et quintes diminuées, mais de cela on ne peut pas conclure que ce soient des intervalles faux.

³¹⁾ En marge: Et que cette corde de 8 vibrations n'est que la réplique à l'octave de celle qui faisoit la tierce majeure avec la corde de 5 vibrations.

³²⁾ Voyez la proposition de Mersenne (p. 88 de l'„Harmonie Universelle“) citée dans la note 26.

³³⁾ Leçons alternatives: prouver, inférer.

J'ay dit que les intervalles de 6, 4, 3, 2, contre 7, se trouvent aussi dans les tons de nostre système. car en effet les cordes qui font les secondes superflues de F et G[♯], de B et C[♯] et de M[♯] et F[♯] unissent leur battemens a chaque 6 vibrations de l'une contre 7 vibrations de l'autre, si pres qu'il n'y a que $\frac{1}{5}$ de comma a dire a cette proportion.

Par consequent les septiemes diminuees de C[♯]B, de G[♯]F et de F[♯]M[♯] excèdent seulement de ce $\frac{1}{5}$ de comma la proportion de 7 a 12.

Outre cela l'intervalle de 3 a 7 doit sonner aussi bien que . . .

F. LETTRE À BASNAGE DE BEAUVAL TOUCHANT LE CYCLE HARMONIQUE (CONNUE SOUS LE NOM DE NOVUS CYCLUS HARMONICUS)

1691

C'est la Pièce publiée en octobre 1691 dans l'„Histoire des ouvrages des sçavans”, mieux connue sous le titre „Novus Cyclus Harmonicus” qui est celui de la traduction figurant dans l'édition de s Gravesande, les „Opera varia” de 1724. Voyez les p. 169—174 du T. X.

Dans la figure [Fig. 4] de la p. 164r du portef. „Musica” Huygens indique la dispositio palmularum mobilium divisa octavâ in 31 intervalla æqualia.

[Fig. 4]



G. QUELQUES NOTES SE RAPPORTANT À LA DIVISION DE L'OCTAVE EN 31 INTERVALLES ÉGAUX ¹⁾

§ 1. le semiton mineur je l'appelleray dièse.

la tierce mineure et majeure; la sixte mineure et majeure, la 7^e mineure et majeure, diffèrent d'une dièse.

Item tous les intervalles diminuez ou superflus diffèrent des parfaits d'une dièse.

le triton sonne un peu plus haut que la quarte re sol.

la fausse quinte un peu plus bas que la quinte re la.

la quinte superflue sonne un peu plus bas que la sixte mineure r ♮.

la 7^e mineure diffère d'un ton de l'octave.

la 7^e majeure diffère d'un semiton ²⁾ de l'octave.

la 7^e diminuée sonne un peu plus fort que la 6 majeure re ci.

la 6 diminuée est plus petite que la quinte superflue. Elle sonne entre re la et r ♮ ³⁾.

la quinte superflue sonne presque comme la 6 mineure c'est à dire r ♮.

la 4^e diminuée un peu plus fort que la tierce majeure ut mi.

il n'y a qu'une tierce superflue de m⁷ s². Elle sonne entre ut mi et ut fa. Elle

¹⁾ Portef. „Musica“, f. 44 r — 45 v. Dans les présentes notes Huygens ne désigne plus, comme précédemment, par le mot dièse chacun des 31 intervalles égaux. Ce qu'il appelle ici dièse c'est le demiton mineur, c. à. d. l'intervalle correspondant au rapport $\frac{25}{16} f$ dans le système du ton moyen: voyez la p. 72. La gamme diatonique présente maintenant les intervalles suivants exprimés en $d = \frac{1}{31}$ d'octave:

C	Cis	D	Es	E	F	Fis	G	Gis	A	Bes	B	c
2d	3d	3d	2d	3d	2d	3d	2d	3d	3d	3d	2d	3d

Voici une table des différents intervalles:

Prime superflue = semiton majeur	2d	Quarte superflue = Triton	15d
Semiton majeur	3d	Fausse quinte = Quarte diminuée	16d
Ton	5d	Quinte	18d
Tierce diminuée	6d	Sixte diminuée	19d
Seconde superflue	7d	Quinte superflue	20d
Tierce mineure	8d	Sixte mineure	21d
Tierce majeure	10d	Sixte majeure	22d
Quarte diminuée	11d	Septime mineure	26d
Tierce superflue	12d	Septime majeure	28d
Quarte	13d	Octave	31d

²⁾ C. à. d. d'un semiton majeur = 3d.

³⁾ Il ne faut pas perdre de vue que ♮ désigne notre ton bes.

fait connoître l'unique fixte diminuée. Il n'y a que 2 tierces diminuées qui font les intervalles des tons faux $u^{\sharp} m^{\flat}$ et $s^{\sharp} b$. Elles font connoître les 2 sixtes superflues qui font leur complements $m^{\flat} u^{\sharp}$ et $b s^{\sharp}$.

- § 2. Il faut observer que tout intervalle juste ou faux, avec son complement a l'octave, doit faire 9. ainsi la 4^e est le complement de la 5^e. la fixte majeure de la tierce mineure, la tierce majeure de la 6^e mineure. la septieme majeure de la seconde mineure. la septieme mineure de la seconde majeure. Et cette regle sert principalement a connoître les intervalles faux, parce que sachant l'une moitié l'on connoitra aussi l'autre qui consiste en complements.

5 unissons superflus intervalle du semiton mineur ou diefe	$\left\{ \begin{array}{l} u \ u^{\times} \\ m^{\flat} \ m \\ f \ f^{\times} \\ s \ s^{\times} \\ c^{\flat} \ c \end{array} \right\}$	leur complements octaves diminuees	$\left\{ \begin{array}{l} u^{\times} \ u \\ m \ m^{\flat} \\ f^{\times} \ f \\ s^{\times} \ s \\ c \ b \end{array} \right\}$
3 secondes superflues ton et diefe	$\left\{ \begin{array}{l} m^{\flat} \ f^{\times} \\ f \ s^{\times} \\ c^{\flat} \ u^{\times} \end{array} \right\}$	leur complements septiemes diminuees	$\left\{ \begin{array}{l} f^{\times} \ m^{\flat} \\ s^{\times} \ f \\ u^{\times} \ b \end{array} \right\}$

il faut noter que les secondes superflues ont l'intervalle plus grand que les tierces diminuées, celles la ayant $\frac{7}{5}$ d'un ton, et les tierces diminuées $\frac{6}{5}$.

2 tierces dimin. inter- valle du faux ton. deux semitons maj.	$\left\{ \begin{array}{l} u^{\sharp} \ m^{\flat} \\ s^{\times} \ c^{\flat} \end{array} \right\}$	leur complements fixtes superflues	$\left\{ \begin{array}{l} m^{\flat} \ u^{\sharp} \\ b \ s^{\times} \end{array} \right\}$
1 tierce superflue	$\left\{ \begin{array}{l} m^{\flat} \ s^{\times} \end{array} \right\}$	son complement fixte diminuée	$\left\{ \begin{array}{l} s^{\times} \ m^{\flat} \end{array} \right\}$

de mesme la tierce superflue est plus grande que la 4^e diminuée, l'une ayant $\frac{12}{5}$ de ton et l'autre $\frac{11}{5}$ de ton.

4 quartes diminuees	$\left\{ \begin{array}{l} u^{\times} \ f \\ f^{\times} \ c^{\flat} \\ s^{\times} \ u \\ c \ m^{\flat} \end{array} \right\}$	leur complements quintes superflues	$\left\{ \begin{array}{l} f \ u^{\times} \\ b \ f^{\times} \\ u \ s^{\times} \\ m^{\flat} \ c \end{array} \right\}$
---------------------	---	--	---

6 quartses superflues ou tritons	u f ^x	leur complements quintes diminuees ou fausses quintes	f ^x u
	r s ^x		s ^x r
	m ^b l		l m ²
	f c		c f
	s u ^x		u ^x s
	e ^b m		m 2

Mais la quarte superflue ou triton est moindre que la quinte diminuée, celle la étant de 3 tons et l'autre de $3\frac{1}{2}$ de ton.

Pour connoître le triton d'avec la fausse quinte, il faut prendre garde que quand c'est le triton, le dessus est une touche de celles qui peuvent faire avec leur touche suivante le semiton de mi fa ⁴⁾, lesquelles sont u^x, m, f^x, s^x, l, c.

Mais que le dessus tombe sur une des autres touches, qui sont u, r, m², f, s, b, lorsque c'est la fausse quinte. On les connoît encore par la distance des notes extremes, comptant les seintes de mesme que les tons diatoniques et ma comme mi, ça comme ci. Ainsi VF² est une 4 superflue ou triton parce que VF est une quarte et S² R est une fausse 5 ou diminuée, parce que SR est la 5.

le triton demande avec luy la 2^e et la 6^e majeure.

la fausse quinte demande la 3^e mineure et la 6^e mineure.

§ 3. Il est bon de donner un nom particulier a chacun des 12 tons de l'octave ainsi
Ut it re ma mi fa fe sol sel la ça ci ut.

Cela sert non seulement pour nommer facilement toutes les intervalles tant justes que fausses, mais aussi pour les distinguer les unes d'avec les autres. Car rapportant chaque seinte au ton prochain dont elle a la mesme lettre consone comme ma à mi, ça à ci, fe à fa, it à ut &c. l'on scaura par exemple que ut, fe est une espece de 4^e, scavoir la superflue ou triton, parce que ut, fa est une quarte; et que f, it ⁵⁾, est une quinte diminuée parce que fa, ut, est la quinte. que sel, ma, est une espece de sixte, scavoir la sixte diminuée, parce que sol, mi, est une fixte. que sel, ut est une 4^e diminuée parce que sol, ut est une 4^e. que fe, ma est une espece de 7^e, scavoir la 7^e diminuée parce que fa, mi, est une 7^e. Et ainsi du reste. Mais pour dire quel intervalle c'est de son genre, il faut la connoître sur le clavier en regardant l'intervalle prochain d'un costé ou d'autre dont celui qu'on propose ne differe que d'une diète. Ou bien par d'autres remarques, comme est celle que j'ay mise cy dessus pour distinguer le triton d'avec la fausse quinte.

⁴⁾ Donc le semiton majeur = 3^a.

⁵⁾ Pour f, it lisez: fe, ut.

APPENDICE I

AUX PIÈCES SUR LE CYCLE HARMONIQUE :
L'IDÉE DE LA περιούλωσις, ETC. (PROGRAMME DE LA PIÈCE E) ¹⁾.

Que les anciens n'ont point connu le temperament.

Comparez notre note 16 de la p. 113 sur Aristoxène.

En marge: Après cete invention toutes les divisions du monochorde cessent, et les différences de ton majeur et mineur.

Il s'agit évidemment de l'invention du tempérament par excellence, celui que Huygens désigne par le nom de „temperament veritable” (l. 1 de la p. 116) et qu'on a appelé plus tard celui du ton moyen (p. 45).

Zarlin et Salinas l'en disputent l'invention.

Trouvè par experience, puis la raison ²⁾.

Zarlin premierement celui qui diminue la 5^{te} de $\frac{2}{7}$ de comma. C. à. d. Zarlino trouva d'abord (voyez les p. 46 et 55 qui précèdent) un autre tempérament que le „veritable”, savoir le „tempérament de Zarlino”. dit que c'a esté une importante invention de musique. une des plus belles inventions en musique p. 241 ragionamento ³⁾. En cet endroit il s'agit du „temperament veritable”.

Les nombres du monochorde temperè. Voyez les Pièces „Divisio Monochordi”, p. 49 et suiv.

Nombres du nouveau temperament. l'octave en 31 parties egales.

Mersenne et Salinas le condamnent. ce qu'ils en racontent ⁴⁾.

Revient quand a l'effèt au temperament du $\frac{1}{4}$ de comma ⁵⁾.

En marge: que la voix chante selon le Temperament ou a peu pres. point par des intervalles parfaits ⁶⁾.

Mais cette connaissance de la περιούλωσις donne moyen de faire un clavecin ou orgue avec le clavier mobile sur les batons d'egale largeur et 31 dans l'octave, lequel

¹⁾ Portef. „Musica”, f. 16 v. Voyez sur cet Appendice l'Avertissement qui précède.

²⁾ Nous avons cité ces deux lignes dans la note 6 de la p. 18.

³⁾ Voyez la note 35 de la p. 116.

⁴⁾ Voyez l'Avertissement qui précède.

⁵⁾ Voyez le deuxième alinéa de la Pièce E qui précède.

⁶⁾ Voyez la Pièce III C à la p. 76 qui précède.

clavier sert à transporter avec facilité par cinquièmes de ton, et en forte que toutes les feintes ou dieses adjointes, trouvent leur cordes également justes.

Qu'il ne faut au plus que 3 ou 4 feintes entre les ordinaires, parce qu'il y auroit trop de difficulté [remarque ajoutée après coup].

Qu'il n'importe pas qu'on fasse les tons égaux, parce que l'intervalle d'un ton majeur ou mineur aussi bien n'étoient pas consonants. vide diatonicum diatonon Ptolemei ⁷⁾).

En marge: accord $\begin{matrix} b & m & s^{\sharp} \\ 7 & 5 & 4 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \sharp & 1 \\ b & 1 \end{matrix}$ bonne suite.

$b s^{\sharp}$ et $M^b V^{\sharp}$ sont des consonances de 7 à 4. VF^{\sharp} consonance de 7 à 5 ⁸⁾).

La 5^{te} devient tant soit peu meilleure [dans le „nouveau temperament"] que dans l'autre temperament [le „temperament veritable", autrement dit celui „du ton moyen"]. Cela semble être bien. parce que tant que les consonances sont plus parfaites, tant moins elles peuvent souffrir d'alteration. Ainsi l'octave ne souffre rien. la 5^{te} moins que la tierce majeure.

Commodité des logarithmes et nécessité ⁹⁾).

Cyclus Harmonicus. περιχουχλωσις.

Que sans doute les divisions de 3 à 2, 4 à 3, 5 à 4, 6 à 5 donnent les consonances les meilleures qu'elles puissent être. contre Stevin.

L'octave en 31 parties que donne Mersenne prop. 10 des Genres de musique n'est pas la nostre. et ne sont ses parties aucunement égales ¹⁰⁾).

⁷⁾ Voyez la note 22 de la p. 92 qui précède.

⁸⁾ Les f. 24 et 25 du portef. „Musica" que nous ne reproduisons pas sont remplies de calculs et contiennent en outre plusieurs conclusions qu'on en peut tirer. On y lit e. a.: Ratio VF^{\sharp} à ratione ad 5 deficit $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$ commatis circiter . . . Ratio tritoni VF^{\sharp} vulgaris temperamenti deficit à ratione 7 ad 5, $\frac{1}{7}$ commatis. Ergo VF^{\sharp} nostri temperamenti multo melior, et potest pro consonantia haberi. Comparez le § 5 de la Pièce E qui précède.

⁹⁾ Voyez e. a. la Partie „Musique et mathématique" par laquelle le présent Tome débute.

¹⁰⁾ Nous avons cité ces deux alinéas aux p. 141—142 qui précèdent. Voyez sur les „parties aucunement égales" de Mersenne l'Appendice II qui suit.

La quinte peu agreable parce qu'elle n'a pas de tierce entredeux. ni ne permet pas de suppleer la 3e contre la basse.

Choses a rechercher. pourquoy 2 quintes de suite sont desagregables. et si elles le sont toujours ¹¹⁾).

Methode pour faire des beaux chants ¹²⁾.

Qu'il n'y a que 2 tons a les considerer seuls, mais plusieurs par raport de l'un a l'autre. les 2 sont celuy ou la 5^{te} d'en bas a la tierce majeure en bas, et l'autre qui dans cette quinte a la tierce mineure en bas. U, M, S, U, R. F. L. R. mais les tons qui sont differents par raport sont comme U, M, S, U, R, F[#], L, R. qui confiderez a part sont tout a fait les mesmes ¹³⁾.

De la cause des tons [ajouté dans l'interligne: chords] des tuyaux d'orgue ¹⁴⁾, flutes, trompettes &c.

Voyez sur les tons de la flute la p. 104 qui précède. Il est vrai qu'il n'y est encore question que de l'enregistrement de données expérimentales, non pas d'un effort pour „feire per causas”. Comparez sur la valeur attribuée par Chr. Huygens à l'empirie les premières lignes de la p. 18 qui précède; et voyez sur le désir de la famille Huygens de „feire per causas” le dernier alinéa de la p. 565 du T. II (lettre de Constantyn Huygens père à Merfenne).

¹¹⁾ Voyez les p. 110 et 129 (note 119) qui précèdent.

¹²⁾ Voyez sur cet alinéa les p. 66—67 qui précèdent.

¹³⁾ Nous avons déjà cité cet alinéa dans la note 4 de la p. 70 qui précède.

¹⁴⁾ Voyez sur les tuyaux d'orgue la p. 374 du T. XIX.

APPENDICE II

AUX PIÈCES SUR LE CYCLE HARMONIQUE: TABLEAU COMPARATIF DE 11¹⁾ OU 30 MOYENNES PROPORTIONNELLES D'APRÈS DIFFÉRENTS CALCULATEURS.

A. 11 moyennes proportionnelles (division de l'octave en 12 intervalles égaux).

	Nombres véritables	D'après Stevin ²⁾	D'après Merfenne ³⁾	D'après Beaugrand ⁴⁾	D'après Boulliau ⁵⁾	D'après Gallé ⁶⁾	Nombres véritables
1	10000	10000	1000	10000	10000	10000	10000
2	9439	9440	941	9438,55	9431	9438,7431198	9438,74
3	8909	8911	891	8908,6	8905	8909,1418365	8908,99
4	8409	8408	842	8408,95	8410	8408,9641454	8408,96
5	7937	7937	794	7937,05	7922	7937,0052622	7937,01
6	7492	7493	750	7491,5	7481	7491,5353818	7491,54
7	7071	7071	708	7071,1	7069	7071,0678109	7071,07
8	6674	6675	668	6674,05	6670	6674,1992715	6674,20
9	6300	6301	630	6299,65	6300	6299,6052457	6299,61
10	5946	5945	599	5946,05	5940	5946,0355690	5946,04
11	5612	5612	562	5612,3	5620	5612,3102370	5612,31
12	5297	5298	532	5297,3	5300	5297,3154575	5297,32
13	5000	5000	500	5000	5000	5000	5000

¹⁾ Zarlino, dans le Cap. XXX du Livre IV de ses „Sopplimenti Musicali” de 1588 („Come si possa dirittamente diuidere la Diapason in Dodici parti ò Semituoni equali & proportionali”) parle de la construction de „Dodici parti proportionali, assegnando ò ritrouando Vndeci linee mezane proportionali”; il renvoie aussi à ses „Istituzioni” II, Cap. 25 et à ses „Dimostrazioni” III, Prop. II; mais il ne donne pas de table numérique.

²⁾ „Vande Spiegeling der Singconst”, éd. D. Bierens de Haan, 1884, p. 29.

³⁾ „Harmonie Universelle”, Première Préface générale au lecteur.

⁴⁾ Cité par Mersenne; voyez la p. 34 qui précède (note). Nous avons divisé les nombres de Beaugrand par 20. On voit que ces nombres, encore meilleurs que ceux de Stevin, présentent cependant (voyez le 2^{ème}, le 3^{ème} et le 8^{ème}) de petits écarts, qui font penser qu'ils n'ont pas été calculés à l'aide de logarithmes.

Voyez encore sur Mersenne et les logarithmes les p. 199 etc. qui suivent.

⁵⁾ Cité par Mersenne; voyez la p. 34 qui précède (note). Nous avons réduit au système décimal

B. 30 moyennes proportionnelles (division de l'octave en 31 intervalles égaux) d'après Huygens; et 30 moyennes non proportionnelles (division de l'espace 14000—7200 en 31 intervalles) d'après Mersenne.

Nombres corrects de Huygens		Division de l'espace 14000—7200 en 31 intervalles égaux	Division de l'espace 14000—7200 en 31 intervalles d'après Mersenne 7)
1	100000	14000	14000
2	97789	13703	13824
3	Etc.	13412	13500
4		13127	12960
5		12849	12300 ⁸⁾
6		12576	12288 ⁹⁾
7		12309	12150
8		12048	12000
9		11792	11664
10		11542	11520
11		11297	11059,2
12		11057	10930
13		10823	10800
14		10593	10368
15		10368	10240
16		10148	10125
17		9933	10000
18		9722	9710
19		9516	9600
20		9314	9216
21		9116	9110,5
22		8932	9000
23		8733	8793
24		8548	8640
25		8367	8294,4
26		8189	8192
27		8015	8100
28		7845	8000
29		7679	7776
30		7516	7680
31		7356	7372,2
32	50000	7200	7200

les nombres du système sexagésimal de Boulliau; ils se sont montrés moins exacts que Mersenne ne les croyait. Boulliau ne s'est certainement pas servi de logarithmes.

⁷⁾ Cité par Mersenne (même endroit). D'après C. Lemaire „Notes pour servir à l'histoire des

mathématiques dans l'ancien pays de Liège" (Bulletin de l'Institut archéologique liégeois, T. XXI, 1889), p. 502 et suiv. Jean Gallé publia en 1616 à Liège son „Nouveau Epitome d'arithmétique", où, sans décrire sa méthode, il se vante de „revoquer l'Arithmétique en sa première simplicité . . . par dix petits bastons etc." Ce sont, peut-on dire, les baguettes de Neper. „D'autres", dit l'auteur (sans nommer Neper) „en ont voulu faire le coup d'essai . . . Je l'ay seul mis en sa dernière perfection". Un deuxième livre, intitulé „Nouvelle invention d'apprendre l'arithmétique par le moyen de dix petits batons, avec l'unzième servant à l'extraction des racines quarrées et cubes, par le seigneur J. Gallé, mathématicien Liégeois" parut à Paris en 1635. Il paraît donc que Gallé (architecte ou ingénieur, que Mersenne cite sous le nom de Galeus dans sa „Ballistica" de 1644) ne s'est pas servi de logarithmes, mais a trouvé la douzième racine de 2 par l'extraction de racines carrées et cubiques. Il a certainement pris trop de décimales: tandis que le quotient de ses deux premiers nombres est 0,94387431198, celui des deux derniers est 0,94387431523. Dans le troisième nombre il a apparemment fait une faute de calcul.

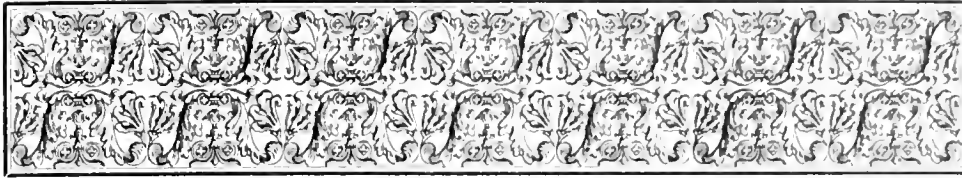
⁷⁾ Voyez la p. 142 qui précède.

⁸⁾ Nous avons corrigé le nombre 11300 en 12300.

⁹⁾ Nous avons corrigé le nombre 10288 en 12288. Il s'agit évidemment ici de fautes d'impression. Il peut y en avoir d'autres moins apparentes; mais il nous semble néanmoins abondamment prouvé que Mersenne — nous l'avons déjà dit à la p. 142 — n'a pas voulu donner une table de 30 moyennes correspondant à des intervalles égaux. Il mérite aussi d'être remarqué qu'il ne divise pas l'„octave" 14000—7000, mais l'intervalle 14000—7200.



HUYGENS ET EUCLIDE.



Avertissement.

Les vers de Théocrite par lesquels débute ce Tome montrent l'intérêt de Huygens non seulement pour les règles de l'art musical — lesquelles formèrent, de même que celles de l'optique ¹⁾, un sujet d'études pour Euclide ²⁾ — mais plus généralement pour la considération objective, tant artistique que scientifique, de la nature. Nous ne croyons pas méfaire en reproduisant ici à ce propos un de ses dessins représentant une ferme, non pas sicilienne sans doute, mais néerlandaise ³⁾.

Ce qui domine chez Théocrite, tel que le font connaître les endroits cités, c'est assurément la *ἰδέα τῆς ἀρμονίας* laquelle distingue les grecs des barbares ⁴⁾.

¹⁾ Voyez la l. 9 de la p. 791 du T. XIII.

²⁾ Voyez cependant la note 1 de la p. 12 qui précède. L'observation de Tannery se rapporte tant à la *Εἰσαγωγή ἀρμονική* qu'à la *Καταγωγή κινήσεως* (cette dernière étant jugée authentique par J. L. Heiberg, p. 53 de ses „Litterargeschichtliche Studien über Euklid“, Leipzig, Teubner, 1882; et aussi par R. C. Archibald, article cité à la p. 7 qui précède). C'est depuis longtemps qu'on a douté de l'authenticité des deux traités: voyez la „Praefatio“ des „Euclidis quae supersunt omnia“, ex recensione Davidis Gregorii, Oxoniae, E Theatro Sheldoniano, 1703. Le début de notre Avertissement de la p. 5 met du moins hors de doute qu'Euclide s'intéressait aux écrits des musicologues. En somme ce problème historique — on a également émis des doutes sur l'authenticité des écrits optiques — nous importe fort peu pour le moment, puisque Huygens ne paraît pas s'y intéresser.

³⁾ Le dessin est emprunté au Manuscrit 14 comme celui de Schéveningue (datant de la même année 1658) publié dans le T. XVII. Il doit s'agir d'une ferme située près de la Haye. Les mots *buyten 't bosch* peuvent signifier „hors du bois“ (sens probable) ou „hors de la ville; le bois“.

⁴⁾ Théon de Smyrne s'exprime comme suit (p. 73 de l'ouvrage cité dans la note 19 qui suit):
ἐν λέξει μὲν ἀλήθεια, ἐν βίῃ δὲ εὐδαιμονία, ἐν δὲ τῇ φύσει ἁρμονία.

L'hellénisme qui a eu sur Huygens l'influence la plus directe est, nous semble-t-il, celui de l'époque classique à laquelle appartiennent Euclide, Théocrite et son compatriote et contemporain cadet Archimède. Nous n'entendons évidemment nullement affirmer que la conception du monde — s'il est permis d'employer le singulier — des grands hommes de cette époque classique soit absolument conforme à celle de Huygens. N'oublions pas qu'ils étaient partisans du système géocentrique et que (malgré Aristote qui nie expressément la musique des sphères ⁵) le poète, géographe, astronome et mathématicien Ératosthène, à qui Archimède dédia sa *Méthode*, „motu stellarum sonos musicos edi consentit” ⁶). Le sentiment d'Euclide sur ce sujet nous est inconnu. Nous ne croyons cependant pas nous tromper ⁷) en disant que c'est surtout à une époque postérieure que les savants — Ptolémée était du nombre — s'inspirant d'idées anciennes, en sont venus à préciser d'une manière fantaisiste les rapports entre la musique, le monde des astres, et la vie humaine. Huygens, cherchant en géomètre, astronome et physicien les lois générales qui régissent les phénomènes — en laissant de côté un phénomène périodique étrange: il n'a jamais parlé de l'influence prépondérante, anciennement découverte ⁸), de la lune sur les marées ⁹) — n'a nullement subi comme

On peut en outre consulter p.e. le Chap. XI du T. I — „La musique et les philosophes antiques [chinois et grecs]” — de l'ouvrage de J. Combarieu „Histoire de la Musique des origines au début du XX^e siècle” (Paris, A. Colin, 1920). Voyez aussi la note 3 de la p. 86 qui précède.

⁵) De coelo (περί οὐρανοῦ), lib. II.

⁶) D'après Chalcidius et d'autres. Voyez la p. 39 de „Eratosthenis carminum reliquiae”, disposuit et explicavit Ed. Hiller, Lipsiae, Teubner, 1872.

⁷) Chez Archimède, comme chez Euclide et Apollonios, on ne trouve aucune trace d'astrologie. Aucun des trois mathématiciens nommés ne se prononce sur la question de la relation entre la musique et le cours des astres.

⁸) On peut consulter le Chap. XXXV („le problème et la théorie des marées dans l'antiquité”) de l'„Histoire des Sciences. Antiquité” de 1935 de P. Brunet et A. Mieli. Dans la Méditerranée le niveau de l'eau varie fort peu, il est donc possible que certains peuples antiques, tels que les Phéniciens, n'aient pas remarqué l'influence de la lune (ni à plus forte raison celle du soleil); d'autre part il paraît presque impossible d'admettre que cette influence n'aurait pas été constatée ailleurs depuis les temps les plus reculés.

⁹) Dans un de ses programmes pour l'Académie (T. XIX, p. 271) Huygens mentionne les „aestus maris” sans avoir, paraît-il, l'intention de s'occuper lui-même de ce problème. Voyez les p. 190 du T. IX et 58 du T. X; en ce dernier endroit il est question de l'explication donnée par Descartes. A la p. 538 du T. IX (en 1690) Huygens désapprouve l'explication par attraction. Mais on ne trouve rien sur les marées dans le „Discours de la Pesanteur” ni dans le „Cosmotheoros”. Voyez encore sur ce sujet la note 4 de la p. 55 du T. XVII où il est question (en 1655) d'un manuscrit de Galilée. Suivant Galilée les marées proviennent de la rotation de

Plutarque ¹⁰⁾, Kepler ¹¹⁾ et plusieurs de ses propres contemporains ¹²⁾ le charme de ces vues semi-orientales.

Sur l'influence directe ou indirecte ¹³⁾ de Démocrite — pour qui, soit dit en passant, la terre était plate — et d'Epicure on peut consulter le T. XIX ¹⁴⁾. Nous rappelons que Démocrite (comme Aristote) est antérieur à Euclide, tandis qu'Epicure est son contemporain.

Pour Huygens ce qui constitue l'univers matériel ce sont en premier lieu les corps, entités bien définies ¹⁵⁾. La géométrie est la science qui traite des „corps, surfaces et lignes” ¹⁶⁾ de formes déterminées, ainsi que des rayons de lumière ¹⁷⁾, possédant tous

la terre dont leur existence fournirait une preuve remarquable („Dialogo intorno ai due massimi sistemi del mondo”, quatrième journée). Il est certain que Huygens n'a pas été de cet avis puisqu'il considère la diminution de la longueur du pendule à secondes lorsqu'on se rapproche de l'équateur comme le seul effet observable de la rotation du globe terrestre. En effet, il écrit à la p. 316 du Manuscrit F, à propos de l'expédition de 1686--1687 — voyez le troisième alinéa de la p. 514 du T. XVIII —: *Te gelyck de Lengden gevonden en een bewijs van 't draeyen der aerde. 'T eenigh waernemelijk effect van dit draeyen.* En somme, Huygens ne se prononce en aucune façon sur les marées, si ce n'est pour désapprouver les explications d'autres savants. Il y voit une „summa difficultas” (T. IX, p. 124).

¹⁰⁾ Voyez le dernier chapitre de la „Musica” (περὶ μουσικῆς) de Plutarque.

¹¹⁾ Voyez la p. 356 du T. XIX.

¹²⁾ Boulliau, auteur de l'ouvrage astronomique comprenant e.a. les Tables Philolaiques (1645; T. XIX, p. 261), était astrologue tout en admettant (de même que Kepler) le système copernicain. Voyez sur Boulliau et les horoscopes les p. 524 (lettre de Huygens de 1659) et 530 du T. II. Cassini abandonna l'astrologie déjà dans sa jeunesse.

Mersenne, dans ses „Questions harmoniques etc.” de 1633, écrivait (p. 46): „Pour la proportion des Cieux, il suffit qu'il s'y rencontre quelque raison harmonique, soit dans leurs grandeurs, & distances, ou dans leurs mouemens, afin d'establiſſer une espece d'harmonie raisonnable... Et si [les Pythagoriciens et les Platoniciens] n'ont pas eu un fondement assez ferme pour establiſſer leurs pensées, nous pouons l'asseurer, & l'affermir dauantage, car il est aysé d'ajouter à leurs inuentions”. Notons aussi, pour compléter la note 9 qui précède, que dans ses „Questions inouyes ou recreation des scauans” de la même année Mersenne parle (p. 36) de la difficulté „de trouuer la vraye cause des mouemens de la mer”, disant qu'on doit peut-être attribuer une „vertu de l'aymant” à la lune; mais conformément à son habitude de ne rejeter aucune explication avec légèreté, il admet aussi [avec Galilée] qu'on „establisſe le mouement de la terre pour donner le bransle à la mer”.

¹³⁾ S'exerçant à travers les oeuvres de Lucrèce, de Gassendi, de Descartes etc.

¹⁴⁾ Dans les l. 9—12 de la p. 791 du T. XIII, et ailleurs, Huygens contredit Démocrite et Epicure.

¹⁵⁾ Voyez p. e. la p. 325 du T. XIX et la l. 15 de la p. 230 du T. XVI.

¹⁶⁾ Voyez la première ligne de la Pièce I qui suit.

¹⁷⁾ T. XIII.

une existence objective ¹⁸). Pas plus qu'Euclide ou Archimède il n'a cru devoir, ou pouvoir, formuler une théorie de la connaissance. Nous ne voyons pas qu'il se soit intéressé à la publication par Boulliau en 1663 ¹⁹) du „Tractatus de judicandi facultate et animi principatu” de Ptolémée ²⁰), auquel Boulliau avait ajouté un long commentaire et une „nota brevis ad subtilissimi philosophi Renati Cartesii de animæ speciei intellectui impressa opinionem”. Nous ne voulons pas dire que pour Huygens le degré d'objectivité de toutes les entités qui se présentent à notre esprit soit le même. Les forces, ainsi que les rayons de lumière, ne sont pas existantes pour lui au même titre que les figures et les mouvements ²¹). La nature des mouvements eux-mêmes dépend du point de vue des spectateurs: il n'y a pas d'espace absolu ²²). Mais il ne faut pas chercher chez lui de discussion générale sur la nature réelle ou idéale des entités qu'il considère. Il croit avoir une certitude entière de l'infinité de l'espace ²³); c'est aussi intuitivement (comparez la note 9 qui précède) qu'il exclut de la nature les „qualitez attractives et expulives” ²⁴). Ce sont bien *les corps* ²⁵), particules ou assemblages ²⁶) de particules indéformables, séparées les unes des autres par le vide (à moins qu'elles ne se touchent), qui suivant lui méritent en premier lieu notre attention: ils constituent la base ferme et inébranlable de toute théorie physique et géométrique. La géométrie euclidienne a une valeur absolue. Notons encore qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans

¹⁸) Comparez la p. 31 du T. XVIII. Voyez aussi sur les rayons de lumière la l. 9 d'en bas de la p. 163 du T. VI.

¹⁹) D'après un manuscrit (ou plutôt deux manuscrits) de la Bibliothèque Royale à Paris. Huygens possédait ce livre suivant le catalogue mentionné à la p. 389 du T. XIX ainsi qu'à la p. 46 qui précède. Notons que Boulliau avait publié en 1644, également d'après un manuscrit et en y ajoutant un commentaire, les remarques de Théon de Smyrne sur l'arithmétique et la musique (Theo Smyrnaeus Platoniceus, „Eorum quae in mathematicis ad Platonis lectionem utilia sunt expositio”. Nous avons donné le titre grec plus haut dans la note 3 de la p. 11).

²⁰) ΚΑΛΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΠΕΡΙ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΚΑΙ ΗΓΕΜΟΝΙΑΣ. On peut comparer avec ce traité les opinions générales exprimées par Ptolémée dans ses „Harmonika”. Voyez la p. 355 du T. XIX.

²¹) Voyez sur les forces les p. 6—7 du T. XIX, ainsi que les premières lignes de la p. 247 du T. XVI; pour la théorie de la lumière on peut également consulter le T. XIX.

²²) Voyez la p. 659 du T. XVIII.

²³) Voyez la l. 6 de la p. 230 du T. XVI. Comparez aussi la note 8 de la p. 191 du même Tome (opinion d'Epicure et de Lucrèce).

²⁴) Voyez le dernier alinéa de la p. 642 du T. XIX.

²⁵) C'est aux corps qu'il applique le terme „substantiae” dans la l. 17 de la p. 230 du T. XVI. Comparez la fin de la note 4 de la p. 341 du T. XVI et le dernier alinéa de la p. 316 du T. XIX.

²⁶) Voyez le T. XIX sur la question de la cohésion.

le concept du temps; Huygens l'en sert sans le discuter ²⁷): le temps, qu'il considère apparemment (tout aussi bien que l'espace) comme une grandeur continue, est le même pour nous tous ²⁸).

Or, puisque pour toute série de démonstrations il faut partir de certaines définitions et de certains axiomes ²⁹), il s'agit de les bien choisir. Ce choix, en effet, est équivoque, et c'est ici que se manifestent le bon sens et l'art du physicien géomètre. Voyez la p. 10 du T. XVI sur le choix des axiomes dans le cas de la collision centrale de sphères dures homogènes; sujet bien important puisque toute la physique d'après Huygens doit finalement reposer sur la collision des corps durs ³⁰). Quant à la géométrie pure, c'est dans la Pièce I sur Euclide qui suit, datant sans doute de 1672 ou 1673, qu'il nous donne son opinion sur la manière de parvenir au meilleur choix des axiomes, sans toutefois tâcher d'exécuter lui-même le programme qu'il ébauche. Personnellement — quoique partisan d'une certaine rigueur ³¹) — il n'a donc pas éprouvé la nécessité de ferrer toutes ses pensées dans un étai rigide. Cette Pièce fait voir que pour Huygens nos connaissances géométriques sont empiriques; les propositions d'Euclide expriment des vérités de fait.

²⁷) Huygens ne dira donc pas avec Aristote (Physica, IV): *ὁ χρόνος ἀρρηκτὸς καὶ συνεχὴς καὶ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον*. La continuité du temps chez Aristote ressort e. a., outre du livre cité et du liv. VI de la Physique, des paroles suivantes (Meteorologica I): *ὁ τε χρόνος συνεχὴς ἀπὸ τοῦ ἀΐου*. Comparez la note 2 de la p. 188.

²⁸) Voyez sur la question de la continuité du temps la l. 8 d'en bas de la p. 82 du T. XIX.


²⁹) T. XIX, p. 81.

³⁰) Comparez les notes 2 et 3 de la p. 8 du T. XIX. Provisoirement il fallait sans doute laisser délibérément de côté les phénomènes inabordables: voyez la note 9 de la p. 178 qui précède (question des marées) et ce que nous avons dit à la p. 334 du T. XIX sur les phénomènes capillaires.

³¹) Comparez la fin de la note 2 de la p. 185 et la note 104 de la p. 215. Nous avons publié à la p. 338 du T. XIV sa „description schématique de la méthode de démonstration archimédienne” qui date d'avant 1666, plus précisément de 1659. Au „Lemma” des p. 283—284 du même Tome, ayant pour but d'éviter la considération de l'infiniment petit dans certaines figures géométriques, nous avons donné par hypothèse la date 1657. Le rédacteur de la présente page croit toutefois devoir lui donner la date 1667: voyez la p. 256 qui suit.

Consultez sur l'adoption par Huygens des postulats d'Archimède les p. 237 (note 5) et 255 (note 5) du T. XIV, se rapportant à un écrit de 1657. Ailleurs (p. 337 et note 14 de la p. 191 du même Tome) Huygens admet (en 1659) que, pour éviter les longueurs, il est généralement préférable de ne pas donner une „démonstration formelle”, mais seulement „le fondement

Quant aux axiomes additionnels de la géométrie, également euclidienne, d'Archimède, Huygens s'en sert sans les critiquer. A l'instar du prince des géomètres grecs il est d'avis que l'infiniment grand et l'infiniment petit ne doivent pas entrer dans une démonstration formelle ³¹).



d'une telle démonstration", „ceux qui s'y connaissent" ne pouvant alors „douter de la possibilité d'une démonstration rigoureuse". Il est question de démonstrations suivant la méthode d'Archimède.

HUYGENS ET EUCLIDE.

- I. A PROPOS DE L'OUVRAGE PROJETÉ D'UN MATHÉMATICIEN
INCONNU SE PROPOSANT DE CORRIGER LES ÉLÉMENTS
D'EUCLIDE.
 - II. L'INCOMMENSURABLE.
 - III. LE CORPS, LA SURFACE, LA LIGNE, LE POINT.
-

I.

A PROPOS DE L'OUVRAGE PROJETÉ D'UN MATHÉMATICIEN INCONNU SE PROPOSANT DE CORRIGER LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ¹⁾.

[1672]

Il a de bonnes choses, comme l'ordre de considérer les corps surfaces et lignes.

Mais ces choses se pourraient mettre sous forme de commentaire.

Sur les Regles. Ce qui est dit dans la 5 de ces regles doit estre examiné car c'est la dessus qu'il fonde la nécessité de toutes ces propositions du premier livre qui ennuiroient fort le lecteur.

1 definition. Point nécessaire car on scait aussi bien ce que c'est qu'estre egal que ce que signifie plus ou moins.

2 defin. De mesme superflue.

5 defin. Superflue. la 6 de mesme.

7 defin. Ce n'est pas la signification vulgaire, mais on la peut icy establir par definition.

8 defin. Le nombre 2 n'est il pas partie de 8?

9 et 10 defin. Superflues. De mesme la 12, 13, 14.

15 defin. Bien longue.

19.20 defin. Superflue.

21 defin. Quand la proposition est un probleme est ce alors pour examiner?

24 defin. Ne semble pas convenir au probleme.

1 Remarque. Probleme et proposition ne se disent pas d'une haleine. Je ne voudrois pas mesler les definitions avec les axiomes et postulats. au moins pas si dispersez.

Il allegue d'autres premiers Elements, s'ils sont nécessaires il faudroit les mettre avec ceux cy.

Je corrigerois s'il y a quelque chose a corriger dans Euclide, la demonstration des proportionnelles par les multiples, et la ferois par les parties aliquotes comme Tacquet ²⁾. [Ailleurs — „Physica varia” f. 34; voyez sur la date de cette feuille la note 1 de la

¹⁾ La pièce est empruntée au revers de la feuille qui nous a fourni l'Appendice II à la Pars Quinta de l' „Horologium oscillatorium” (T. XVIII, p. 438). Or, cet ouvrage parut en avril 1673, et le texte de l'Appendice doit être antérieur à cette date. Il paraît donc probable que la présente Pièce date elle aussi de 1672 ou peut-être de 1673.

p. 333 du T. XIX — Huygens écrit: „E quatuor magnitudinibus prima est ad secundam sicut tertia ad quartam, quando prima aut quælibet ejus pars aliquota toties auferri potest a secunda, quoties tertia aut ejus pars similis aliquota auferri potest a quarta”.] J'ajouterois la proposition 2 d'Archimède des Conoïdes³⁾.

Il y a quantité de choses dans ces Elemens qu'on n'y trouveroit pas a dire si elles n'y estoient point, et qu'on censurera quand on les y trouuera.

S'il faut que cela paroisse comme l'ouvrage de l'Academie, il faudroit ou que la compagnie y travaillast, ou que du moins il deferaist a leur jugemens.

³⁾ Andreas Tacquet, Societatis Iesu sacerdos & matheseos professor — voyez sur lui les p. 155 et 185 du T. I —, avait publié en 1665 (editio secunda correctior, Antverpiæ, apud Jacobum Meursium) les „Elementa Geometriæ planæ ac solidæ, quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata”. Il s'agit d'une édition des Eléments d'Euclide „ad usum studiosæ iuuentutis” (la première édition est de 1654. Voyez la note 3 de la p. 2 du T. III, se rapportant à une lettre de 1660 de Huygens à Tacquet). Dans la Préface Tacquet dit e.a.: „In quinto libro proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur, satis spinosam, efficere planiorem conatus sum. Itaque primum proportionum elementa, faciliiori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur”. Au début du Liber V il écrit e.a.: „Difficultas tota in definitione 5. libri 5. vertitur: ubi tradit Euclides, quid sit quatuor magnitudines esse proportionales, siue duas rationes, easdem, similes, æquales esse. Definit igitur duas rationes tum æquales dici seu similes, quando antecedentia quocumque numero æqualiter multiplicata, consequentibus etiam quocumque numero æqualiter multiplicatis, semper vel simul æqualia sunt, vel simul maiora, vel simul minora. Atque ex ea definitione omnes deinde 5. & 6. libri demonstrationes mediata vel immediata deducit. Haec doctrinæ Euclidæ summa: quæ multiplicem, ut dixi, difficultatem habet. Nam imprimis certum est eâ definitione non naturam æqualium rationum, sed affectionem solummodo aliquam explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur, vel tanquam signum infallibile rationum æqualium, ut quandocumque ea demonstrata fuerit de quibusvis rationibus, inferre certò liceat æquales eas esse: vel is sensus illius est, ut per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit, quàm earum multiples modo iam dicto excedere, vel excedi. Si primum; demonstrare debuerat, eam affectionem omnibus & solis rationibus æqualibus inesse, ut ex eâ rationum æqualitas certò possit inferri. Id verò minimè vulgare theorema est, quod neque Euclides, neque alius post Euclidem ullus demonstravit. Si secundum; securi quidem erimus de veritate theorematum in sensu definitionis acceptorum, minimè tamen ex vi demonstrationum nobis constare poterit de absolutâ rationum æqualitate”.

La première définition du livre V chez Tacquet (s'accordant, quant au sens, avec celle d'Euclide), est la suivante: „Pars aliquota magnitudinis est, quæ aliquoties repetita magnitudinem metitur, siue adæquat. Pars aliquanta, quæ non metitur”.

Dans un exposé de la p. 133 intitulé „Proportionum æqualitas & inæqualitas explicatur” il nous apprend ce qui suit: „Quid porro sit unum antecedens æquè vel magis continere suum consequens, quàm antecedens alterum contineat suum, si proportionales sint rationes, definiré & explicari ulterius potest per numeros, ut si A sit triplum B, & C triplum F, perspicuum erit, quid sit, A æquè seu eodem modo continere B, quo C continet F: vel si I sit triplum L, O verò duplum Q; constabit rursum, quid sit I magis continere L, quam O contineat Q. At si

Les 3 fins des Elements. 1° Etablir des principes certains de la science. 2° Servir d'enseignement a ceux qui veulent l'apprendre. 3° Et contenir un recueil des propositions qui s'emploient le plus frequemment dans les ouvrages et demonstrations de Geometrie afin qu'on ne soit pas obligé d'estendre a chaque fois les demonstrations jusqu'aux premieres propositions et principes.

Pour effectuer ces 3 choses, en sorte qu'il n'y manque rien ni qu'il n'y ait rien de superflu, je crois qu'il faudroit en premier lieu choisir les Propositions principales et plus usitées dont on conviendrait qu'elles seroient necessaires ou qu'elles meriteroient d'entrer dans ce Recueil. Et voir en suite celles qui devroient leur succeder par ordre pour parvenir a leur demonstration. Et cela jusqu'au premiers principes et axiomes, dont par cette retrogradation on trouveroit tous ceux qui sont necessaires, sans estre en danger d'en poser de superflus. Et de mesme en ce qui regarde les definitions, dont la superfluité ne doit pas moins estre evitée.

proportiones fuerint irrationales, ea res explicari ulterius nec potest, nec debet. Dentur magnitudines incommensurabiles A, B, perspicuum est A non solum maius esse B, sed etiam certo quodam modo esse maius (A quippe aliter continet B, quam alia quaelibet maior minorue quam A:) neque tamen ulterius quaeri, aut explicari debet, quis sit certus ille modus, quo A continet B; quia per nullos numeros explicabilis est. Itaque quemadmodum datis binis incommensurabilibus quantitibus non debet ulterius quaeri, quid sit unam certo modo continere alteram, ita neque cum dantur quatuor proportionales incommensurabiles, quaeri debet ulterius, quid sit C eodem modo continere D, quo A continet B. Sicuti enim modus quo A continet B, ulterius est inexplicabilis, ita planè etiam identitas modi, quo A continet B, cum modo, quo C continet D, ulterius inexplicabilis est. Etc."

Rien n'indique que Huygens approuve cette critique de Tacquet de la définition d'Euclide, sur la finesse de laquelle on peut consulter l'édition de 1930 des Eléments citée à la p. 11 qui précède. Heureusement la définition de Huygens que nous insérons entre parenthèses dans le texte et qui, comme il le dit, n'est autre que celle proposée par Tacquet à la p. 136 de son livre (savoir: „Rationes æquales sunt quando & consequentes ipsæ, & consequentium similes partes aliquotæ quæcunque in antecedentibus æquali semper numero continentur”) se rapproche en somme beaucoup de celle d'Euclide.

Nous ajoutons encore que dans sa lettre à Tacquet de 1660, citée au début de la présente note, Huygens fait voir à son correspondant qu'Euclide raisonne parfois mieux que lui.

- 3) Huygens avait fait usage de cette proposition d'Archimède dans la Pièce de 1657 que nous avons intitulée: „Réduction suivant la méthode des anciens, de la rectification de la parabole à la quadrature de l'hyperbole” (T. XIV, p. 237 et suiv.) Il s'en sert aussi dans la Pars Secunda de P. „Horologium oscillatorium” (T. XVIII, p. 179). Voyez aussi la p. 377 du T. XVIII. Nous avons cité la proposition dans la note 5 de la p. 251 du T. XIV en remarquant qu'elle porte le numéro 4 dans l'édition moderne de Heiberg des Oeuvres d'Archimède.

II.¹⁾

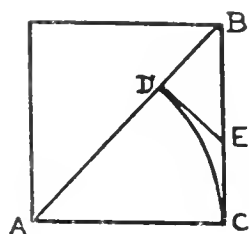
L'INCOMMENSURABLE.

7 Jan. 1675.

DIAMETER QUADRATI INCOMMENSURABILIS EST EJUSDEM LATERI.

Sit quadratum cujus latus AC, diameter AB [Fig. 5]. Dico AB, AC incommensurables esse. Si enim non, sunt si possunt commensurables. Erunt ergo ut numerus ad numerum.

[Fig. 5]



Sit AB ad AC ut numerus FG ad FH [Fig. 6] integer uterque.

Les deux derniers mots ont été ajoutés dans l'interligne. Dans le premier alinéa Huygens prenait le mot „numerus” dans le sens du grec ἀριθμός, nombre entier²⁾. Ses „numeri integri” font opposés aux nombres fractionnaires²⁾. Nous n'avons pas trouvé que Huygens parle de nombres incommensurables³⁾. Le „nombre π ” date de plus tard⁴⁾. Il est vrai qu'il parle parfois de nombres fouds⁵⁾ ou irrationnels⁶⁾ — comme on faisait assez généralement longtemps avant

lui⁷⁾ — et que déjà en 1661 (voyez la p. 12 qui précède) il accorde le nom de „nombres” aux logarithmes. Voyez encore sur les nombres fouds etc. la p. 370 qui suit.

Porro centro A radio AC descripta circumferentia fecit diametrum in D, unde

¹⁾ Portef. „Physica varia”, f. 11 v.

²⁾ C. à d. dans le sens que les *mathématiciens* grecs (antérieurs à Diophante qui admet les nombres fractionnaires) donnent à ce mot; chez Aristote — voyez la note 27 de la p. 181 qui précède — le mot ἀριθμός est appliqué aussi à une quantité qui varie d'une manière continue, le temps.

³⁾ Comme on pourrait le croire d'après la l. 2 d'en bas de la p. 245 du T. XII. Voyez les l. 4—5 de la p. 126 du T. XIV (datant de 1675), avec la note 6.

⁴⁾ Comparez la note 3 de la p. 372 du T. XVI.

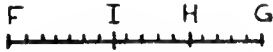
⁵⁾ L. 12 de la p. 273 du T. VI (dispute avec Gregory sur la question de la quadrature du cercle, 1668).

⁶⁾ Voyez la p. 244 du T. VIII (correspondance avec Leibniz, 1679).

⁷⁾ Ludolf van Ceulen p. e. parle de „irrationale ghetallen” dans son ouvrage „De Arithmetische en Geometrische fondamenten” de 1615: voyez la note 3 de la p. 93 du T. XII.

ducta DE perpendicularis AB occurrat lateri CB in E. Sunt ergo ED, EC æquales quia ab eodem puncto E egredientes circumferentiam CD tangunt. Quia autem AB ponitur ad AC sive ad AD ut numerus GF ad numerum FH. [Fig. 6] erit et AD ad

[Fig. 6]



reliquam DB ut numerus FH ad numerum HG. Sed DB est æqualis DE sive EC, et AD æqualis AC sive BC. Ergo et BC ad CE ut numerus FH ad HG. Auferatur ab FH numerus HI æqualis HG. Ergo BC ad CE ut numerus FH ad HI. Et BE ad EC ut numerus FI ad HI. Est autem quadratum BE duplum quadrati BD, propter similes triangulos ABC, EBD ⁸⁾. Ergo quadratum BE duplum quoque quadrati EC. Et quadratum numeri FI duplum quadrati ab HI. Apparet ergo, positis numeris integris GF, FH, quorum illius quadratum fit hujus quadrati duplum, dari necessario duos alios minores numeros integros FI, HI quorum unius quadratum fit alterius duplum. Itaque positis FI, HI, alij duo his minores numeri integri dabuntur quorum quadrata similiter duplam proportionem servent. Atque ita in infinitum. Quod est absurdum quia numeri integri descendendo infiniti non sunt. Non sunt ergo AB, AC commensurabiles.

Potest et aliter perfici demonstratio: si FG et FH ponantur numeri minimi inter se rationem AB ad AC habentes. Ostendetur enim uti prius numeros existere FI, HI minores quam GF, FH, quorumque eadem inter se ratio quam AB ad AC; quod absurdum, cum positi sint GF, FH minimi eorum qui istam rationem inter se obtinent.

⁸⁾ Le théorème de Pythagore est donc supposé connu, du moins pour le triangle rectangle équilatère.

III.

LE CORPS, LA SURFACE, LA LIGNE, LE POINT.

Dans le Manuscrit G, sans doute en 1690 ¹⁾, Huygens donne plusieurs définitions du point, de la ligne, de la surface et du corps. Contrairement à notre habitude nous publions ici les énoncés de Huygens comme ils se suivent dans le Manuscrit sans mettre en avant ceux qu'il désigna après coup par les chiffres 1, 2, 3, 4.

B. 4 *Punctum est quod omni extensione caret, et cujus non nisi positus intelligitur.*

B. [biffé] *Punctum est cujus positus intelligitur, magnitudo nulla intelligitur.*

Linea est quod extensum intelligitur, magnitudo nulla intelligitur.

Superficies est quod extensum undique intelligitur in latitudinem, absque profunditate.

Corpus est quod extensum intelligitur in omnem partem, ac superficie terminatur.

B. 3 *Linea est quod tantum in longitudinem extensum intelligitur.*

Linea est quod non nisi in longitudinem extensum intelligitur [phrase biffée]. Sensu percipi nequit.

<i>Superficies est in qua et longitudo et</i>	<i>sphaericae conae . . . æ ¹⁾ dele</i>
<i>latitudo intelligitur. bonum [mot biffé].</i>	<i>[les deux premiers mots, ainsi que le dernier, sont en effet biffés]</i>
	<i>nihil habens corporei.</i>

Superficies est in qua ex puncto non plures lineae excurrere possunt [alinéa biffé].

Lineae terminatae [mot biffé] neque in se redeuntis termini sunt puncta.



Superficies finita et quae corpus non complectitur, linea terminatur.

B. 1 *Corpus quatenus in geometria consideratur est magnitudo finita, in qua extensio in omnem partem intelligitur.*

B. 2 *Superficies est id quo corpus exterius circumdatur [en marge: quo corpus extrinsecus circumdatur] ita ut nihil quicquam intercedat [leçon primitive: interponatur].*

¹⁾ Manuscrit G, f. 47 v. La date 1692 se trouve sur la f. 44, mais plus loin on rencontre des dates de 1690.

Voyez encore sur ce sujet les Additions et Corrections.

Huygens avait commencé par écrire: *Superficies est quod extremum in corpore intelligitur*; ce qu'il corrigea d'abord en: *Superficies est quo corpus exterius amplectitur idque immediate seu ut nihil quicquam intercedat*.

Superficies nulla est nisi in corpore [le B. 2 s'applique peut-être aussi à cette phrase].

Linea est quod extremum in superficie intelligitur [alinéa biffé].

Punctum est quod extremum in linea intelligitur [alinéa biffé].

Les nombreuses ratures font voir de quelle manière hésitante Huygens procédait. Il choisit en fin de compte, pour chacune des quatre entités, une seule définition, qu'il marqua d'un B, probablement une abréviation de „bon” ou „bonum”.

Comme il apparaît par le numérotage des définitions finalement choisies, Huygens est d'avis qu'il faut commencer par la définition du corps. Il semble préférer cet ordre à l'ordre inverse (point, ligne, surface, corps) et y attacher de l'importance; cela ressort de la première phrase de la Pièce I qui précède. Toutefois, il n'y a chez lui une relation logique qu'entre les définitions du corps et de la surface, tandis que — fait curieux — après cela sont définis la ligne et le point, indépendamment et sans rapport logique avec les définitions précédentes. L'ordre dans lequel sont rangées les définitions n'a pas de signification réelle, abstraction faite de celui des deux premières. Il en est autrement lorsque, comme Barrow ²⁾, après les définitions d'un corps et d'une surface comme délimitation d'un corps, on continue systématiquement à définir la ligne comme la délimitation d'une partie d'une surface et le point comme celle d'une partie d'une ligne. Mais une fois qu'on a accepté la définition de la ligne choisie par Huygens, on ne peut guère, à notre avis, faire une objection fondamentale contre la définition de la surface comme quelque chose ayant longueur et largeur mais non pas épaisseur („*profunditas*”, comme Huygens, de même que Barrow, appelle ici la troisième dimension), quelque peu satisfaisantes que soient pareilles définitions au point de vue des mathématiques rigoureuses d'aujourd'hui.

Du temps de Huygens il paraît qu'on avait beaucoup d'intérêt pour de semblables questions et aussi pour d'autres qui s'y rattachent, comme celle de savoir si un point est un „ens revera existens” ³⁾. En 1660 eut lieu à Paris, à l'Académie de Montmort, une réunion ³⁾ où Desargues, auteur du „broüillon-projet” sur la coupe des pierres en l'architecture, soutenait qu'un point géométrique

²⁾ I. Barrow, „*Lectiones mathematicæ*” de 1664, *Lectio IX*, p. 135 de l'édition Whewell citée à la p. 372 qui suit: „*Corpus vel solida magnitudo præsupponi potest . . . Hinc datur solidæ magnitudinis Terminus aliquis secundum profunditatem indivisibilis, is vocetur Superficies . . . Pars dictæ superficies non est usquam interminata, sed aliquo ambitu seu extremo clauditur . . . Terminus . . . dicatur Linea . . . supponatur dari lineæ Terminus indivisibilis, et hic appelletur Punctum*”. P. 137: „*Non existimo superficies, lineas aut puncta separatam quandam existentiam, aut propriam ex seipsis efficaciam possidere*”.

³⁾ Voyez la p. 182 du T. III. Il semble ressortir de cette page que Lodewijk Huygens connaissait Desargues personnellement. Il se peut donc que Christiaan et Lodewijk aient fait sa connaissance lorsque les deux frères se trouvaient à Paris en 1655. Mais il est également fort possible que Christiaan ne l'ait vu qu'une seule fois de sa vie. On peut aussi consulter sur la soirée chez de Montmort qui eut lieu le 9 novembre 1660, le *Journal de voyage 1660—1661*.

aurait une existence réelle ⁴⁾. Il fut attaqué sur cette thèse par de la Poterie. Une expression de Huygens montre que la question provoqua ce soir des réactions passionnées: il parle de la véhémence merveilleuse et ridicule de de la Poterie.

Voyez la p. 504 qui fait sur un fac-similé, publié en cette même année 1940, des définitions de 1690 de Huygens.

⁴⁾ Il est possible que dans sa conférence Desargues soit parti de la notion du corps: M. Poudra dans les „Oeuvres de Desargues, réunies et analysées par [lui]" (Paris, Leiber, 1864) cite (T. II, p. 176) l'élève et ami de Desargues Abr. Bosse disant: „Desargues démontrait universellement par les solides, ce qui n'est pas l'usage ordinaire de tous ceux qui se disent géomètres ou mathématiciens".

On pourrait penser devoir constater ici une certaine ressemblance entre la pensée de Desargues et celle de Huygens. En réalité Desargues a eu bien peu d'influence sur lui; voyez toutefois le nom Desargues aux p. 220, 221 et 402 qui suivent. Il nous semble d'ailleurs, malgré Bosse, que Desargues ne parlait pas toujours exclusivement de la notion du corps. M. Zacharias dans la préface de sa traduction de 1922 dans la série „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften" (N^o. 197) du „Broüillon-projet d'une atteinte aux événements du rencontre du cone avec le plan" s'exprime comme suit: „Sind bei den Alten alle Figuren starr und unbeweglich, so setzt die neuere Geometrie die Bestandteile ihrer Gebilde gern in Bewegung; Punkte durchlaufen Linien [il en était ainsi déjà chez Héron d'Alexandrie; Aristote, lui, disait (Physica, VI) que le mouvement continu d'un point mathématique est inconcevable et inexistant; voyez encore sur ce sujet la note 13 de la p. 372 qui suit], gerade Linien drehen sich um feste Punkte oder wälzen sich als bewegliche Tangente um krumme Linien herum, Ebenen drehen sich um feste Achsen . . . [Es] erweist sich Desargues in seinem Broüillon-project als Wegbereiter der neueren Geometrie . . . hinsichtlich der Beweglichkeit der Figuren zeigt sich Desargues als Bahnbrecher der neuen Richtung. So erzeugt er den Kreis und die andern Kegelschnitte durch Bewegung eines Punktes, den Kegel durch Bewegung einer geraden Linie etc". Nous ne nous écartons certes pas de notre sujet en observant en passant que si cette géométrie du mouvement est en général étrangère aux Eléments euclidiens, il est pourtant vrai que dans le livre IX Euclide, se conformant à des prédécesseurs, définit la sphère (Def. XIV) comme le solide contenu dans la surface obtenue par la rotation d'une demi-circonférence de cercle et que dans la Def. XVIII il obtient le cône par la révolution d'un triangle rectangle; ni aussi en remarquant que, pratiquement au moins, Huygens n'a aucune objection contre de pareilles définitions: voyez p. e. les dernières lignes de la p. 309 du T. X. Mais dans ceci il n'est certainement pas question de la moindre influence de Desargues sur Huygens dont les figures — nous ne parlons pas ici des développantes ou d'autres courbes dans la genèse desquelles sont considérés des fils flexibles — sont en général, comme celles d'Euclide, „starr und unbeweglich".

MATHEMATICA VARIA :
LES MANUSCRITS.

MATHEMATICA VARIA: LES MANUSCRITS.

Le portefeuille „Varia” contient une douzaine de feuilles, de la main de Huygens, faisant mention de certaines lettres et donnant une série de titres d'ouvrages qui n'avaient pas vu le jour de son vivant ¹⁾. Ces feuilles se trouvaient sans doute au moment de sa mort dans les tiroirs d'un bureau, puisque sur l'une d'elles on lit: „Correspondence avec le Marquis de l'Hospital dans un tiroir à part” et que son testament mentionne certains tiroirs et les papiers y contenus. Dans ces feuilles il est en outre question de la correspondance de Huygens avec Merfenne, Hudde, Römer, Oldenburg et de Carcavy. Il y en avait sans doute d'autres qui ne nous sont pas parvenues: le testament, mais non pas les feuilles conservées, mentionne la correspondance avec Leibniz.

La correspondance avec Hudde p.e. est mentionnée deux fois dans les feuilles: „Literæ Huddenij. cum nonnullis meis responsis”, ceci avec plusieurs autres sujets, puis sur une feuille à part: „Literæ Huddenij. cum aliquibus responsis meis. cætera sunt in libro adversariorum”.

Cette dernière remarque s'applique, peut-on dire, aux „mathematica” (voir la suite du texte) en général: les constructions géométriques et les calculs exécutés par Huygens dans le cours de sa vie ne se trouvent pas tous dans des lettres ou sur des feuilles séparées, mais aussi, et pour une très grande partie, dans les „libri adversariorum”, c.à.d. dans les Manuscrits reliés A-K ²⁾ et quelques autres moins volumineux.

Beaucoup de ces „mathematica” (nous prenons ici le mot — avec Huygens, nous semble-t-il — dans son sens restreint; voyez sur le sens plus large la p. 264 du T. XIX) ont déjà été publiés, non seulement dans les T. XI, XII et XIV, mais aussi dans les autres Tomes, p.e. dans ceux (X et précéd.) qui contiennent la correspondance. En effet, les lettres échangées avec Leibniz, avec le Marquis de l'Hospital et d'autres étant de nature mathématique, il était tout naturel, et presque inévitable, d'y joindre sous forme d'appendices ou de notes les calculs et constructions, ou du moins la partie la plus importante de ceux-ci, auxquels cette correspondance donna lieu.

Une feuille à part porte le titre: „Mathematica varia mea. pauca alicujus momenti”. Sur une autre feuille, portant plusieurs titres, Huygens s'exprime plus fortement

¹⁾ Comparez la Pièce „Anecdota” à la fin du T. XVIII.

²⁾ Voyez sur ces Manuscrits la p. 4 du T. XV.

encore: „*Mathematica varia mea. in quibus nihil fere alicujus momenti*”. Nous ignorons — puisque l’arrangement des papiers nous est inconnu — quelle est la partie des „*mathematica*” que Huygens frappait ainsi de son verdict. Il paraît bien qu’il n’est question ici que de feuilles séparées³⁾; et de celles-ci plusieurs peuvent ne pas avoir été conservées. D’autre part il est certain que la remarque ne s’applique pas à toutes les feuilles mathématiques sans exception, puisque la même feuille du portef. „*Varia*” qui parle des „*Mathematica . . . nihil fere alicujus momenti*” contient aussi séparément le titre: „*De Problemate Alhazeni de puncto Reflexionis in speculo sphaerico. Constructiones Slusij et nostrae, cum literis Oldenburgij*”. Il faut sans doute aussi tenir compte de la modestie de l’auteur: voyez ce que nous avons dit à la p. 92 du T. XI sur la note „*vulcano tradenda*”. Toutefois, nous pensons agir dans son esprit en ne publiant pas intégralement ses calculs.

Un des tiroirs contenait, outre divers autres papiers, les „*Ecrits de Mathematique dont j’ay donné Copie a l’Academie des Sciences a Paris*”. Ce sont ceux-ci que nous croyons devoir publier en premier lieu⁴⁾. Plusieurs autres Pièces pourront y être ajoutées en guise d’Appendices.

Vu que les deux Appendices à la Pièce I de 1666 ou 1667 („*Règle pour trouver les logarithmes*”) datent⁵⁾ de 1661 (la Règle elle-même est d’ailleurs en réalité de la même année) c’est de ces Appendices que nous traitons en premier lieu dans notre Avertissement aux Communications de Huygens à l’Académie Royale des Sciences sur des sujets de mathématique.



³⁾ Les Manuscrits A-K etc. sont mentionnés à part dans le testament.

⁴⁾ Nous suivons en général le texte des Registres de l’Académie. Comparez e.a. la note 1 de la p. 243 qui suit. Nous ignorons si les papiers de Huygens sur ces sujets qui se trouvaient dans le tiroir ont tous été conservés. Notons que nous ne possédons pas de feuilles séparées sur les équations solides (Pièce XII de la p. 286 qui suit).

⁵⁾ Ceci est certain pour le deuxième Appendice. Nous supposons que le premier date également de 1661. Voyez les p. 203—204 qui suivent.

HUYGENS À L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES.
COMMUNICATIONS SUR DES SUJETS
DE MATHÉMATIQUE.



Avertissement

Dans son „Harmonie Universelle” de 1636 Mersenne ne s’était pas servi de logarithmes; il est permis de croire que, malgré l’étendue de ses connaissances¹⁾, cette branche des mathématiques — n’en fut-il pas de même pour Descartes?²⁾ — lui était restée étrangère³⁾. Toutefois il ne mourut pas avant d’avoir fait leur connaissance, d’ailleurs apparemment fort superficielle. Dans un „Monitum” de l’„Universæ Geometriæ mixtæque Mathematicæ Synopsis” faisant partie des „Cogitata physico-mathematica” de 1644⁴⁾ il mentionne „Gellibrandus, post Neperum & Briggsium” disant: „Qui serio Trigonometriæ suam operam dare voluerit, adeat Gellibrandi Britannicam Trigonometriam⁵⁾, etc”; et dans une lettre du 2 mai 1648 à Chr.

¹⁾ Voyez la l. 2 d’en bas de la p. 352 du T. XVI (remarque de Constantyn Huygens père sur Mersenne).

²⁾ Voyez cependant ce que Paul Tannery écrivit en 1900 dans le T. VII de l’„Intermédiaire des Mathématiciens” („Mémoires Scientifiques”, éd. Heiberg et Zeuthen, Toulouse—Paris, 1930, T. X, p. 370—372).

³⁾ Si Mersenne avait connu les logarithmes lorsqu’il écrivit l’„Harmonie Universelle”, il n’aurait pas eu besoin du secours de Beaugrand (voyez sur lui la note 4 de la p. 171 qui précède) pour calculer onze moyennes proportionnelles.

⁴⁾ Le „Monitum” se trouve à la p. 255 à la fin de la Partie „Euclidis ex traditione Maurolyci Phænomena”.

⁵⁾ La „Trigonometria Britannica” (où est adopté pour le degré la division centigrade) contient des logarithmes de Briggs et une préface de Henry Gellibrand (Gouda, Rammaseyn, 1633). Cet ouvrage est mentionné aussi, après ceux de Neper et de Briggs, à la p. 243 du sixième tome de la même année 1644 du „Cours mathématique” d’Hérigone que Mersenne a peut-être pu consulter.

Huygens⁶⁾ il parle, à propos de Grégoire de St. Vincent⁷⁾, d'„un probleme [que celui-ci „suppose"] plus difficile que celui de la quadrature lequel il ne resoût point, aseauoir Estant données trois grandeurs rationnelles, ou irrationnelles et deux de leurs logarithmes estant aussi donnez, trouuer Geometriquement le logarithme de la troisieme”.

Il n'est évidemment pas question ici — Mersenne ne donne aucune définition du logarithme — de ce que nous entendons aujourd'hui par ce mot. Si l'on appelle logarithme du nombre n le nombre l défini par l'équation $b^l = n$, il est manifeste que lorsqu'on donne un seul nombre et son logarithme, la base b ⁸⁾ est déterminée; de sorte qu'on peut alors calculer le logarithme correspondant d'un nombre quelconque. Mais si l'on donne arbitrairement encore un deuxième nombre et son logarithme, ces données correspondront en général à une deuxième base, et l'on ne peut alors raisonnablement demander quel sera, d'après les données du problème, le logarithme d'un troisième nombre. Cette objection subsiste lorsqu'on définit le logarithme d'un rapport A — voyez la définition de Briggs et de Mercator⁹⁾ — comme le nombre N , c.à.d., par opposition à l'exposant de la première définition, le nombre *entier* N des „ratiunculae” (la „ratiuncula” étant un rapport fort peu supérieur à $\frac{1}{4}$) comprises dans ce rapport A : un premier nombre donné (ou plutôt le rapport A de ce nombre à l'unité) et son logarithme définissent (à une petite incertitude près) la grandeur de la „ratiuncula”, et si l'on donne arbitrairement encore un deuxième nombre et son logarithme, il en résultera en général une „ratiuncula” fort différente, de sorte qu'on ne pourra conclure logiquement au nombre des „ratiunculae” correspondant à un troisième nombre. Dans le cas du problème de Mersenne il faut apparemment se figurer (comparez l'écrit de de Sarasa, cité plus loin) deux séries de grandeurs représentées par des lignes droites (Euclide, Grégoire de St. Vincent), dont l'une constitue une série géométrique, l'autre une série arithmétique. Qu'on établisse ensuite une correspondance entre le n -ième terme de la première et le m -ième terme de la deuxième série,

⁶⁾ T. I, p. 89. La lettre date de quatre mois avant la mort de Mersenne. Elle est la réponse à celle du 20 avril 1648 de Huygens (T. II, p. 566) où il dit avoir vu le livre de Grégoire. Voyez sur cette lettre de Huygens la note 18 de la p. 276 du T. XI.

⁷⁾ Dans le présent Tome nous avons mentionné l'„Opus Geometricum, Quadratura Circuli etc.” de 1647 de Gregorius à St. Vincentio à la p. 9.

⁸⁾ Le terme „base” est de L. Euler (dix-huitième siècle).

⁹⁾ A la p. 11 qui précède.

de même entre le p -ième de la première et le q -ième de la deuxième (on peut prendre $p - n = q - m$), appelant „nombres” ou „grandeurs” les termes de la série géométrique et „logarithmes” les termes correspondants de la série arithmétique; alors on peut raisonnablement demander à quoi correspond soit le r -ième terme de la série géométrique, soit aussi (Sarasa) une longueur intermédiaire entre ce terme et le suivant. La solution exige en général une interpolation: l'on n'obtiendra en général qu'une solution approchée. Or, pareille solution approchée peut, tout aussi bien qu'une quadrature approchée, être considérée (c'est sur cela, nous semble-t-il, que Mersenne veut fixer l'attention) comme n'en étant pas une ¹⁰).

Pareil problème n'avait d'ailleurs pas été „supposé” par Grégoire. Le mot „logarithme” ne se trouve pas dans l'„Opus Geometricum” ¹¹). Mersenne a cru pouvoir formuler à sa manière un problème équivalent à un (?) de ceux de l'œuvre de Grégoire, mais il ne dit pas lequel et sa trop brève remarque demeure énigmatique ¹²). Il avait d'ailleurs déjà formulé dans les mêmes termes cette remarque, ou plutôt cette critique, un an plus tôt, en 1647, dans une page de son „Novarum Observationum Physicomathematicorum Tomus III” ¹³). En septembre 1650 F. van Schooten attira l'attention de Huygens sur cette page de Mersenne quoique sans mentionner les logarithmes ¹⁴). Une lettre de Huygens à Grégoire de novembre 1651 ¹⁵) nous apprend qu'il avait fait connaissance avec le livre de A.A. de Sarasa de 1649 intitulé:

¹⁰) Il est quelque peu étonnant, nous semble-t-il, qu'à la fin de sa „Logarithmo-technia” Mercator dit simplement: „Patet quoque ex precedentibus quo pacto problema Mersennianum, si non geometricè saltem in numeris, ad quotvis usque locos solvi possit”, sans indiquer que lorsqu'on adopte sa propre définition du logarithme ce problème n'a pas de sens.

¹¹) Il n'est donc pas tout-à-fait exact de dire, comme cela a été fait à la p. 242 du T. XII, que „Grégoire n'avait pas donné la quadrature proprement dite du cercle mais seulement la réduction de cette quadrature à celle de l'hyperbole ou aux logarithmes [nous soulignons]”, quoique de Sarasa (ouvrage cité dans le texte) puisse dire (au début de son traité) de certaines parties du livre de Grégoire: „fundamenta doctrinæ quæ Logarithmos complectitur inibi continentur”. Voyez ce que Huygens dit sur Grégoire à la p. 264 qui suit.

¹²) Il dit que la recherche de Grégoire „in illud abit needum solutum Problema”.

¹³) Deuxième alinéa de la p. 72, dans le Cap. I „De nouiter Repertis post edita Phenomena”. Mersenne y parle du „conatus ingens in inueniendi circuli quadratura”, sans mentionner le nom de l'auteur et sans indiquer le titre de l'ouvrage considéré. Mais c'est indubitablement du livre de Grégoire qu'il parle.

¹⁴) T. I, p. 132. Des 19 lignes de Mersenne van Schooten en cite sept, dont celles sur les logarithmes (voyez la note 16) ne font pas partie. Ce qu'il cite se rapporte aux indivisibles de Cavalieri.

¹⁵) T. I, p. 156.

„Solutio Problematis a R.P. Marino Merfennen Minimo propositi datis tribus quibuscunque magnitudinibus, rationalibus vel irrationalibus, datisque duarum ex illis Logarithmis tertiæ Logarithmum Geometricè inuenire¹⁶⁾, etc.” Huygens n'approuvait point les quadratures de Grégoire: son *Ἐξέτασις* de décembre de la même année 1651¹⁷⁾ était déjà prête en septembre¹⁸⁾; néanmoins il parle dans sa lettre de novembre du „[liber] Patris A. de Sarasa, qui te feliciter à Merfenni censura vindicavit”. Comme il n'est aucunement question de logarithmes dans l'*Ἐξέτασις* ni par conséquent d'une interprétation de la critique si vague de Merfenne il ne semble pas permis de conclure qu'en ce temps Huygens avait déjà considéré avec quelque attention la théorie des logarithmes. D'ailleurs — soit dit en passant — nous n'avons pas trouvé qu'il en ait jamais donné une définition nette¹⁹⁾.

La lettre de Wallis d'août 1656²⁰⁾ ne paraît pas non plus l'avoir amené à s'occuper de la théorie ou de la pratique des logarithmes; dans sa réponse de septembre²¹⁾ il dit que pour des raisons de santé „a tempore aliquo prorsus perfunctorie in studiis hifce [les études des sciences mathématiques] versor”.

Rien, nous semble-t-il, ne nous empêche de croire que 1661 est bien l'année où il commença à se servir du calcul des logarithmes²²⁾ et que ce fut, comme il le dit,

¹⁶⁾ De Sarasa cite ici littéralement les quatre dernières lignes de l'alinéa de la p. 72 de Mersenne dont il est question dans les deux notes 13 et 14. Il donne d'ailleurs aussi au début de sa brochure la remarque de Mersenne en entier (disant qu'à son avis cette „censura” est „parum Geometricè concepta & expressa”).

¹⁷⁾ T. XI, p. 315.

¹⁸⁾ T. I, p. 145.

¹⁹⁾ Voyez à la p. 8 qui précède ce que disait Huygens, et aussi ce que disait van Schooten en la même année 1656, sur les définitions en général.

Citons encore la définition d'Hérigone (Cours III, p. 14; voyez la suite du texte sur son chapitre sur les logarithmes): „Les logarithmes sont les exposans des grandeurs continuellement proportionnelles”.

²⁰⁾ T. I, p. 476. Wallis y mentionne les „tabulæ logarithmicæ” de Briggs. Voyez sur l'„Arithmetica Logarithmica” de Briggs, utilisée par Huygens en 1661, la note 7 de la p. 441 et quelques autres endroits du T. XIV.

²¹⁾ T. I, p. 495. Il est vrai que la réponse conservée est fragmentaire.

²²⁾ Nous croyons cependant devoir remarquer que si la note *a* de la p. 517 du T. I date de 1656, Huygens connaissait déjà en cette année le „Directorium Generale Uranometricum” de Cavalieri, traitant e.a. des „Trigonometriæ Logarithmicæ Fundamenta et Regulæ”; et qu'il est certain qu'il avait reçu en 1657 (voyez la p. 210 du T. II) la „Mathesis universalis” de Wallis laquelle contient un court chapitre sur les logarithmes. Il serait d'ailleurs assez évident même dans l'absence de tout document rendant la chose plausible, que, quoique ne se servant pas encore lui-même de logarithmes, Huygens ne pouvait ignorer leur existence.

une question de musique, la considération de la $\pi\epsilon\rho\iota\kappa\epsilon\lambda\lambda\omega\sigma\iota\varsigma$ ²³⁾ exigeant l'interpolation d'un nombre quelconque de termes en progression géométrique entre deux grandeurs données, qui l'y amena. C'est donc aussi de 1661, pensons-nous, que date la Pièce qui constitue le § 7 de notre Appendice I à la p. 294, où il s'agit de la même interpolation, non pas, il est vrai, entre deux cordes correspondant à deux tons musicaux, mais entre deux capitaux dont le premier doit s'accroître par des intérêts composés jusqu'à atteindre le montant du deuxième.

Il est vrai que cette dernière application n'a nullement, comme la précédente, le mérite de l'originalité: Huygens connaissait au moins depuis 1652²⁴⁾ le „Cours mathématique” de P. Hérigone qui, en traitant des logarithmes dans son troisième volume, consacre huit pages à la considération de problèmes concernant l'accroissement de capitaux „avec les intérêts des intérêts”²⁵⁾.

On pourrait objecter que nous avons dit ailleurs²⁶⁾ qu'„on trouve dans le Manuscrit A et dans les Chartæ astronomicæ plusieurs calculs logarithmiques [sur les couronnes et parhélies, traité achevé vers la fin de 1662²⁷⁾]”; que les feuilles des Chartæ astronomicæ, il est vrai, ne sont pas datées; mais que, dans le cas du Manuscrit A, il s'agit de feuillets découpés qui y faisaient, selon nous, suite à la p. 242²⁸⁾ et que cette page et les suivantes, et par conséquent aussi les feuillets enlevés, datent probablement d'avant 1661, plus précisément de 1660²⁹⁾. Toutefois, en consultant le T. XVII on peut constater que ce que nous disions n'est pas absolument correct: les feuillets provenant du Manuscrit A sont, par opposition aux autres feuilles des Chartæ astronomicæ dont il est ici question, des feuillets qui ne contiennent pas de calculs *logarithmiques*³⁰⁾. Par conséquent, ces calculs sur les couronnes et parhélies corroborent notre thèse, bien loin de l'infirmer.

Ce qui rend aussi plus ou moins probable que les calculs de Huygens sur les intérêts

²³⁾ Voyez sur ce mot les p. 143 et 168—169 qui précèdent.

²⁴⁾ T. I, p. 202.

²⁵⁾ P. 91—98: „de l'usage des logarithmes aux intérêts, etc.” Voyez le titre complet de l'ouvrage d'Hérigone à la p. 202 du T. I.

²⁶⁾ T. XVII, p. 360.

²⁷⁾ T. XVII, p. 359.

²⁸⁾ T. XVII, p. 360, note 3.

²⁹⁾ Comparez la note 1 de la p. 100 du T. XVII.

³⁰⁾ D'après la note mentionnée dans la note 28 qui précède, les feuillets découpés (c.à.d. les feuillets découpés conservés) sont devenus les f. 67 et 66 des Chartæ astronomicæ. On les trouve cités dans le T. XVII aux p. 490 (notes 2 et 3), 492 (notes 5 et 6) et 494 (notes 17 et 21).

composés ne soient pas antérieurs à 1661³¹⁾ c'est que, d'après les données de la note 1 de la p. 291 qui suit, ces calculs ne sont en tout cas pas antérieurs à octobre 1658, qu'ils ne datent donc pas d'une des premières années après l'acquisition (?), en 1652 ou plus tôt (?), du Cours d'Hérigone³²⁾.

Autre argument : les calculs de Huygens sur les intérêts composés sont rédigés en flamand (ou, si l'on veut, en néerlandais); or, il en est de même pour les petites Tables de Vlaecq, contenant des problèmes sur ce sujet (note 5 de la p. 456 qui suit), qui parurent à la Haye en 1661.

On pourrait dire aussi que déjà en 1652 — neuf ans avant la rédaction de la Pièce qui occupe les p. 460—471 du T. XIV — Huygens trace une courbe qui n'est autre que la logarithmique³³⁾. Mais ici — quoique connaissant le Cours d'Hérigone — il ne parle pas encore de logarithmes. Comme dans le cas de la Fig. 24 de la p. 291 qui suit, il s'agit apparemment³⁴⁾ d'une représentation graphique des termes d'une série géométrique par des droites ordonnées éloignées l'une de l'autre à des distances a toujours égales entr'elles³⁵⁾; or, suivant Huygens, les „linearum proportionales”³⁶⁾ d'une courbe convenable — d'une courbe, peut-on dire, qui exprime une loi; comparez la Pièce de Huygens de 1646 „de motu naturaliter accelerato”, où il critique Lobkowitz³⁷⁾ — doivent jouir des mêmes propriétés quelle que soit l'unité des distances a (dans la lettre suivante du 7 janvier 1653 à van Schooten Huygens parle de leur „magnitudo arbitraria”); par conséquent parmi les courbes passant par les extrémités des ordonnées considérées une seule, selon lui, est bonne : c'est celle qu'il trace.

À la p. 27 du T. XIV nous³⁸⁾ disions déjà — mais sans discuter la date probable des calculs sur les capitaux placés à intérêts composés — qu'avant 1661 on ne trouve pas de calculs logarithmiques dans les manuscrits de Huygens.

³¹⁾ Observons aussi qu'en mars 1661, d'après les p. 256—258 du T. III — nous citons cette Pièce de nouveau dans la note 69 de la p. 209 qui suit — Huygens copie un manuscrit de Fermat dans lequel il est question d'insérer par des procédés géométriques un grand nombre, p. e. 10 ou 30, moyennes proportionnelles entre deux quantités données, sans qu'il observe que cette interpolation pourrait être faite au moyen de logarithmes.

³²⁾ Huygens possédait certainement ce Cours plus tard, puisqu'il est mentionné en 1659 (*Libri math. in octavo*, 18) dans le Catalogue de vente de ses livres.

³³⁾ T. I, p. 209. Voyez la note 1 de la p. 210.

³⁴⁾ Dans le texte (lettre de Huygens à van Schooten) il n'est question que d'une autre courbe, savoir une courbe de Wallis. Voyez sur cette courbe la p. 373 qui suit.

³⁵⁾ Comparez la p. 440 du T. XIV.

³⁶⁾ T. I, p. 209, l. 10; les „linear” sont les ordonnées.

³⁷⁾ T. XI, p. 68. Voyez la note 1 de cette page.

Nous³⁸⁾ ajoutons: „tandis qu'alors ce calcul est approché par lui du côté géométrique en connexion avec la quadrature de l'hyperbole". Voyez toutefois l'Addition à la p. 555 du T. XIV. Malgré la remarque de 1647 de Merfenne dont nous parlions plus haut, et qui aurait pu amener Huygens déjà en cette année à s'occuper des logarithmes en connexion avec le problème des quadratures, il n'y a pas de raison pour attribuer la priorité à ce calcul-là contrairement à ce que Huygens dit lui-même³⁹⁾. On pourrait certes être en doute en regardant la feuille séparée 11 du portef. „Musica": un côté de cette feuille — non numérotée par Huygens — se rapporte au problème musical de l'interpolation⁴⁰⁾, l'autre (Appendice II à la p. 295) à sa règle (Pièce I qui suit) sur le calcul des logarithmes basé sur la quadrature approchée de l'hyperbole. Impossible de dire, en regardant cette feuille, quel est le texte le plus ancien. Mais dans le Manuscrit B⁴¹⁾ la chose est plus claire: *ses premières pages* contiennent des calculs brouillonés sur le problème musical; les brouillons sur l'hyperbole etc. n'y commencent qu'à la p. 5. C'est par ces calculs de la p. 5 et suiv. que Huygens trouva sa règle qu'il rédigea ensuite aux p. 18 et suiv. sous le titre „Fundamentum regulæ nostræ ad inveniendos logarithmos⁴²⁾".

Sans doute, quoiqu'il n'en dise rien en cet endroit⁴³⁾, il s'est souvenu en entreprenant les calculs des p. 5 et suiv. que dès 1647 il avait été question de logarithmes en connexion avec l'„Opus Geometricum" de Grégoire de cette année. Mais nous ne pouvons souscrire entièrement à ce que l'exposé suivant de Ch. Hutton dans la partie „Construction of logarithms" de son „Introduction" à la Collection des „Scriptores logarithmici" par Fr. Maferes⁴⁴⁾ dit à propos de Merfenne: „As to the first remarks on the analogy between logarithms and the hyperbolic spaces, it having been shewn by Gregory St. Vincent, in his *Quadratura Circuli & Sectionum Coni*⁴⁵⁾, published at Antwerp in 1647, that if one asymptote be divided into parts in geometrical progression, and from the points of division ordinates be drawn parallel to

³⁸⁾ Ou plutôt, pour parler clairement, le rédacteur du T. XIV, par opposition à celui du T. XVII et du présent Avertissement.

³⁹⁾ P. 12 qui précède.

⁴⁰⁾ Note 1 de la p. 147 qui précède.

⁴¹⁾ La première date y est août 1661, à la p. 18.

⁴²⁾ Pièce publiée aux p. 451—457 du T. XIV.

⁴³⁾ Mais voyez son hommage à Grégoire de St. V. à la p. 281 du T. VI (année 1668) et la réponse de J. Wallis (p. 298 du même Tome).

⁴⁴⁾ P. LXXXVI du T. I de cet ouvrage publ. en 1791 chez Davis, London. L'introduction historique de Hutton parut d'abord en 1785 dans sa nouvelle édition de „Sherwin's Mathematical Tables".

⁴⁵⁾ C. à. d. l'„Opus Geometricum".

the other asymptote, they will divide the space between the asymptote and curve into equal portions⁴⁶); from hence it was shewn by Merfennus, that by taking the continual sums of those parts, there would be obtained areas in arithmetical progression, adapted to abscissés in geometrical progression, and which therefore were analogous to a system of logarithms. And the same analogy was remarked and illustrated soon after by Huygens, and many others, who shew how to square the hyperbolic spaces by means of logarithms". Nous ne voyons pas que les paroles de 1647 de Mersenne, qui rapporte des propos d'autrui⁴⁷), impliquent la connaissance de la proposition que Hutton lui attribue et qui est en réalité la Prop. III (ou plutôt le corollaire de cette proposition) de 1649 de de Sarafa⁴⁸).

Pour éviter tout malentendu nous ajoutons que le passage cité de Hutton ne se rapporte pas à la règle de Huygens pour calculer les logarithmes, basée e.a. sur la considération d'un segment d'hyperbole (comme on peut le voir au T. XIV) et que ni Hutton ni Maseres n'ont connue; voyez sur les considérations de Huygens qui s'y rattachent sur la quadrature de l'hyperbole par les logarithmes, ce qui est le sujet dont parle Hutton, les p. 474 et suiv. du T. XIV (pages manuscrites également inconnues à Hutton et Maseres), ou plutôt la p. 221 du T. XVIII appartenant à l'„Horologium oscillatorium" universellement connu au dix-huitième comme au dix-septième siècle.

Nous disons encore quelques mots plus loin⁴⁹) sur la logarithmique, qui fut considérée de nouveau (nous voulons dire, après 1661) par Huygens en 1668, donc à Paris, comme on l'a vu au T. XIX⁵⁰).

Le texte des treize Communications de Huygens à l'Académie qui suivent, dont celle sur la règle pour trouver les logarithmes est la première, est emprunté en majeure partie aux Registres de l'Académie conservés à Paris⁵¹), mais en tenant compte, lorsqu'il y a lieu, des pièces de la collection-Huygens à Leiden⁵²). Ceci s'applique aux Pièces I, II, III, IV, VII, X et XIII. Les Pièces V et VI ne consistent qu'en quelques lignes indiquant les sujets traités par Huygens d'après les Registres; pour la Pièce VI ce sont surtout les

⁴⁶) „Opus Geometricum", De Hyperbola, Prop. CXXX.

⁴⁷) P. Tannery (lettre à H. Bosmans du 24 déc. 1902, p. 198 du T. XIII de 1934 des Mémoires Scientifiques, éd. Heiberg et Zeuthen) suppose que „la question plus ou moins bien formulée par Mersenne contre Saint-Vincent" a été inspirée par Roberval.

⁴⁸) Nous rappelons que Mersenne décéda en 1648.

⁴⁹) P. 413 et 414.

⁵⁰) Dans la „Dynamique".

⁵¹) Comparez la p. 680 du T. XIX.

⁵²) Voyez les p. 195—196 qui précèdent.

Appendices, empruntés aux manuscrits de Leiden, qu'il faut consulter. Il en est de même pour la Pièce XII; sauf que nous empruntons ici quelques lignes au Manuscrit E, non pas dans un Appendice, mais dans la Pièce elle-même. Exceptionnellement nous avons ajouté à cette Pièce de 1680 un Appendice datant, quoique peu, d'après le départ définitif en 1681 de Huygens de Paris; ceci à cause de la liaison étroite existant apparemment entre les considérations géométriques développées dans ces pages et ce que Huygens a dû proposer à ses collègues de l'Académie. La Pièce XI est mentionnée dans les Registres mais ils n'en contiennent pas le texte; celui-ci est emprunté aux *Chartæ mathematicæ*; nous l'avons publiée dans le T. XVIII auquel nous renvoyons le lecteur. La Pièce VIII (problème d'Alhazen) est empruntée en partie aux *Chartæ mathematicæ* et en partie aux „Divers ouvrages”⁵³⁾ de 1693. D'après une lettre de Huygens à Oldenburg de juin 1669⁵⁴⁾ „nos Messieurs ont jugé assez heureuse” la construction du problème d'Alhazen que l'on trouve, imprimée par lui-même, vis-à-vis de la p. 462 du T. VI. Il a donc dû la présenter à l'Académie en cette année quoique les Registres de 1669 n'en fassent pas mention. Ailleurs⁵⁵⁾ Huygens affirme cependant qu'une construction provenant de lui est dans les Registres. C'est, pensons-nous, celle, différente de la construction de 1669, qu'on trouve à la p. 336 des „Divers ouvrages”⁵⁶⁾. La Pièce IX enfin (construction d'une hyperbole) est également empruntée aux „Divers ouvrages”: il est possible qu'elle se trouvait dans un des tomes perdus des Registres (1670-1674), quoique le manuscrit conservé de Huygens dont le texte est le même porte la date du 30 janvier 1669 et qu'on ne voit donc pas pourquoi il ne l'a pas pas communiquée à l'Académie en cette année⁵⁷⁾.

⁵³⁾ „Divers ouvrages de mathématique et de physique” par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences.

⁵⁴⁾ T. VI, p. 460.

⁵⁵⁾ T. IX, p. 96.

⁵⁶⁾ Huygens n'a pas envoyé cette construction à d'Alencé en 1687 (T. IX, p. 167); comparez ce qu'il en dit en 1693 à la p. 497 du T. X. Nous ne la trouvons pas dans un des tomes conservés des Registres; de la Hire a donc dû, pensons-nous, la tirer, pour les „Divers ouvrages”, d'un des tomes perdus.

Voyez sur ces tomes perdus la p. 179 de notre T. XIX. Nous y parlons de „l'ancienne Académie, fondée en 1666, abolie en 1693”. Le lecteur est prié de corriger 1693 en 1793, faute d'impression que nous n'avons pas remarquée en temps utile.

⁵⁷⁾ Huygens envoya la Pièce à d'Alencé en 1687. Quoique de la Hire (lettre de septembre 1686) lui eût fait savoir qu'il pouvait aussi envoyer pour les „Divers ouvrages” des pièces autres que celles qui avaient été présentées à l'Académie, il ne paraît pas l'avoir fait. C'est seulement pour cette Pièce-ci qu'on pourrait être en doute. Voyez sur le manuscrit de Huygens la note 1 de la p. 273.

Pièce I. Après tout ce qui a été dit plus haut et au T. XIV sur la règle pour trouver les logarithmes ⁵⁸⁾ il n'est plus nécessaire d'y revenir.

Pièce II et suivantes. La „Demonstratio regulæ de maximis et minimis”, rédigée en latin, n'a certainement pas été lue par Huygens sous cette forme. D'ailleurs il dit à la p. 264 du T. XIX qu'il vaut mieux que les sujets de „la geometrie pure et arithmetique” — ceci s'applique aussi à la Pièce I — soient traités par écrit, ou, pour le citer littéralement, „que de telles speculations ne foyent pas une affaire d'assemblée”. Il y eut néanmoins des communications orales, puisque les Registres disent que Huygens „continuera sa Methode de Maximis etc.” et qu'il note sur son manuscrit: „parler de Hudde” ⁵⁹⁾. Nous nous abstenons de remarques analogues sur les autres Pièces ⁶⁰⁾.

Toutes les communications — à l'exception, peut-on dire, de la première, puisque Huygens donne sa règle sans aucune démonstration; et aussi en partie de la cinquième — se rapportent à des sujets de géométrie. Il est question p.e. d'„investiganda maxima et minima in *geometricis* quæstionibus” ⁶¹⁾. C'est de géométrie *plane* qu'il s'agit en premier lieu. Ceci est évident pour la Pièce III: „Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum”. Mais on le remarque aussi dans la Pièce II. Néanmoins Huygens voit fort bien que la méthode fournit des maxima et des minima d'expressions algébriques d'où qu'elles proviennent: dans l'Appendice II de la p. 300, datant de 1669, il l'applique à deux problèmes sur le cône, ce qui n'est plus de la géométrie plane. C'est d'ailleurs ce que tout-le-monde voyait depuis longtemps: dès 1644 Hérigone applique la méthode de Fermat à la question „Trouver le plus grand des cones droicts contenus sous egales superficies coniques” ⁶²⁾.

Nous avons déjà dit dans le T. XI ⁶³⁾ qu'on trouve dans le Manuscrit 12, apparemment destiné en premier lieu à l'usage personnel du jeune Huygens, quelques pages de la main de F. van Schooten le fils intitulées: „De Maximis et Minimis sive Ratio inveniendi casum determinationis in Problemate determinato juxta Methodum Domini

⁵⁸⁾ T. XIV, p. 431 et suiv.

⁵⁹⁾ Voyez sur Hudde la note 3 de la p. 73 du T. XIX.

⁶⁰⁾ On peut consulter là-dessus nos notes à ces Pièces.

⁶¹⁾ Note 1 de la p. 229 qui suit.

⁶²⁾ P. Hérigone, Cours Mathématique, Tome Sixiesme et dernier, p. 63. C'est précisément un des deux problèmes considérés par Huygens en 1669.

⁶³⁾ P. 3, 7 et 13.

de Fermat", et que deux des quatre problèmes traités se trouvent (à l'endroit cité) dans le Cours d'Hérigone. Faut-il en conclure que dès son séjour à Leiden Huygens connaissait fort bien ce Cours? Dans ce cas n'est-il pas quelque peu étonnant que ses calculs logarithmiques sur les intérêts composés datent d'après octobre 1658? Il faut répondre à cette question que ce n'était pas uniquement par le volume de 1644 d'Hérigone que van Schooten connaissait la théorie de Fermat ⁶⁴). Il suffit de remarquer que le nom de Fermat ne se trouve pas chez Hérigone qui intitule son chapitre simplement „Propos. XXVI. De maximis & minimis" et ne mentionne pas non plus Fermat dans son „Introduction en la Chronologie" ni dans sa „Table . . des Auteurs Mathématiques". Van Schooten avait connu Mersenne à Paris en 1642 et 1643; c'est peut-être celui-ci qui lui a fourni en ce temps les Pièces manuscrites retrouvées par de Waard à Groningue (qui contiennent le premier mais non pas le deuxième des problèmes cités) ⁶⁵). D'ailleurs Huygens écrit en 1656 que Mersenne ⁶⁶) lui envoyait souvent à lui-même des écrits français „et principalement de Monsieur de Fermat" ⁶⁷). Il faut pourtant ajouter, nous semble-t-il, qu'il est possible que Huygens considère ici, brevitate causa, les écrits envoyés à van Schooten comme adressés à lui-même. Consultez aussi le T. XI ⁶⁸) sur une copie d'un manuscrit de Fermat envoyée par Mersenne à Constantyn Huygens père ⁶⁹).

⁶⁴) Publiée seulement en 1679 dans les Oeuvres de Fermat. Descartes avait reçu un petit écrit „De maximis et minimis" de Fermat vers le commencement de 1638, par l'intermédiaire de Mersenne, comme il résulte de la lettre de Descartes à Mersenne de janvier 1638 („Oeuvres", éd. Adam et Tannery, I, p. 486). Dans l'édition moderne des Oeuvres de Fermat par Tannery et Henry — titre complet dans la note 78 de la p. 211 — avec Supplément par C. de Waard, on peut voir que Mersenne avait communiqué des copies d'écrits de Fermat à plusieurs personnes en Italie.

⁶⁵) Consultez la p. XIX de la préface de de Waard au Supplément, datant de 1922, que nous avons mentionné dans la note 64, ou bien la biographie de F. van Schooten par de Waard dans le „Nieuw Nederlandsch Biographisch Woordenboek" de 1927. Notre T. XI est de 1908.

Voyez aussi la p. 410 de notre T. I où il est question de Carcavy offrant de mettre van Schooten en relation avec Fermat.

⁶⁶) La correspondance commença en 1646.

⁶⁷) Lettre à de Carcavy, T. I, p. 428.

⁶⁸) P. 214.

⁶⁹) Notons encore qu'en 1659 (T. II, p. 458—462) Huygens copie „un essai de M. Fermat envoyé par M. de Carcavy", qu'en juin 1660 il reçut un livre de Fermat par l'intermédiaire de Carcavy (T. III, p. 85), et que dans son Journal de Voyage 1660—1661 il écrit à Paris le 9 mars 1661: „Copie du traité de Fermat de constr. probl.", traité qu'il tenait également de Carcavy; voyez ce qu'il annote à la p. 258 du T. III où nous avons publié cette copie. Dans le T. IV on trouve encore d'autres écrits de Fermat envoyés par de Carcavy.

En juin 1659 Huygens peut écrire à Wallis avoir réduit depuis longtemps ⁷⁰⁾ la méthode de Fermat sur les maxima et les minima „ad idem hoc compendium quo Huddeus utitur ⁷¹⁾” et avoir mis cela par écrit pour J. de Witt. Nous ne connaissons pas cet écrit dont Huygens parle aussi dans le Manuscrit C ⁷²⁾. Mais on peut voir dans le T. IV ⁷³⁾ un écrit de Huygens de 1663 également adressé à de Witt et contenant, celui-ci, la réduction à un „compendium” de la méthode de Fermat ⁷⁴⁾ pour tracer des tangentes aux courbes planes données par des équations algébriques entre les deux coördonnées x et y (c. à. d. des équations contenant des puissances entières de x et de y), ce qui est aussi le sujet de la présente Pièce III. Notons que Huygens ne désigne pas ces courbes par l’expression „courbes algébriques”, comme d’autres l’ont fait, mais qu’il parle, avec Descartes, de courbes ou lignes *géométriques* : voyez p. e. le premier alinéa de la p. 403 du T. XVIII.

En comparant la Pièce III avec l’écrit adressé à de Witt on voit qu’en 1667 de très grandes parties ont été simplement copiées par Huygens. En 1667 toutefois il commence par énoncer la règle et en donne ensuite la démonstration, tandis qu’en 1663 la règle n’avait été énoncée qu’après la déduction.

Dans la Pièce II ⁷⁵⁾ Huygens a interverti l’ordre primitif exactement comme dans la Pièce III. Ou plutôt : il l’a fait pour la Pièce III exactement comme il l’avait fait pour la Pièce II. Seulement dans le cas de la Pièce II l’ordre primitif est celui d’un projet de 1667 du Manuscrit C ⁷⁶⁾. L’existence de ce projet nous permet de conclure que dans ce cas Huygens n’a pas copié de grandes parties de l’écrit adressé déjà avant 1659 à de Witt. Cet écrit se rattachait sans doute aux considérations de Huygens de 1652 et d’un peu plus tard qu’on trouve aux p. 60 et suiv. du T. XII ⁷⁷⁾.

⁷⁰⁾ Voyez la note 11 de la p. 48 du T. XI.

⁷¹⁾ T. II, p. 417.

⁷²⁾ Voyez la note 4 de la p. 233 qui suit.

⁷³⁾ P. 312—317.

⁷⁴⁾ Voyez aussi la p. 20 du T. XI.

⁷⁵⁾ Note 4 de la p. 233 qui suit.

⁷⁶⁾ Note 1 de la p. 229 qui suit.

⁷⁷⁾ Voyez aussi la p. 418 du T. XIV.

Vers 1864 J. M. C. Duhamel⁷⁸⁾ s'est livré à une discussion assez étendue sur les méthodes de Fermat pour les maxima et minima et pour les tangentes. La lecture de ses conclusions, comprenant douze propositions historiques, suffit pour montrer qu'il s'est surtout intéressé à la question des mérites respectifs de Fermat et de Descartes. Huygens a jugé bon de faire quelques brèves remarques historiques sur la question des tangentes au début de la Pièce III, remarques que Duhamel⁷⁹⁾ cite sans les approuver. Duhamel ne fait aucune observation sur l'affirmation de Huygens — on a vu plus haut qu'elle est exacte — d'avoir composé son compendium sur le problème des tangentes „multo ante istas litteras vulgatas”, c.à.d. avant la publication par Clerfautier en 1667 du Vol. III des Lettres de Descartes⁸⁰⁾; mais il déclare: 1. „que cette méthode, attribuée à Fermat par Huygens, appartient à Descartes seul”, 2. ne pas être de l'avis de Huygens lorsque celui-ci „reconnaît [la méthode de Descartes] comme satisfaisante jusqu'à un certain point, mais cependant moins claire que celle qu'il donne [lui-même]”. Après avoir parlé de l'édition de 1679 des „Varia Opera” de Fermat où l'„usus” de la règle pour les tangentes „nec bene expositus est, nec demonstrationem ullam adjectam habet” Huygens avait ajouté: „Cartesium verò in his quæ dixi litteris rationem ejus aliquatenus assecutum invenio, nec tamen tam perspicue eam explicuisse quam per hæc quæ nunc trademus fiet”. Nous nous contentons de signaler la différence d'opinion entre Huygens et Duhamel au sujet du rôle de Descartes, non sans ajouter que Duhamel peut avoir raison. Quant à la clarté de l'exposé de Huygens on voit que Duhamel ne la nie pas. Ailleurs⁸¹⁾ il avait

⁷⁸⁾ „Mémoire sur la méthode des Maxima et Minima de Fermat, et sur la méthode des tangentes de Fermat et de Descartes”, p. 269—330 du T. 32 de 1864 des „Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France”. — Dans le T. IV de l'édition moderne des „Oeuvres de Fermat”, publ. par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, avec supplément aux T. I—IV, documents inédits publ. avec notices sur les nouveaux manuscrits par C. de Waard, Paris, Gauthier—Villars, 1912, H. Brocard fait quelques observations critiques sur ce mémoire, dont les conclusions, formulées plus brièvement, s'y trouvent aux p. 143—144.

⁷⁹⁾ P. 314. Nous parlons des remarques dont le texte latin se trouve dans la note 1 de la p. 243 qui suit.

⁸⁰⁾ Comparez la p. 448 du T. XIV, où — soit dit en passant — il n'est pas tenu compte, nous semble-t-il, du passage de la lettre de Huygens à de Carcavy que nous avons citée à la p. 209 qui précède (note 67).

⁸¹⁾ P. 283.

dit au sujet de la Pièce II (sur les maxima et minima): „Tous les calculs de Huygens sont rigoureux: tous ceux de Fermat ne sont qu'approchés jusqu'au moment où il remplace e [petit accroissement de la variable] par zéro". En 1672⁸²⁾ Huygens dit qu'Ilérigone ne montre pas „le vray fondement" de la règle „de Monsieur de Fermat . . . pour les Tangentes . . ." „que j'ay trouuè tout autre".

Pièce II. Huygens indique cette Pièce par les mots „Dimensio Paraboloidum"⁸³⁾, nous l'avons intitulée „De curvis paraboloidibus et hyperboloidibus".

Pièce I. Le nom Wallis figure déjà maintes fois dans les pages précédentes de ce Tome. En 1667 Huygens ne pouvait encore en aucune façon parler à l'Académie de Wallis musicologue: l'édition des „Harmonica" de Ptolémée est de 1682⁸⁴⁾. Mais Wallis mathématicien lui était fort connu dès 1652; dans le présent Avertissement nous avons déjà fait allusion à sa correspondance avec van Schooten sur Wallis de cette année⁸⁵⁾. Plusieurs lettres furent échangées entre Huygens et Wallis de 1655 à 1659⁸⁶⁾, et Wallis lui envoya en ce temps quelques-uns des ouvrages que nous citons à la p. 258 qui suit; une partie d'un de ces ouvrages lui était même dédiée⁸⁷⁾. En 1661 Huygens fit à Londres la connaissance personnelle de Wallis⁸⁸⁾, mais la correspondance ne fut reprise qu'en 1668, après la communication de Huygens sur Gregory qui constitue notre Pièce VI⁸⁹⁾.

On peut voir dans les lettres échangées avant 1660 combien l'impression que

⁸²⁾ T. VII, p. 229.

⁸³⁾ T. IX, p. 95, lettre à de la Hire du 26 septembre 1686. Huygens ajoute „ou je pourray joindre celle des Hyperboloides" Comparez la note 1 de la p. 256 qui suit.

⁸⁴⁾ Nous ne parlons pas de quelques petits articles de Wallis sur des sujets de musique (d'ailleurs également postérieurs à 1667): Huygens ne les mentionne pas.

⁸⁵⁾ Note 34 de la p. 204.

⁸⁶⁾ Nos T. I et II.

⁸⁷⁾ Voyez sur l'envoi de plusieurs publications de Wallis les p. 192 et 210 du T. II; une partie des „Tractatus duo etc." est dédiée à Huygens.

⁸⁸⁾ T. III, p. 295, lettre de Huygens du 14 juillet 1661. D'après son Journal de Voyage Huygens vit Wallis quatre fois au mois d'avril.

⁸⁹⁾ Il est vrai que cette communication à l'Académie eut lieu en octobre 1668 et que Wallis lui avait écrit déjà en septembre (T. VI, p. 251), mais Huygens ne reçut cette lettre que le 31 octobre (T. VI, p. 278).

Huygens reçut des publications de Wallis était favorable⁹⁰). Il critique cependant les démonstrations où il est fait usage de l'induction⁹¹) et dont Wallis défend amplement l'admissibilité⁹²). Comparez sur ce sujet la remarque de 1686 de Huygens à la p. 390 qui suit⁹³). Le fait que Huygens — autrement que Wallis — exprime plusieurs fois sa préférence pour la géométrie par rapport à l'arithmétique et l'algèbre ne constitue évidemment pas une critique. Dans la lettre du 1 janvier 1659⁹⁴) Wallis montre que Huygens s'était trompé en affirmant⁹⁵) que l'„arithmetica infinitorum” ne pourrait probablement pas servir à calculer ce qu'il avait lui-même déterminé géométriquement, savoir les aires comprises entre certaines droites et la cissoïde. Toutes ces choses, et beaucoup d'autres, peuvent avoir été exposées par Huygens en détail à l'Académie.

Pièce VI et Appendices. Pour ne pas trop allonger le présent Avertissement, nous ne nous étendons pas ici sur la polémique avec J. Gregory sur la question de la démonstrabilité de l'impossibilité de la quadrature du cercle, dispute à laquelle Wallis lui aussi prenait part : voyez surtout la longue lettre à Brouncker du 14 novembre 1668⁹⁶). Mieux vaudra revenir sur la recherche de la quadrature du cercle dans un autre Avertissement⁹⁷). Il a d'ailleurs déjà été question de ce sujet dans cet Avertissement-ci, puisqu'en nous avons cité l'„Opus Geometricum” de Grégoire de St. Vincent en mettant en lumière l'influence de cet ouvrage sur d'autres chercheurs et en particulier sur Huygens.

Pièce VII. Si d'une part les logarithmes proviennent de la nécessité d'abrégier les calculs trigonométriques des astronomes, si d'autre part il fut remarqué que la théorie des capitaux croissants, ainsi que celle des intervalles musicaux, présentent avec celle

⁹⁰) Voyez p. e. le début de la lettre du 6 septembre 1658 à la p. 210 du T. II.

⁹¹) T. I, p. 441, 459.

⁹²) T. I, p. 477, lettre du 22 août 1656. Wallis ne se sert pas encore de „l'induction complète”, consistant à démontrer que lorsque, pour une série de formules, la $n^{\text{ième}}$ est bonne, la $(n+1)^{\text{ième}}$ doit l'être également. Voyez encore sur ce sujet la note 4 de la p. 390.

⁹³) A la p. 459 du T. I il appelle les démonstrations algébriques „compendiosas”. Voyez aussi la p. 211 du T. II.

⁹⁴) T. II, p. 296.

⁹⁵) Dernières lignes de la p. 212 du T. II.

⁹⁶) T. VI, p. 282—289.

⁹⁷) P. 369 qui suit.

des logarithmes des analogies frappantes de sorte que les tables de logarithmes peuvent servir dans ces deux cas, il n'en est pas moins vrai que la recherche des quadratures, telle qu'elle se trouve chez Grégoire de St. Vincent, était propre, elle aussi, à faire réfléchir les mathématiciens sur des problèmes logarithmiques. Mersenne, tout mucifologue qu'il était, avait été amené vers la fin de sa vie par les disputes sur l'œuvre de Grégoire, et nullement par une question musicale, à poser un problème logarithmique qui, on l'a vu plus haut, a assez généralement attiré l'attention des savants.

Remarquons cependant en passant que dans les „*Cogitata physico-mathematica*” de 1644 de Mersenne se trouve l'affertion „musicale” que le rapport d'égalité correspond à zéro ⁹⁸⁾; ce que Wallis, à la fin de son „*Tractatus Elencticus*” contre Meibomius ⁹⁹⁾, dit considérer comme pouvant avoir été le point de départ de la théorie des rapports de ce dernier.

Quoique N. Mercator ¹⁰⁰⁾ connût le problème logarithmique de Mersenne, sa théorie à lui des logarithmes a un caractère plutôt musical ¹⁰¹⁾; mais il s'est occupé aussi d'une quadrature, celle de l'hyperbole, et c'est à cette quadrature que la „*Logarithmo-technia*” doit sa célébrité puisqu'il s'y agit d'une sommation de ce qu'on a voulu appeler des „indivisibles” à l'aide du développement d'une fraction en une série convergente; et, comme l'hyperbole avait déjà été mise en rapport avec les logarithmes, ceci se trouva conduire au développement en série d'un logarithme.

On comprend que Huygens ait tenu à faire immédiatement connaître à Paris la quadrature de l'hyperbole par Mercator, la dispute avec Gregory se trouvant ainsi reléguée dans le passé ¹⁰²⁾. Les Registres disent que Huygens, après que Wallis eut expliqué et réformé cette quadrature, „y a adiousté plusieurs choses pour en faciliter

⁹⁸⁾ „*Praefatio generalis, De Rationibus atque Proportionibus*”. On lit dans le n° XIV: „*Proportio aequalitatis nihili similitudinem refert: proportio maioris aequalitatis attollitur supra nihilum, & enti adsimilatur: proportio minoris aequalitatis deprimitur infra nihilum, & antienti comparari potest*”.

⁹⁹⁾ Déjà cité dans la note 3 de la p. 13 qui précède.

¹⁰⁰⁾ Note 10 de la p. 201.

¹⁰¹⁾ Voyez la p. 11 qui précède. Il mérite d'être observé que chez Mercator il n'est nullement question, à propos des „*ratiunculae*”, de la théorie des capitaux croissants, mais *seulement* de musique.

¹⁰²⁾ Voyez à la p. 276 du T. VI la fin de la Pièce de Huygens du 12 novembre 1668, plusieurs fois citée dans les Appendices à la Pièce VI (p. 303—327 qui suivent).

l'intelligence". Lorsqu'on compare la version de Huygens avec celle de Wallis ¹⁰³⁾ on voit que Huygens a en effet le mérite de la simplicité et de la clarté qui chez Wallis est déjà plus grande que chez Mercator. Il a omis tout ce qui se rapporte à la série de Mercator et de Wallis $1 - A + A^2 - A^3$ etc. pour ne conserver que la série de Wallis $1 + A + A^2 + A^3$ etc. Mais nous ne voyons pas qu'il y ait rien ajouté (du moins dans la Pièce écrite; il peut avoir *parlé* plus longuement).

On ne peut pas en effet considérer comme une addition qu'au lieu de se servir de petites „areolæ” découpées, devant de nouveau être sommées pour obtenir l'aire totale, il dit, plus correctement que Mercator, prendre de petits *parallélogrammes* qui „surpassent de quelque chose l'espace” considéré; ce qui donne évidemment, lorsque les parallélogrammes, comme les „areolæ”, deviennent infiniment minces, la même somme. Ceci est en effet entièrement dans l'esprit de Wallis quoiqu'en cette occasion celui-ci n'indique pas les parallélogrammes dans la figure ¹⁰⁴⁾. Dans la Pièce tirée des Registres (voyez les dernières lignes de cette Pièce) Huygens n'observe pas, bien que la chose dût être évidente pour Mercator, pour Wallis et pour lui-même, que lorsque les tranches ou parallélogrammes correspondant à une aire limitée deviennent „innumeræ” (Mercator), les „ratiunculæ” — le nombre dix millions (dernière ligne de la p. 11) est évidemment arbitraire — se rapprochent indéfiniment de la valeur $\frac{1}{4}$ de sorte que les exposants des puissances de ces „ratiunculæ”, c.à.d. les

¹⁰³⁾ On peut consulter la note 3 de la p. 261 qui suit.

¹⁰⁴⁾ Dans la Dédicace de son „De Sectionibus Conicis” de 1655 (dédié à Seth Ward et à L. Rook) Wallis écrit: „Videbitis me, statim ab initio, Cavallerii Methodum Indivisibilium quasi jam à Geometris passim receptam, tam huic quam tractatui sequenti . . . substernere; ut multiplici figurarum inscriptioni & circumscriptioni, quibus in ἀπαιροῦσις aliàs utendum sæpius esset, supersedere liceat; sed à nobis aliquatenus sive emendatam sive saltem immutatam: pro rectis numero infinitis, totidem substitutis parallelogrammis (altitudinis infinite exiguæ) ut & pro planis, totidem vel prismatis vel cylindrulis; & similiter alibi”.

Ailleurs Huygens désigne, conformément à la terminologie de Cavalieri, les parties élémentaires d'une figure plane par les mots „linæ” ou „rectæ”; voyez p.e. la l. 6 (datant de 1664) de la p. 482 du T. XVI, et la note 6, se rapportant à un calcul de 1693 ou 1694, de la p. 379 du T. XVIII. Il est vrai qu'en ces endroits nous avons affaire, autrement que dans les „Theoremata de quadratura hyperboles etc.” de 1651 (T. XI), à des pièces qui n'étaient pas destinées à la publicité; il ne s'agit donc pas dans ces pièces de démonstrations formelles. Voyez encore sur les démonstrations formelles, outre la p. 182 qui précède, les p. 348 du T. XVI et 50 du T. XVIII.

Consultez aussi sur Wallis, Huygens et les indivisibles de Cavalieri la note 1 de la p. 340 du T. XVI.

logarithmes (si l'on veut s'en tenir à la définition du logarithme de la p. 11), tendent à devenir infiniment grands, ce qui à ses auditeurs eût pu sembler une difficulté sérieuse. Probablement — il est vrai que nous ne connaissons pas la communication orale — il a cru bien faire de passer ce fait sous silence.

Pièce XI. On a vu dans le T. XVIII ¹⁰⁵) que les théorèmes de Huygens de 1678 sur l'*ἐπικυκλις* ¹⁰⁶) de l'épicycloïde et la quadrature des espaces épicycloïdaux se rattachent tant à la rectification de la cycloïde — trouvée par Huygens en 1659, après Wren, suivant une méthode fort différente — qu'aux considérations de Descartes et de Vaumesle sur les figures roulantes. Depuis une dizaine d'années le problème de la rectification des courbes — que Descartes dans sa *Géométrie* de 1637 avait jugé insoluble ¹⁰⁷) — était à l'ordre du jour ¹⁰⁸).

Quelques mois plus tard de la Hire, devenu membre de l'Académie en cette année 1678, y parla sur le même sujet ¹⁰⁹).

En 1675 Römer avait déjà traité à l'Académie de l'usage de l'épicycloïde dans les engrenages, sujet auquel de la Hire et Huygens s'intéressèrent également, de la Hire peut-être en cette même année 1675 indépendamment de Römer ¹¹⁰).

Pièces IX et X. Ces Pièces — voyez sur la Pièce IX ce que nous disons un peu plus loin en parlant de la Pièce VIII — se rapportent aux équations de l'hyperbole et de la circonférence de cercle. C'est donc de la géométrie analytique, mais d'une tournure archaïque. Construire l'hyperbole d'après son équation s'appelle chez Huygens „construëctio loci ad hyperbolam” ¹¹¹). L'on voit combien le problème de déterminer

¹⁰⁵) P. 52 (A), p. 40—41 (B), p. 400—405. Le troisième livre de l'„*Horologium oscillatorium*” (T. XVIII) de 1673 traite „de linearum curvarum evolutione et dimensione”.

¹⁰⁶) Expression de Wallis pour désigner la rectification; voyez la p. 285 qui suit.

¹⁰⁷) Livre Second: „la proportion qui est entre les droites et les courbes n'étant pas connue, et même, je crois, ne le pouvant être par les hommes...”

¹⁰⁸) Voyez encore sur le problème historique de la rectification des courbes la note 1 de la p. 210 du T. XVIII.

¹⁰⁹) T. XVIII, p. 603, note 4 et T. XIX, p. 180, note 7.

¹¹⁰) T. XVIII, p. 602—603 et 607—616.

¹¹¹) De Witt (début du Lib. II de l'ouvrage cité dans la note 114) parlait aussi d'un „locus ad lineam rectam” ou „ad curvam”. De la Hire — voyez sur lui la suite du présent Avertissement — s'exprime de la même manière.

les éléments d'une conique d'après son équation — notons que dans l'Appendice de 1682 à la Pièce XII ¹¹²⁾ Huygens parle simplement de l'„æquatio parabolæ” ¹¹³⁾ — paraissait encore ardu malgré les travaux de Wallis et de Witt ¹¹⁴⁾. Les fameux livres d'Apollonios ¹¹⁵⁾ — nommé dans le titre de la Pièce X, cité aussi dans l'Appendice II à la Pièce VIII, dans celui à la Pièce XII et dans la Pièce XIII —, ne pouvaient être incorporés qu'avec difficulté dans un ensemble logique d'allure moderne ¹¹⁶⁾. On voit que la construction de l'hyperbole de la Pièce IX se rattache à une construction de Florimond de Beaune, et que la Pièce X n'est guère autre chose que la construction d'une circonférence de cercle d'après son équation ¹¹⁷⁾. Il faut remarquer que pour Huygens dans sa jeunesse, comme pour Apollonios, le mathématicien par excellence est le *géomètre*. Il n'a jamais abandonné cette préférence pour la géométrie: voyez p. e. la l. 5 de la p. 208 où il est question de „geometrie pure et arithmetique” et les l. 4—6 de la p. 213 où nous citons ses observations sur les écrits de Wallis. Néanmoins l'étude d'autres auteurs — nous pouvons mentionner Viète (antérieur à Descartes) qu'il connaissait depuis longtemps ¹¹⁸⁾ et dont l'algèbre ou, comme Viète s'exprime, l'„Arithmetica speciosa sive symbolica” a eu aussi tant d'influence sur Wallis ¹¹⁹⁾ — l'ont amené peu à peu à attacher plus d'importance aux équations et même à regarder parfois, comme Girard ¹²⁰⁾ et Descartes, certaines équations comme intéressantes en elles-mêmes et capables d'être *interprétées* par des figures géométriques.

¹¹²⁾ Dernière ligne de la p. 339 qui suit.

¹¹³⁾ Nous n'avons pas trouvé que de la Hire se serve où que ce soit de ce génitif qui est aujourd'hui d'un usage général: là où il s'exprime le plus brièvement il parle („Nouveaux Eléments” p. 394) d'„Equations aux Sections Coniques”.

¹¹⁴⁾ Voir pour l'ouvrage de Wallis la note 104 qui précède. Le Lib. II des „Elementa Curvarum” de Johan de Witt (1625—1672), grand-pensionnaire depuis 1653 de la province de Hollande, publiés en 1659 par F. van Schooten dans le T. II de la Collection „Renati Descartes Geometria” — dans sa préface de 1658 de Witt parle de „ea . . . quæ à me *quondam* [nous soulignons] conscripta ac pene in ordinem redacta inveni” — contient une discussion systématique des équations de deux variables (x et y) du premier et du deuxième degré.

¹¹⁵⁾ Dont Wallis en 1655 ne connaissait encore que les quatre premiers; voyez p.e. la note 8 de la p. 41 du T. XVIII et les notes 2 et 3 de la p. 298 qui suit.

¹¹⁶⁾ Voyez e.a. sur Huygens et Apollonios la note 8 de la p. 41 du T. XVIII.

¹¹⁷⁾ Comparez la p. 231 du T. XIV (pièce de 1657).

¹¹⁸⁾ Voyez à la p. 10 du T. I le titre des Oeuvres de Viète (1540—1603) telles qu'elles furent publiées en 1646 par F. van Schooten. Huygens les cite e.a. en 1652 (T. I, p. 213).

¹¹⁹⁾ Voyez l'„Oratio Inauguralis” de 1649 par laquelle débute le T. I des „Opera Mathematica” de 1695.

¹²⁰⁾ „Qui a commenté Stevin” (T. I, p. 517). Huygens le cite seulement en 1691 (T. X, p. 187, 188); mais voyez aussi sur lui le T. XI, et consultez la p. 363 qui suit.

Pièce VIII. Le célèbre problème d'Alhazen avait d'ailleurs amené Huygens de bonne heure à bien saisir l'utilité de l'algèbre dans la résolution des problèmes géométriques: en août 1657 ¹²¹⁾ il écrit à de Sluse: „semper miratus sum illum [Alhazen] absque Algebrae auxilio id construere potuisse”. En ce moment de Sluse ne voulut pas encore s'occuper de ce problème; mais lorsqu' Oldenburg lui communiqua en 1670 la solution de Huygens de 1669 ¹²²⁾, il se mit lui aussi au travail. Les diverses solutions, proposées tour à tour par Huygens et par lui en 1671 et 1672, et qu'ils se faisaient connaître par l'entremise d'Oldenburg — nous avons déjà parlé de ces lettres à la p. 196 qui précède — font preuve d'une concurrence acharnée entre les deux amis. Oldenburg publia des „Excerpta ex Epistolis nonnullis, ultrò citròque ab Illustrissimis Viris, Slusio & Hugenio, ad Editorem scriptis” dans les „Philosophical Transactions” de 1673 ¹²³⁾. En excerptant la lettre de Huygens du 1 juillet 1672 il omet l'endroit qui caractérise bien ce combat de finesse: Huygens dit que sur ce problème il lui „semble que nous raffinons de même que les deux peintres Grecs sur la division de la ligne”.

Nous ne pouvons ici réimprimer les lettres du T. VII. Voyez cependant un morceau qui s'y rattache dans l'Appendice I à la Pièce VIII. Ce qui mérite surtout d'être noté, c'est que, déjà en 1669, une solution du problème d'Alhazen amena Huygens à considérer avec attention la forme de l'équation du deuxième degré dans le cas où celle-ci correspond à une hyperbole. On voit dans le Manuscrit D que c'est cette considération qui l'a amené à écrire la Pièce IX dont nous avons déjà parlé plus haut.

Pièce XII. Conformément à ce que nous avons dit à propos des Pièces X et XI, cette Pièce de 1680 est intitulée: „Sur les *équations* solides”. Quoique Huygens débute par le problème „des 2 moyennes proportionnelles”, pour parler ensuite „de la perpendiculaire a une hyperbole d'un point donné”, il ne désigne le calcul conduisant à la construction géométrique de ces moyennes ou de cette perpendiculaire que comme „quelques exemples” de „cette methode”, c. à. d. de la méthode consistant, on le voit aussi dans l'Appendice ¹²⁴⁾, dans l'introduction d'une nouvelle variable à l'effet de

¹²¹⁾ T. II, p. 45.

¹²²⁾ T. VII, p. 89, 1 août 1671.

¹²³⁾ N°. 97 et 98, 6 octobre et 17 novembre 1673.

¹²⁴⁾ P. 334 et suiv.

substituer à l'équation donnée qu'il s'agit de résoudre un ensemble équivalent de *deux* équations plus maniables.

Or, ce long Appendice — que Huygens eût pu publier, paraît-il, dans le recueil „Divers ouvrages etc.” de 1693 ¹²⁵⁾ — fait voir en même temps que la nature „tamen usque recurrit” ¹²⁶⁾: c'est en fin de compte un géomètre plutôt qu'un amateur de l'algèbre qui a la parole.

Pièce XVIII. La dernière Pièce académique sur les coniques, datant également de 1680, est bien de nature géométrique, quoique dans la démonstration du théorème, ou plutôt dans la première des deux propositions faisant office de lemmes, il soit fait usage — Huygens (ou du moins celui qui a écrit ces pages du Registre) ne fait qu'*indiquer* la démonstration, mais elle se trouve dans le brouillon du Manuscrit E (voyez l'Appendice) — de certaine propriété d'une équation du quatrième degré („équation quarré quarrée”), de sorte que cette proposition „se demontre . . . par Algebre”. Cette proposition se rattache d'ailleurs à une proposition de van Schooten, également démontrée par algèbre (voyez l'Appendice). Plus tard Huygens réussit à trouver une preuve purement géométrique (même Appendice).

Nous avons signalé à propos de la Pièce VIII — et nous aurions pu le faire aussi à propos de la Pièce III sur les tangentes ¹²⁷⁾ — la concurrence de Huygens avec René de Sluse ¹²⁸⁾. A propos de la Pièce XII il faut signaler la même concurrence et aussi celle de Huygens avec Philippe de la Hire. Cette dernière concurrence apparaît encore bien plus clairement dans le cas de la Pièce XIII. Les solutions de Slusius du problème déliaque ont fait une grande impression sur Huygens. On peut consulter là-dessus la note 2 de la p. 334. Quant à de la Hire, nous avons mentionné plus haut à propos de la Pièce XI de 1678-1679 qu'il discourut sur le même sujet que Huygens peu de temps après lui. Dans l'Appendice de 1682 de la Pièce XII de 1680 Huygens nous

¹²⁵⁾ Voyez sur cet Appendice les quatre dernières lignes de la p. 284 du T. VIII et les l. 3—6 de la p. 97 du T. IX (lettre à de la Hire du 26 septembre 1686).

¹²⁶⁾ Naturam expellas furca, tamen usque recurret. (Horace, Epist. lib. 1, ep. X, 24).

¹²⁷⁾ Voyez sur ce sujet, outre le recueil cité dans la note suivante, la note 1 de la p. 243 qui suit.

¹²⁸⁾ On peut consulter le livre dont nous avons déjà parlé brièvement à la p. III de notre T. I, savoir la „Correspondance de René-François de Sluse publiée pour la première fois et précédée d'une Introduction” par M. C. le Paige, Rome, Impr. d. sc. math. et phys., 1885.

apprend (en le désignant par les mots „gallus quidam geometra”) que de la Hire s'occupait vers le même temps que lui (il s'agit d'un livre de de la Hire de 1679) du problème déliaque (ou plutôt plus généralement de l'équation du troisième degré). Enfin la Pièce XIII, également de 1680, est immédiatement suivie dans les Registres par un discours de de la Hire sur le même sujet, savoir les coniques à axes parallèles ou perpendiculaires se coupant en quatre points¹²⁹). On peut voir dans notre T. VIII que de la Hire prétendit même dans la séance où parla Huygens d'avoir traité avant lui dans l'Académie du sujet de sa communication ce qui toutefois ne fut pas confirmé par les Registres¹³⁰).

Devenu membre de l'Académie en 1678 de la Hire y déployait une grande activité. On peut consulter la liste — d'ailleurs incomplète — de ses ouvrages dans l'„Histoire de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à son renouvellement en 1699”¹³¹). Nous avons cité jadis ses „Nouveaux élémens” de 1679, auxquels nous faisons allusion dans l'alinéa précédent¹³²), lesquels se rattachent aux „Elementa” de 1659 de J. de Witt¹³³). Il s'était occupé de coniques déjà depuis longtemps — comparez sa biographie dans le T. VIII¹³⁴) — et devait publier en 1685 in folio ses „Sectiones conicæ in novem libros distributæ”¹³⁵). C'est aussi, et peut-être surtout, à Desargues qu'il se rattache, lui et son maître le peintre et graveur Abr. Bosse. Notons que Huygens connaissait Bosse — et Desargues¹³⁶) — personnellement, et probablement aussi leur grand livre d'architecture et de perspective¹³⁷), longtemps

¹²⁹) Dans ce discours (ou plutôt dans cette pièce, car nous ignorons s'il y eut une communication orale) de la Hire ne se sert pas d'équations en x et y ; comparez les notes 135 et 138 qui suivent.

¹³⁰) T. VIII, p. 284.

¹³¹) Publiée en 1733.

¹³²) T. VIII, p. 283: „Nouveaux Elemens des Sections Coniques. Les Lieux Géométriques. La Construction ou Efficction des équations”.

¹³³) „Elementa curvarum linearum”, ouvrage cité à la p. 217 qui précède. De la Hire mentionne dans sa Préface cet ouvrage de de Witt, auteur „qui est estimé avec justice le plus excellent de tous ceux qui ont pris ce mesme chemin”.

¹³⁴) T. VIII, p. 282, note 1.

¹³⁵) Cet ouvrage se rattache à celui de 1673 (fin de la note 138 qui suit). Il n'y est pas question d'„équations” (note 132): c'est plutôt de la géométrie synthétique que de la géométrie analytique.

¹³⁶) Huygens ne rencontra Desargues, semble-t-il, qu'une seule fois. Voyez sur cette rencontre la p. 188 qui précède.

¹³⁷) D'après la p. 114 du T. VII, Huygens acheta en 1671 à Paris pour son frère Constantyn un grand livre de perspective qui peut fort bien avoir été la „Manière universelle de Desargues, pour pratiquer la perspective par petit pied, comme le géométral, par M. Bosse, Paris, 1648”.

avant d'avoir rencontré de la Hire¹³⁸⁾. Les mérites de de la Hire en ce qui concerne l'étude systématique des coniques sont évidemment supérieurs à ceux de Huygens¹³⁹⁾. Huygens, il est vrai, n'avait pas l'ambition — voyez la page citée dans la note 137 — de composer sur la perspective ou les coniques „de si grands livres” de nature didactique. Quant aux relations personnelles des deux savants, en 1683, donc après le départ de Huygens de Paris, de la Hire, opposé en général aux candidatures à l'Académie

¹³⁸⁾ De la Hire n'est mentionné dans la Correspondance qu'à partir de 1680. Quant à Bosse, la lettre de Mylon de 1659 (T. I, p. 334) fait voir que Huygens avait déjà fait sa connaissance avant cette année, donc probablement lors de son séjour à Paris en 1655. La p. 4 du T. II fait voir que van Schooten le connaissait également. Dans son *Journal de Voyage* de 1660—1661 — nous ne faisons pas mention d'autres endroits — Huygens parle de plusieurs entretiens avec Bosse, et une fois d'une conversation sur un sujet de mathématique: il écrit le 4 janvier 1661: chez Bosse, problème en l'ovale (ovale est le nom que Desargues donne à l'ellipse).

Notons que c'est grâce à une copie de 1679 (retrouvée en 1845) par de la Hire de l'oeuvre principale de Desargues, son „Brouillon projet d'une atteinte aux événemens de rencontres du Cone avec un plan”, que cette oeuvre a été conservée. Dans l'„Avant-propos” de son ouvrage de 1673, la „Nouvelle methode en geometrie pour les sections des superficies coniques, et cylindriques, qui ont pour bases des cercles, ou des paraboles, des ellipses, & des hyperboles”, de la Hire cite le „Brouillon projet” de Desargues „qui n'a point esté mis en sa perfection”. Outre Desargues il mentionne Apollonios (première ligne de l'„Avant-propos”) et, vers la fin, Grégoire de S. Vincent. Comparez sur l'ouvrage de 1673 la note 135 qui précède. De la Hire ne dédaigne point, comme Desargues, la forme classique. Cependant, même dans son ouvrage de 1679 qui se rattache à celui de de Witt, il désigne, en disciple de Desargues, les coordonnées d'un point par les mots „tige” et „rameau”. Nous avons remarqué dans le *Manuserit H*, à la p. 103, un endroit où, fort exceptionnellement, Huygens, en 1692, donc longtemps après avoir quitté Paris, désigne les coordonnées par les mots „tige” et „branche”.

¹³⁹⁾ Le lecteur hollandais peut consulter sur de la Hire et Desargues l'étude „Desargues” de H. de Vries (dans ses „Historische studiën”, Noordhoff, Groningen—Batavia, 1934). Il faut observer qu'il n'est pas tout-à-fait exact de dire avec M. de Vries que Desargues entra en 1650 pour tout du bon dans sa ville natale de Lyon, puisque Huygens le vit à Paris en 1661, un an avant sa mort.

Nous saisissons cette occasion pour remarquer (comparez la première ligne de la p. 4 du T. XIV) que, si Huygens a rencontré Desargues à Paris en 1661, il n'y a au contraire pas vu Fermat, comme le dit la note 3 de la p. 177 du T. III. Ceci a été signalé par P. Tannery comme une impossibilité — comme étant en contradiction avec le n° 824, lettre de Fermat à Huygens de décembre 1660, quelque peu postérieure à la date de la prétendue rencontre — peu après l'apparition du T. III (1890): dans sa lettre du 30 avril 1891 à Moritz Cantor („Mémoires Scientifiques”, T. XIII, 1934, p. 340) Tannery dit que les éditeurs ont dû faire une erreur de lecture dans le déchiffrement du „Reys-verhæl”; et en effet, à l'endroit du *Journal de Voyage* indiqué dans la note 3 nommée, on ne trouve pas le nom Fermat mais le nom Thevenot. Loin de l'avoir beaucoup fréquenté comme l'auteur de la note incriminée l'assure, Huygens n'a jamais rencontré Fermat († 1665).

de savants étrangers, fait preuve d'une certaine animosité contre Huygens ¹⁴⁰); mais ceci ne fut qu'un incident; Huygens resta en correspondance avec lui jusqu'à la fin de sa vie et dans la Préface de son *Traité de la Lumière* de 1690 il parle du célèbre Monsieur de la Hire.

¹⁴⁰) Voyez les p. 463—464 du T. VIII, faisant partie d'une lettre du 30 août 1683 de von Tschirnhaus à Huygens. Ce passage est aussi cité par H.L. Brugmans à la p. 95 de son livre de 1935: „Le séjour de Chr. Huygens à Paris et ses relations avec les milieux scientifiques français suivi de son Journal de Voyage à Paris et à Londres”.

HUYGENS À L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

COMMUNICATIONS SUR DES SUJETS DE MATHÉMATIQUE.

- I. RÈGLE POUR TROUVER LES LOGARITHMES (1666 ou 1667).
- II. DEMONSTRATIO REGULÆ DE MAXIMIS ET MINIMIS (1667).
- III. REGULA AD INVENIENDAS TANGENTES LINEARUM CURVARUM (1667).
- IV. DE CURVIS PARABOLOIDIBUS ET HYPERBOLOIDIBUS (1667).
- V. EXAMEN DU LIVRE DE WALLIS „ARITHMETICA INFINITORUM” DE 1655 (1667).
- VI. INSUFFISANCE DE LA DÉMONSTRATION DE GREGORY DE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE (1668).
- VII. SUR LA QUADRATURE ARITHMÉTIQUE DE L'HYPERBOLE PAR MERCATOR ET SUR LA MÉTHODE QUI EN RÉSULTE POUR CALCULER LES LOGARITHMES (1668).
- VIII. PROBLEMA ALHASANI (1669. 1670?).
- IX. CONSTRUCTIO LOCI AD HYPERBOLAM PER ASYMPTOTOS (1670?).
- X. SUR LES LIEUX PLANS D'APOLLONIOS (1678).
- XI. RECTIFICATION ET QUADRATURE DE L'ÉPICYCLOÏDE (1678—1679).
- XII. SUR LES ÉQUATIONS SOLIDES (1680).
- XIII. THÉORÈME SUR LES POINTS D'INTERSECTION DES CONIQUES DONT LES AXES SONT PARALLÈLES OU À ANGLES DROITS (1680).

Voyez aussi la fin de la note 4 de la p. 335 qui suit.

I.

REGLE POUR TROUVER LES LOGARITHMES ¹⁾.

[1666 ou 1667]

Registres de l'Académie Royale des Sciences, T. II ²⁾, p. 40—42.

(Voyez sur une rédaction antérieure de cette règle, datant apparemment de 1661, comme celle du Manuscrit B mentionnée dans la note 1, l'Appendice II à la p. 295 qui suit).

Le calcul suivant cette règle est beaucoup plus court que par celle dont on s'est servi jusques icy, et pour faire voir la différence il faut seulement remarquer que pour trouver par exemple le Logarithme de 2 jusques a 10. chiffres vrais, il falloit extraire environ quarante fois la racine quarrée d'un nombre de 64. chiffres, la ou par la présente règle pour avoir le même Logarithme, il ne faut qu'extraire 6. fois la racine quarrée d'un nombre de 28. chiffres, et faire ensuite trois divisions, et une multiplication.

La Règle est celle cy.

Il faut avoir une fois pour tout les racines quarrées du nombre 10. extraites consecutivement jusques a la dixiesme, et chaque racine de 14. chiffres, si ³⁾ l'on desire avoir les Logarithmes jusq'a 10. caracteres veritables, ou jusque la septieme ou 8^e.

¹⁾ Voyez sur cette Règle les p. 431—434 du T. XIV. La Pièce correspondante du Manuscrit C (p. 110—111) — que nous avons déjà mentionnée dans la note 1 de la p. 452 du T. XIV — porte la date du 2 novembre 1666 [2 Nov. 1666. Ex libro B. Le Fundamentum regulæ nostræ ad inveniendos logarithmos du Manuscrit B (p. 17—19) date déjà d'août 1661. Voyez la p. 451 du T. XIV]. Les quelques différences entre cette Pièce et celle des Registres sont absolument insignifiantes (voyez cependant la note 7 de la p. 227). Huygens l'a sans doute copiée, et ce doit être une copie de sa copie qui a été insérée dans les Registres. D'après la place qu'elle occupe dans les Registres cette dernière copie doit dater du commencement de 1667 (ou peut-être de la fin de 1666).

²⁾ Voyez sur le T. II, intitulé „Registres de Mathematiques de l'année 1667 et d'une partie de l'année 1668 jusqu'au mois d'Auril,” les l. 4—5 de la p. 180 du T. XIX.

³⁾ Le copiste avait écrit à tort „et si”. Le texte du Manuscrit C est correct.

racine, et davantage (et quand et quand ⁴⁾) de plus de chiffres si l'on les veut encore plus précisément): et de ces racines l'on n'a qu'à considérer les deux dernières. Ainsy

La racine 5^e. extraite de 10 ⁵⁾ est 10746078283213. qui soit appelée *a* [nous remplaçons les quelques majuscules du texte des Registres par des minuscules; Huygens — ou bien plutôt le copiste; voyez les notes 1 et 3 — se fert indifféremment des deux].

La racine 6^e. ⁶⁾ est 10366329284377. qui soit *b*.

L'unité 1000000000000. qui soit *d*, c'est à dire étant multipliée par 1 ⁽¹³⁾, comme le font aussi les dites racines pour faire en aller les fractions.

Maintenant il faut trouver un nombre égal à $\frac{200da}{3d+3a+4b} + 40b - 3a - 3d$, lequel nombre est icy 559661035184532. On le multipliera par *a* — *d* dont le produit sera 4175509443116778 &c, dont il fera assés de prendre ces premiers caracteres; et il faut noter que ce nombre une fois trouué servira ensuite au calcul de tous les Logarithmes.

Soit proposé de trouver le Logarithme de 2. Il faut avoir semblablement la 5^e et 6^e racine extraite de 2. en 14. chiffres, comme auparavant du nombre 10.

La 5^e. racine de 2. est 10218971486541. qui soit dite *f*.

La 6^e. racine de 2. est 10108892860517. qui soit dite *g*.

Et l'unité comme devant 1000000000000. soit *d*.

Il faut après trouver un nombre égal à $\frac{200df}{3d+3f+4g} + 40g - 3f - 3d$, lequel nombre est icy 545869542830178. On le multipliera par *a* — $\frac{ad}{f}$, et le produit sera 12569535892606. &c.

Maintenant comme le nombre dessus trouué 41755&c a cettuy cy 12569&c, ainsy fera le Logarithme de 10. à sçavoir 100000&c. au logarithme de 2. qui sera 0,30102999567; ou il y a 10. caracteres vrais, et l'unziesme qui surpasse le vray de l'unité. L'on sçait qu'il faut mettre un zero pour caractéristique à cause que le nombre 2. est au dessous de 10.

Or pour trouver le Logarithme d'un nombre au dessus de 10, il faut tant de fois extraire continuellement la racine quarrée, que la dernière extraite soit moindre que

⁴⁾ Manuscrit C: quant et quant.

⁵⁾ C. à. d. $1 \sqrt[32]{10}$.

⁶⁾ C. à. d. $1 \sqrt[64]{10}$.

la racine fixiesme extraite de 10. c'est a dire aux nombres depuis 10. iusqua 100. il faudra extraire 7. fois. Depuis 100. iusqua 10000. huit fois. Depuis 10000 à 100000000 neuf fois. Et en se servant des deux racines dernieres, et les appelant *f* et *g* et operant comme dessus, l'on aura le Logarithme de la racine qui est la 7^e en comptant de la dernière en arriere, et cela aussi precisement que nous auons trouué le Logarithme de 2. c'est a dire iusqua 10. caracteres vrais. Doubtant apres ce logarithme trouué l'on aura celui du nombre proposé, si l'on n'a fait que 7. extractions ou doublant encore une fois, si l'on a fait 8. extractions, et encore une fois si l'on en a fait 9^e.

Registres, T. I⁸), p. 246. le 26 Octobre 1667 ... Mr. Auzout prendra la peine de disposer le trauail de Messieurs Auoye⁹), Richer, et Niquet pour faire des Logarithmes¹⁰).



7) La Pièce du Manuscrit C — voyez la note 1 de la p. 225 — ajoute: Par exemple, pour trouver le logarithme du nombre premier 7859 il faut avoir la 7^e et 8^e racine de ce nombre, qui soient nommees *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *s*, *f*, *g*, et le logarithme que l'on trouvera fera celui de la racine *o*, qui est la 7^e en commençant par la dernière *g*. Et doublant ce logarithme on aura celui de la racine *n*. Et doublant encore ce dernier logarithme on aura celui du nombre proposé 7859.

8) Voyez l'endroit du T. XIX cité dans la note 2 de la p. 225. Le „T. I.” est intitulé „Registre de physique 1667 et une partie de 1668”. Sur le dos on lit en outre „1666, 1667. 1668”.

9) Faut-il lire „de la Voye” (voyez sur lui le T. XVIII)? Dans la brochure de 1938 de M. Harcourt Brown „l'Académie de physique de Caen (1666—1675) d'après les lettres d'André de Graindorge” (Caen, Le Tendre) nous trouvons à la p. 21 le passage suivant d'une lettre de Graindorge du 7 mai 1668: „Notre assemblée physique a été différée à aujourd'hui ... A la dernière, où assistèrent Mr. Vogel [c. à. d. Martin Fogel, médecin d'Hambourg] et autres Allemands avec Mr. Avoye, nous éprouvâmes, etc.” M. Brown nous écrit ne pas savoir qui était ce Mr. Avoye.

10) Il paraît donc qu'à l'Académie on a calculé des logarithmes suivant la méthode de Huygens.

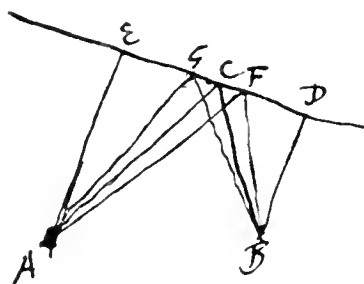
DÉMONSTRATION DE LA RÈGLE DES MAXIMA ET DES MINIMA.

[1667]¹⁾.

Fermat est le premier homme que je sache qui ait établi une règle certaine pour déterminer les valeurs maximales et minimales dans les questions géométriques. En recherchant le fondement qu'il n'a pas communiqué, j'ai trouvé en même temps de quelle manière cette règle peut être réduite à une brièveté remarquable, de sorte qu'elle s'accorde désormais avec celle donnée plus tard par l'honorable Joh. Hudde comme une partie de sa règle plus générale et fort élégante qui s'appuie sur un tout autre principe. Cette dernière a été publiée par Fr. van Schooten dans le recueil qui contient aussi les livres de Descartes sur la Géométrie. Or, ma méthode d'examiner la règle de Fermat était la suivante.

Toutes les fois que dans un problème quelconque il s'agit de déterminer un maximum ou un minimum, il est certain qu'il existe des valeurs égales de part et d'autre.

[Fig. 7]



Par exemple lorsque la droite ED [Fig. 7] est donnée en position ainsi que les points A et B, et qu'on demande de trouver dans ED un point C tel qu'en tirant CA et CB on obtienne une valeur minimale de $CA^2 + CB^2$, il est nécessaire que de part et d'autre du point C il se trouve des points G et F tels que, les droites GA, GB et FA, FB ayant été tirées, on ait $GA^2 + GB^2 = FA^2 + FB^2 > CA^2 + CB^2$.

Pour trouver C de telle manière que $CA^2 + CB^2 = \text{minimum}$, je me figure d'abord que, AE et BD ayant été menées perpendiculairement à ED

(je pose $AE = a$, $BD = b$, $ED = c$), la différence des deux droites EG et EF soit égale à une ligne donnée e ; et je demande quelle doit être la valeur de EG, que j'appelle x , pour qu'on ait $GA^2 + GB^2 = FA^2 + FB^2$.

II.

DEMONSTRATIO REGULÆ DE MAXIMIS ET MINIMIS.

[1667]¹⁾.

Registres, T. II, p. 162. Le 27 Avril [1667]... Mercredy prochain Mons^r. Huygens continuera sa Methode de Maximis et minimis.

Registres, T. II, p. 113—123:

Quoties Maximum aut Minimum in problemate aliquo determinandum proponitur, certum est utrinque æqualitatis casum existere: ut si data sit [Fig. 7] positione recta ED & puncta A, B, oporteatque invenire in ED punctum C, unde ductis CA, CB, quadrata earum simul sumpta, sint minima quæ esse possint; necesse est ab utraque parte puncti C esse puncta G et F a quibus ducendo rectas GA, GB; FA, FB, oriatur summa quadratorum GA, GB æqualis summæ quadratorum FA, FB, et utraque summa major quadratis CA, CB, simul sumptis. Ut igitur inueniam punctum C, unde ductis CA, CB fiat summa quadratorum ab ipsis omnium minima, ductis AE, BD, perpendicularibus in ED, quarum AE dicatur a , BD, b , intervallum vero ED, c , fingo primum GF differentiam duarum EG, EF æqualem datæ lineæ, quæ vocetur e , et quæro quanta futura sit EG, quam appello x , ut quadrata GA, GB simul sumpta æquentur quadratis FA, FB.

¹⁾ Outre la copie insérée dans les Registres, nous possédons le manuscrit original de Huygens („Chartæ mathematicæ” f. 213—217). Celui-ci est d’ailleurs précédé par le premier projet, portant le même titre, qui occupe les p. 162—168 du Manuscrit C (les p. 152 et 170 de ce Manuscrit portent respectivement les dates du 17 mars et du 12 mai 1667). La Pièce a été publiée en 1693 dans les „Divers Ouvrages de Mathématique et de Physique par Messieurs de l’Académie Royale des Sciences”. Sur la première page du manuscrit Huygens a noté au crayon: parler de Hudde. Et en effet dans la publication de 1693 un premier alinéa a été ajouté qui ne se trouve ni dans le manuscrit ni dans les Registres. Ici aussi nous le mettons en tête de notre traduction française de la „Demonstratio”. Voici cet alinéa:

Ad investiganda Maxima & Minima in Geometricis quæstionibus, regulam certam primus, quod sciam, Fermatius adhibuit: cujus originem ab ipso non traditam cum exquirerem, inveni simul quo pacto ea ipsa regula ad mirabilem brevitatem perduci posset, utque inde eadem illa existeret quam postea vir amplissimus Joh. Huddenius dederat, tanquam partem regulæ suæ generalioris atque elegantissimæ, quæ ab alio

Puisque $AE = a$ et $EG = x$, on aura $AG = a^2 + x^2$. Et puisque $GD = c - x$ et $BD = b$, on aura $GB^2 = b^2 + c^2 - 2cx + x^2$, de sorte que $AG^2 + GB^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2$, expression que nous désignerons par les mots „termes antérieurs”. Ceci s'applique également à tout autre problème se rapportant à un maximum ou un minimum. D'autre part, lorsqu'on substitue partout dans l'équation trouvée $x + e$ à x , $(x + e)^2$ à x^2 et ainsi de suite s'il s'y trouve quelque puissance plus élevée de x , il est certain qu'on obtiendra la somme $FA^2 + FB^2$. Celle-ci fera donc

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2cx - 2ce + 2x^2 + 4ex + 2ee.$$

Cette expression sera appelée „termes postérieurs”. Il faut l'égaliser à $AG^2 + GB^2$. Nous aurons donc l'équation $a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2cx - 2ce + 2x^2 + 4ex + 2ee$, d'où sortira la valeur EG ou x , GF ou e désignant une ligne de longueur donnée.

Or, en prenant e infiniment petite la même équation donnera la valeur de EG lorsqu'elle est égale à EF . De cette façon nous aurons déterminé le point cherché C pour lequel $CA^2 + CB^2 = \text{minimum}$. Après avoir ôté d'abord les fractions s'il y en a (mais dans l'exemple considéré il n'y en a point), il faut supprimer de part et d'autre les termes égaux, lesquels sont nécessairement tous ceux qui ne contiennent pas la lettre e : on le comprend aisément puisque, comme nous l'avons dit, les termes posté-

prorsus principio pendet. Hæc à Fr. Schotenio edita est unà cum Cartesianis de Geometria libris. Fermatianæ autem regulæ examen quod institui est hujusmodi.

Comparez sur les règles de Hudde la note 4 de la p. 233 qui suit.

Nous imprimons ici le texte des Registres. Les très rares différences entre les trois textes que nous possédons sont absolument insignifiantes. Celui de la publication de 1693 a été réimprimé dans les „Opera Varia” de 1724. Comparez la note 7 de la p. 241.

Itaque quia $AE \propto a$ et $AG \propto x$, erit quad. $AG \propto aa + xx$. Et quia $GD \propto c - x$ et $BD \propto b$, erit quad. $GB \propto bb + cc - 2cx + xx$, unde quadrata AG , GB simul sumpta fient $\propto aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, qui dicantur termini priores; idque similiter in quovis alio problemate intelligendum, ubi maximum aut minimum inquiritur. Rursus autem quia $EF \propto x + e$, si ubique in summa quadratorum inuenta substitutam $x + e$ pro x , et quadratum ab $x + e$ pro xx , atque ita deinceps, si altior potestas ipsius x reperiatur, certum est exorituram summam quadratorum FA , FB quæ quidem erit $aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ec$ æquanda summæ quadratorum, AG , GB ; dicantur autem hi termini posteriores.

Itaque erit $aa + bb + cc - 2cx + 2xx \propto aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ec$ ex qua æquatione prodibit valor EG siue x , quando GF siue e certæ magnitudinis lineam refert.

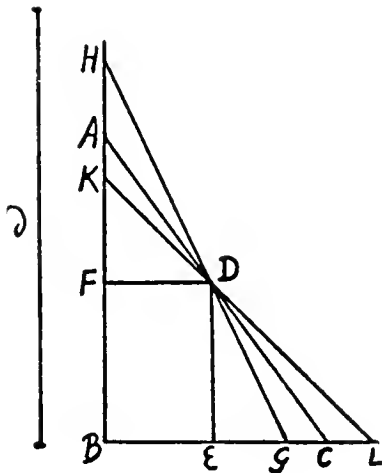
Ponendo autem e infinite parvam ²⁾ apparebit ex eadem æquatione quanta futura sit EG cum ipsi EF æqualis est adeoque habebitur determinatio quæ sita puncti C unde ductæ CA , CB faciant summam quadratorum minimam, nempe sublatis primum fractionibus (si quæ sint) quæ in hoc exemplo nullæ sunt, delentur termini qui utrinque iidem habentur, quales sunt necessario omnes quibus littera e admixta non est, idque

²⁾ Dans le premier projet du Manuscrit C (voyez la note 1 de la p. 229) Huygens avait écrit: infinite parvam siue nihilo æqualem.

Nous n'indiquons les variantes du premier projet que là où elles ont quelque importance. La copie que Huygens en a faite n'est pas tout à fait littérale.

Le premier projet, où il y a beaucoup de ratures, commençait primitivement par la considération d'un autre cas: comparez avec la présente Fig. 8 la Fig. 2 de 1652 à la p. 62 du T. XII, où Huygens traitait la même question. Voici le commencement de ce début biffé:

[Fig. 8]



Certum est cum maximum vel minimum in problemate quopiam determinandum est, utrinque æqualitatis casum existere. Velut, si intra angulum rectum ABC [Fig. 8] dato puncto D , oporteat per illud ducere rectam lineam AC rectis BA , BC terminatam quæ sit omnium brevissima, necesse est utrinque constitui posse rectas HG , KL inter se æquales majoresque ipsa AC .

Ad inveniendum itaque maximum, vel (ut in hoc exemplo) minimum, ita primo instituenda est operatio, tanquam non maximum aut minimum, sed dato æquale quæretur.

Ita hic investigabo quomodo per datum punctum D ducenda sit HG ut data lineæ d æquetur.

rieurs se tirent des termes antérieurs en substituant $x + e$ à x dans toutes les puissances de cette dernière. Ensuite on divise tous les termes par e et on détruit ceux qui, après cette division, contiennent encore cette lettre, puisqu'ils représentent des quantités infiniment petites par rapport à ceux qui ne renferment plus e . C'est de ces derniers seuls qu'on tire enfin la quantité x satisfaisant au problème proposé. Telle est la méthode de Fermat; en l'abrégeant, j'ai trouvé la méthode suivante composée de deux parties.

1°. Lorsque les termes dont nous supposons qu'ils doivent posséder un maximum ou un minimum, ne comprennent aucune fraction contenant dans son dénominateur la quantité inconnue cherchée, il faut multiplier chaque terme par le nombre des dimensions que la quantité inconnue a dans ce terme, en négligeant les termes qui ne la contiennent point; et la somme de tous ces produits doit être égale à zéro.

Dans l'exemple proposé, où les termes antérieurs étaient $a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2$, somme de deux carrés ⁴⁶¹) que je veux rendre minimale, il suffit donc d'effectuer la multiplication suivante

$$\begin{array}{r} a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 1 \qquad 2 \end{array}$$

d'où résultent les termes dont la somme doit être égale à zéro

$$-2cx + 4x^2 = 0, \text{ et par conséquent } \frac{1}{2}c = x.$$

De même, lorsque les termes antérieurs sont

$$3ax^3 - bx^3 - \frac{2b^2a^2x}{3c} + a^2b,$$

la multiplication fera la suivante

$$\begin{array}{r} 3 \qquad 3 \qquad 1 \\ 3ax^3 - bx^3 - \frac{2b^2a^2x}{3c} + a^2b \end{array}$$

d'où résultent les termes égaux à zéro $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2b^2a^2x}{3c} = 0$

$$\begin{array}{r} 9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2b^2a^2x}{3c} = 0. \end{array}$$

Pour comprendre la raison de ce procédé abrégé, il faut remarquer en premier lieu que, puisque les termes postérieurs se tirent des termes antérieurs en substituant partout $x + e$ à x , tous les termes antérieurs se retrouvent nécessairement parmi les

facile est intelligere, cum dixerimus posteriores terminos, ex prioribus describi, ponendo $x + e$ ³⁾ vel potestatem ejus, quories invenitur x vel potestas ejus aliqua in prioribus. Deinde omnes termini per e dividuntur, quibusque post eam divisionem adhuc unum e aut plura inesse inveniuntur, ii delentur, quippe cum quantitates infinite parvas contineant, respectu cæterorum terminorum quibus nullum amplius inest e . Ex quibus denique solis inveniuntur quantitas x quæ sita in casu determinationis proposito; et hæc est ratio methodi Fermatianæ, quæ in compendium redacta, hanc aliam inueni, cuius partes duæ sunt ⁴⁾. nam primo

Quando termini quos Maximum aut Minimum designare volumus, nullam fractionem habent, in cuius denominatore quantitas incognita quæ sita continetur; multiplicandus est terminus quisque per numerum dimensionum quem in illo habet quantitas incognita, omisiss terminis ijs in quibus incognita quantitas non reperitur; omniaque producta illa æquanda nihilo.

Ita in exemplo proposito ubi termini priores inuenti sunt $aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, summam quadratorum duorum ^{4bis)} continentes, quam volo esse minimam, tantummodo istius modi constituenda erit multiplicatio $aa + bb + cc - 2cx + 2xx$

Ex qua orientur termini æquandi nihilo $- 2cx + 4xx \propto 0$

Unde fit $\frac{1}{2}c \propto x$.

Ita quoque si priores termini sint $3ax^3 - bx^3 - 2bba^2x + aab$
multiplicatio erit ejusmodi $\frac{3^c}{3^c}$

Unde termini æquandi nihilo $\frac{3}{9ax^3} - \frac{3}{3bx^3} - \frac{1}{2bba^2x} \propto 0$
 $\frac{3^c}{9axx - 3bxx - 2bba^2} \propto 0$.

Hujus compendii ratio ut intelligatur, sciendum primo, quoniam termini posteriores ex prioribus describuntur, ponendo tantum ubique $x + e$ pro x , necessario omnes

³⁾ Ici les mots „in posterioribus” du premier projet — qui d’ailleurs seraient mieux placés après les trois mots suivants du texte — ont été omis, peut-être par mégarde, dans la copie de Huygens.

⁴⁾ Dans le premier projet du Manuscrit C Huygens avait écrit après le mot „redacta”: eadem duæ regulæ oriuntur quas Huddenius habet, in epistola 2^{da} ad Schotenium, quasque antequam illa ederetur pridem inveneram demonstratasque dederam D. de Wit. Sunt autem regulæ istæ. . . . Etc.

Dans sa copie Huygens a changé l’ordre de ce qui suivait dans le Manuscrit C en donnant d’abord l’application de la règle (pars prima) dans le cas de l’exemple proposé et seulement ensuite la „compendii ratio”.

^{4bis)} Savoir les carrés des droites AG et GB [Fig. 7].

termes postérieurs, de sorte qu'il est inutile de les écrire attendu qu'il faudrait immédiatement les supprimer, et que par conséquent il suffit d'écrire ceux qui contiennent e une ou plusieurs fois, comme dans le cas de notre exemple — $2ce + 4ex + 5e^2$, et d'égaliser leur somme à zéro. Mais il appert en outre que les termes contenant e plus d'une seule fois seront eux aussi écrits inutilement, puisqu'il a été établi qu'après la division par e ils devront être supprimés, comme nous l'avons dit un peu plus haut. Il faut donc dès le début écrire comme termes postérieurs ceux-là seulement qui contiennent e une seule fois.

Or, ces termes-là se déduisent facilement des termes antérieurs puisqu'il paraît que ce sont les deuxièmes termes des puissances de $x + e$, tous les autres termes de ces puissances contenant e ou plus d'une fois ou pas du tout. De sorte que partout où l'on trouve x dans les termes antérieurs il faut écrire $x + e$ dans les termes postérieurs, et où il y a x^2 dans les antérieurs, $2ex$ dans les postérieurs; où il y a x^3 , $3ex^2$, etc. Mais lesdits deuxièmes termes de chaque puissance de $x + e$ se tirent facilement de la puissance correspondante de x : il suffit de changer une lettre x en e et de mettre devant chaque terme le nombre des dimensions de x , de sorte que x^2 ou xx devient $2ex$ et x^3 se change en $3ex^2$ etc. Par conséquent on tire aisément les termes postérieurs dont nous avons dit que la somme doit être égalée à zéro des termes antérieurs contenant x (les seuls qu'il faille considérer, comme nous l'avons fait voir) en multipliant chacun d'eux par le nombre des dimensions de x . Car il n'est pas même nécessaire de changer une lettre x en e puisqu'il revient au même de diviser ensuite par e ou par x . Par ces considérations la raison de la méthode abrégée de la première partie de la règle est devenue évidente. Passons maintenant à la deuxième qui est la suivante⁶).

2°. Lorsque les termes dont nous voulons établir la valeur maximale ou minimale comprennent des fractions, dans le dénominateur desquelles se trouve la quantité inconnue, il faut d'abord supprimer les quantités connues, s'il y en a; ensuite, si les autres quantités n'ont pas le même dénominateur, il faut les y réduire. Après cela il faut multiplier chacun des termes qui constituent le numérateur de la fraction par chaque terme du dénominateur et multiplier chaque produit ainsi obtenu par la différence des dimensions de la quantité inconnue telle qu'elle se trouve respectivement dans le terme du numérateur et dans celui du dénominateur, en donnant à chaque produit le signe exigé par la règle de la multiplication lorsque le nombre des dimensions de la quantité inconnue dans le terme du numérateur surpasse celui du terme du dénominateur, et le signe contraire lorsqu'il en est autrement; enfin il faut égaliser à zéro la somme de tous les termes obtenus.

terminos priores etiam in posterioribus reperiri, ideoque illos nihil opus esse describi cum utrobique mox delendi forent, atque adeò illos tantum scribendos in quibus unum e vel plura insunt, ut in exemplo nostro — $2ce + 4ex + 2ee$, eosque æquandos nihilo. Sed etiam illos quibus plura quam unum e inerunt, scribi frustra apparet, cum divisione facta per e delendos postea constet, ut paulo ante diximus. Itaque nulli præterea ab initio describendi inter terminos posteriores, quam quibus inerit e simplex.

Ili autem termini ex terminis prioribus facile deducuntur cum constet, nihil aliud esse quam secundos terminos potestatum ab $x + e$ quia cæteri omnes plura quam unum e , vel nullum habent. Adeo ut ubicumque in prioribus terminis habetur x scribendum sit in posterioribus $x + e$ ⁵⁾ et ubi habetur xx in prioribus, ponendum $2ex$ in posterioribus, et ubi x^3 in prioribus, in posterioribus $3exx$ atque ita deinceps. Dicti autem termini secundi cujusque potestatis $x + e$ ex ipsa potestate x facile describuntur, mutando unum x in e , et præponendo numerum dimensionum ipsius x ; ita enim ab xx fit $2ex$ et ab x^3 , $3exx$, atque in cæteris pari modo. Itaque ex terminis prioribus in quibus x , quos solos considerandos esse patuit, facile etiam termini posteriores ii quos nihilo adæquandos diximus, describuntur, multiplicando tantum singulos in numerum dimensionum quas in ipsis habet x . Nam mutare unum x in e ne quidum opus est, cum eodem redeat, siue omnes postea per e aut per x dividantur. Ex his quidem aperta est ratio compendii ad primam partem regulæ pertinentis. nunc ad aliam veniamus quæ est eiusmodi ⁶⁾.

Si terminis quos Maximum aut Minimum designare volumus fractiones habeant, in quarum denominatore occurrat quantitas incognita, delendæ primum sunt quantitates cognitæ, si quæ adsint; deinde si reliquæ quantitates non habeant eundem denominatorem, eo reducendæ sunt. Tum termini singuli numeratorem fractionis constituentibus ducendi in terminos singulos denominatoris, productaque singula multiplicanda secundum numerum quo dimensiones quantitatis incognitæ in termino numeratoris differunt a dimensionibus ejusdem incognitæ quantitatis in termino denominatoris. Signa autem affectionis productis singulis præponenda qualia lex multiplicationis exigit, quoties dimensiones quantitatis incognitæ plures sunt in termino numeratoris, quam in termino denominatoris, at quoties contra evenit contraria quoque signa productis præponenda, quæ denique omnia æquanda nihilo.

⁵⁾ Il faut lire e au lieu de $x + e$. L'erreur se trouve tant dans le premier projet que dans le manuscrit et les publications de 1693 et de 1724.

⁶⁾ Contrairement à l'intervention dont il est question dans la note 4 de la p. 233, Huygens commence, dans le cas de la „pars alia” de la règle, par exposer la théorie, et l'applique ensuite à un exemple; tandis que dans le premier projet il commençait par l'exemple. Il est évident que ceci a amené ici aussi de grands changements dans le texte.

Supposons par exemple qu'on ait trouvé comme termes antérieurs que nous voulons faire acquérir une valeur maximale les suivants

$$\frac{bx^3 - c^2x^2 - 2bc^2x}{bc^2 + x^3},$$

où il n'y a pas de quantité connue. Suivant la règle je multiplie tous les termes du numérateur d'abord par bc^2 , et du premier produit obtenu, celui de bx^3 par bc^2 , je prends le triple parce que bx^3 a trois dimensions de la quantité inconnue x tandis que bc^2 n'en a aucune; du deuxième produit, celui de $-c^2x^2$ par bc^2 , j'écris le double puisque dans $-c^2x^2$ il y a deux dimensions de x et aucune dans bc^2 ; quant au troisième produit, celui de $-2bc^2x$ par bc^2 , je l'écris simplement puisque dans $-2bc^2x$ et bc^2 la différence des dimensions de x est l'unité. Et je donne à ces trois produits leurs vrais signes puisque les dimensions de x dans les termes du numérateur surpassent celles du terme bc^2 qui sont nulles. De sorte que ces trois produits sont

$$3b^2c^2x^3 - 2bc^4x^2 - 2b^2c^4x.$$

Ensuite je multiplie tous les mêmes termes du numérateur par x^3 , second terme du dénominateur. Or, je néglige le premier produit, celui de bx^3 par x^3 , en d'autres termes je le multiplie par zéro, parce que les dimensions de x sont les mêmes de part et d'autre et que leur différence est donc nulle. Quant au deuxième produit de $-c^2x^2$ par x^3 , je l'écris simplement parce que pour ces termes-là la différence des dimensions de x est l'unité; et j'écris doublement le troisième produit, celui de $-2bc^2x$ par x^3 , puisque la différence des dimensions de x y est 2. Je donne à ces deux derniers produits des signes contraires à ceux qu'exigerait la loi de la multiplication parce que dans les deux cas les dimensions de x sont moindres dans les termes du numérateur que celles de x^3 , terme du dénominateur.

Les deux produits seront donc $+c^2x^5 + 4bc^2x^4$. En les ajoutant aux trois précédents $+ 3b^2c^2x^3 - 2bc^4x^2 - 2b^2c^4x$ on obtient la somme qu'il faut égaler à zéro :

$$c^2x^5 + 4bc^2x^4 + 3b^2c^2x^3 - 2bc^4x^2 - 2b^2c^4x = 0.$$

Divisant cette équation par $c^2bx + c^2x^2$ on trouve $x^3 + 3bx^2 - 2bc^2 = 0$.

Ici aussi nous expliquerons à l'aide d'un seul exemple comment la règle a été obtenue: on comprendra qu'il en est de même dans tous les autres cas. Considérons donc les termes antérieurs proposés tantôt, savoir $\frac{bx^3 - c^2x^2 - 2bc^2x}{bc^2 + x^3}$. Si j'en veux tirer,

comme cela a été fait précédemment, en substituant $x + e$ à x , d'autres termes auxquels je pourrai les comparer, je constate d'abord que parmi les termes postérieurs l'on peut négliger ceux qui contiennent plus d'une seule lettre e parce qu'il en résultera toujours des quantités contenant elles aussi plus d'une seule e et devant par conséquent être finalement supprimées pour la raison exposée plus haut. L'égalité des termes antérieurs et postérieurs sera donc exprimée par l'équation suivante:

$$\frac{bx^3 - c^2x^2 - 2bc^2x}{bc^2 + x^3} = \frac{bx^3 - c^2x^2 - 2bc^2x + 3bex^2 - 2c^2ex - 2bc^2e}{bc^2 + 3ex^2 + x^3}.$$

Sint exempli gratia inventi termini priores quos maximum designare velimus isti $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$ ubi nulla est quantitas cognita. Hic ergo secundum regulam multiplico terminos omnes numeratoris primum per bcc , priorisque producti ex bx^3 in bcc seribo triplum, quia bx^3 habet tres dimensiones quantitatis incognitæ x , bcc vero nullam, secundi producti ex $-ccxx$ in bcc , seribo duplum, propterea quod in $-ccxx$ duæ sunt dimensiones x et in bcc nullæ; tertium vero productum ex $-2bccx$ in bcc , seribo simplex quia in $-2bccx$ et bcc differentia dimensionum x est unitas. Tribus autem hisce productis vera signa affectionis adseribo, quoniam dimensiones x in terminis numeratoris excedunt eas quæ in termino bcc , quippe quæ nullæ sunt, ita ut tria hæc producta sint

$$3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x.$$

Iam porro terminos omnes eisdem numeratoris duco in x^3 terminum alterum denominatoris primumque productum ex bx^3 in x^3 scribere omitto, siue per 0 multiplico, quoniam eadem dimensiones utrobique sunt ipsius x , ideoque differentia nulla. Secundum autem productum ex $-ccxx$ in x^3 seribo simplex, quia in his terminis differentia dimensionum x est unitas; at tertium productum ex $-2bccx$ in x^3 seribo duplum quia differentia dimensionum x in his est 2. Signa vero affectionis productis hisce duobus adseribo contraria ijs quæ requireret lex multiplicationis, eo quod dimensiones x pauciores sunt utrobique in terminis numeratoris quam in x^3 termino denominatoris.

Itaque producta bina erunt hæc $+ccx^5 + 4bccx^4$, quæ addita tribus præcedentibus $+ 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x$ faciunt summam æquandam nihilo

$ccx^5 + 4bccx^4 + 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x \propto 0$
qua æquatione divisa per $ccbx + ccxx$ fit $x^3 + 3bx^2 - 2bcc \propto 0$.

Quomodo autem ad hæc perventum sit, uno exemplo rursus explicabimus, ex quo eandem in omnibus cæteris rationem esse intelligetur. Videamus igitur priores terminos

quos modo proposueram, nempe $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$ ex quibus si alios quibus-

cum eos comparem, ut initio factum est, describere velim, ponendo ubique $x + e$ ubi est x , video quidem primo omnes illos in posterioribus terminis posse negligi in quibus plura quam unum e inerit, quia semper ex ijs quantitates orientur, in quibus plura uno e inerunt, quæque proinde delendæ tandem erunt, ob causam in superioribus traditam. Itaque erunt termini priores æquandi posterioribus

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} \propto \frac{bx^3 - ccxx - 2bccx + 3bexx - 2ccex - 2bcce}{bcc + 3exx + x^3}$$

qui nempe ex prioribus hac lege descripti sunt, ut ubicunque est x vel potestas eius in prioribus ibi ponatur $x + e$, vel potestatis $x + e$ duo priores termini; quoniam scimus in cæteris plura quam unum e contineri.

Les termes postérieurs y sont tirés des termes antérieurs en substituant partout à x ou ses puissances $x + e$ ou les deux premiers termes des puissances de $x + e$, puisque nous savons que dans les termes ultérieurs il y a plus d'une seule lettre e .

Or, comme les termes sans e dans les numérateurs des termes antérieurs et postérieurs sont absolument les mêmes, il appert que de part et d'autre les multiplications des termes sans e des dénominateurs avec les termes sans e des numérateurs peuvent être omises, parce qu'il en résulterait de part et d'autre des quantités égales qui se détruiraient. C'est pourquoi il suffisait d'écrire dès le commencement comme termes postérieurs ceux-là seulement qui contiennent une seule lettre e en négligeant tous les autres; de sorte que l'équation devient

$$\frac{bx^3 - c^2x^2 - 2bc^2x}{bc^2 + x^3} = \frac{3bex^2 - 2c^2ex - 2bc^2e}{3ex^2}.$$

Maintenant il faudrait donc faire les multiplications croisées pour se débarrasser des fractions. Mais en examinant avec quelque attention quels seront les résultats de ces multiplications, nous trouverons encore un nouvel abrègement: nous découvrirons qu'il n'est point du tout nécessaire d'écrire les termes postérieurs. En effet, comme ils découlent des termes antérieurs par le changement d'une lettre x en e et l'addition d'un facteur égal au nombre des dimensions de x , il n'est pas difficile de conclure des termes antérieurs seulement quels seront tous ces produits.

Par exemple la présence de $-c^2x^2$ dans les termes antérieurs donnant lieu à celle de $-2c^2ex$ dans les termes postérieurs, et celle de x^3 dans le premier dénominateur à celle de $4ex^2$ dans le second, on voit aisément que les deux produits, celui de $-c^2x^2$ par $3ex^2$, et celui de $-2c^2ex$ par x^3 , qui sont $-3c^2ex^4$ et $-2c^2ex^4$, seront composés des mêmes lettres, mais que les facteurs 3 et 2 seront différents, et que cette dernière différence résulte du fait que x dans le terme c^2x^2 a une dimension de moins que dans le terme x^3 . Supprimant ensuite $-2c^2ex^4$ dans les deux membres de l'équation, il appert qu'il restera $-c^2ex^4$ du côté des termes antérieurs. C'est ce qu'on peut donc obtenir de suite en multipliant simplement dans les termes antérieurs le $-c^2x^2$ du numérateur avec le x^3 du dénominateur, en changeant dans le produit une lettre x en e , et en écrivant le produit simplement puisque dans ces deux termes la différence des dimensions de x est l'unité.

De la même manière les produits de $-2bc^2x$ par $3ex^2$ et de $-2bc^2e$ par x^3 , lesquels ont les mêmes lettres, étant $-6bc^2ex^3$ et $-2bc^2ex^3$, auront des facteurs numériques différents parce que dans $-2bc^2x$ il n'y a qu'une seule dimension de x , tandis qu'il y en a trois dans x^3 ; soustrayant $-2bc^2ex^3$ de part et d'autre de l'équation, je constate qu'il reste $-4bc^2ex^3$ du côté des termes antérieurs, ce qui pouvait de nouveau être aperçu dès le début puisque la même quantité provient de la multiplication du terme $-2bc^2x$ du premier numérateur par le terme x^3 du dénominateur lorsque dans le produit on remplace une lettre x par e et qu'on y ajoute le facteur 2 qui exprime la différence des dimensions de x dans les termes $-2bc^2x$ et x^3 .

Mais comme dans les termes bx^3 et x^3 la dimension de x est la même, il s'ensuit que

Iam vero porro quia termini in quibus nullum e in numeratore ac denominatore priorum ac posteriorum terminorum ijdem plane reperiuntur, patet multiplicationes alternas eorum terminorum denominatoris in terminos numeratoris partis alterius e earentes omitti posse, cum quantitates inde ortæ, eadem utrinque essent futuræ, ideoque delendæ. Quare in terminis posterioribus tantum ij ab initio scribendi erant, in quibus unum e , omillis omnibus reliquis; ut æquatio hic futura sit ista

$$\frac{bx^3 - ccx - 2bccx}{bcc + x^3} \propto \frac{3bexx - 2ccx - 2bce}{3exx}.$$

Hic jam multiplicationes alternæ per denominatores instituendæ essent ad tollendas fractiones, verum examinando diligentius quænam futura sint earum multiplicationum producta, aliud adhuc compendium inueniemus, et nec scribendos quidem omnino esse terminos posteriores; quia enim describuntur ex prioribus mutato x in e , præpositoque numero dimensionum ipsius x , non difficile est colligere ex folis terminis prioribus quænam futura sint omnia ista producta.

Ita quoniam propter $-ccx$ in prioribus habetur $-2ccx$ in posterioribus, et propter x^3 in denominatore priorum, in posteriorum denominatore est $3exx$, facile perspicitur utraque producta ex $-ccx$ in $3exx$ et ex $-2ccx$ in x^3 quæ sunt $-3ccex^4$ et $-2ccex^4$, easdem literas habitura, sed diversos numeros præpositos 3 & 2; idque inde fieri quod in termino ccx unam dimensionem minus habeat x quam in termino x^3 . Itaque et auferendo postea ex utraque parte æquationis $-2ccex^4$, apparet superfuturum $-ccex^4$ a parte terminorum priorum. Quare ab initio hoc sciri potest, multiplicando tantum in terminis prioribus $-ccx$ numeratoris in x^3 denominatoris, unumque x in e mutando, ac productum simplex scribendo quia differentia dimensionum x in istis duobus terminis est unitas.

Eadem ratione producta ex $-2bccx$ in $3exx$ et ex $-2bce$ in x^3 quæ easdem litteras habent, sunt enim $-6bccex^3$ et $-2bccex^3$, habebunt numeros præpositos diversos, propterea quod in $-2bccx$ una tantum est dimensio x , at in x^3 tres, unde ablato ex utraque parte æquationis $-2bccex^3$, scio superfuturum a parte terminorum priorum $-4bccex^3$, quod rursus ab initio cognosci potuit quia eadem quantitas oritur multiplicando $-2bccx$ numeratoris terminorum priorum in x^3 denominatoris, mutandoque unum x in e et productum multiplicando per 2 quæ est differentia dimensionum x in terminis $-2bccx$ et x^3 .

At quoniam in bx^3 et in x^3 eadem est dimensio x , sequetur producta ex bx^3 in $3exx$ et ex $3bexx$ in x^3 tum literas easdem, tum eosdem numeros præpositos habitura, ideoque sese mutuo sublatura, ut proinde multiplicatio illa possit omitti.

Atque eiusmodi animadversionibus inuentum quod in regula præcipitur, terminos singulos numeratoris in singulos denominatoris terminos esse ducendos, productaque quælibet multipla sumenda secundum differentiam dimensionum quantitatis incognitæ, in terminis binis, qui in se mutuo ducuntur. Nam quod non præcipitur unum x in e mutandum, id hanc rationem habet, quod non referat utrum postea per e an per x termini dividantur.

les produits de bx^3 par $3ex^2$ et de $3bex^2$ par x^3 auront non seulement les mêmes lettres, mais aussi les mêmes facteurs numériques et que par conséquent ils se détruiront, de sorte que cette multiplication peut être omise.

C'est par des remarques de cette sorte qu'a été trouvé ce qui est prescrit dans la règle, savoir que les différents termes du numérateur doivent être multipliés par ceux du dénominateur, et que chaque produit doit être multiplié par un facteur résultant de la différence des dimensions de l'inconnue dans les deux termes qui forment le produit. Il n'y est pas dit qu'il faut changer une lettre x en e ; en effet, il n'importe que la division qui doit suivre soit faite par e ou bien par x .

Quant au précepte suivant lequel il faut donner à chaque produit le vrai signe toutes les fois que les dimensions de x dans le numérateur sont supérieures en quantité à celles de x dans le dénominateur, ceci aussi pourra être compris d'après ce que nous avons dit; et par conséquent aussi qu'il faut donner les signes contraires lorsque le contraire est vrai pour les nombres des dimensions. Ici par exemple le produit de bx^3 par bc^2 doit être écrit avec le signe $-$ et le facteur 3, de sorte qu'il vient $-3b^2c^2x^3$; en effet, à cause de bx^3 nous savons que nous aurons $3bex^2$ dans les termes postérieurs, ce qui multiplié par bc^2 fera $+3b^2c^2ex^2$, mais transporté dans la partie antérieure de l'équation, ceci deviendra $-3b^2c^2ex^2$, ou bien, si l'on ne change pas x en e , $-3b^2c^2x^3$ ⁹⁾.

Enfin, l'exemple suivant fera voir que la règle enseigne à bon droit que toutes les fois qu'il y a des termes connus parmi les termes antérieurs avant leur réduction à un dénominateur commun, il faut commencer par les supprimer ⁹⁾. Supposons qu'on ait trouvé les termes antérieurs suivants devant avoir une valeur maximale ou minimale

$$\frac{x^3}{2a - x} = 2cx + x^2 + v^2,$$

où v^2 désigne une quantité connue. Pour qu'il apparaisse que v^2 doit être supprimé, voyons ce qui se passera si l'on ne supprime point ce terme, auquel cas, pour le réduire au dénominateur commun, il faudra le multiplier par $2a - x$, de sorte qu'il viendra $\frac{2av^2 - xv^2}{2a - x}$ dans les termes antérieurs. Pour lesquels il faudra, suivant l'explication

donnée plus haut, écrire dans les termes postérieurs $\frac{-ev^2}{-e}$; par conséquent dans la multiplication croisée il faudra multiplier $2a - x$ par $-ev^2$ d'un côté, et de l'autre $-e$ par $2av^2 - xv^2$; or, les mêmes termes résulteront nécessairement des deux multiplications, puisque des deux côtés on multiplie continuellement les mêmes facteurs $2a - x$, $-e$, et v^2 . Ces termes se détruiraient donc et seraient par conséquent écrits inutilement: il en résulte qu'on peut en toute sécurité supprimer directement la quantité v^2 . Et, en examinant diligemment la chose, on apercevra clairement qu'il doit en être de même dans tous les autres cas.

Quod vero signa \pm affectionis vera productis singulis praeposenda dicuntur quoties dimensiones x plures sunt in numeratore quam in denominatore; id quoque ex jam dictis intelligitur; uti consequenter etiam hoc, quod contraria signa sunt apponenda quoties dimensionum numerus contra se habet. Velut hic productum ex bx^3 in bcc scribendum est cum signo $-$ proposito numero 3 ut fiat $-3bbccx^3$ ⁸⁾, quia nempe propter bx^3 scimus in posterioribus terminis fore $3bccxx$, quod ductum in bcc faciet $+3bbcccx^3$ sed translatus in partem priorem aequationis fiet $-3bbcccx^3$, siue, non mutato x in e , $-3bbccx^3$ ⁸⁾.

Quod denique in Regula habetur, quoties in prioribus terminis priusquam ad eundem denominatorem reducantur, quantitates cognitae occurrunt, eas primum omnium delendas; id ex sequenti exemplo intelligitur recte praecipi ⁹⁾. Sint enim reperti termini priores, quos maximum aut minimum designare oporteat, isti $\frac{x^3}{2a-x} - 2cx + xx + vv$, ubi vv quantitatem cognitam significet. Id igitur delendum esse ut appareat, videamus quid futurum sit, si non deleatur, nempe ut ad eundem denominatorem cum ceteris omnibus reducat, ducendum vv in $2a-x$, fietque inde $\frac{2avv - xvv}{2a-x}$ in terminis prioribus. Propter quos in terminis posterioribus, secundum superius explicata, scribetur $\frac{-evv}{-e}$ adeoque multiplicatione, alternatim utrinque per denominatores instituta, ducendum erit hinc $2a-x$ in $-evv$, inde $-e$ in $2avv - xvv$, ex quibus multiplicationibus eisdem utrinque terminos oriri necesse est, cum utrobique eadem haec tria in se mutuo ducantur $2a-x$ in $-e$ in vv , qui proinde termini sese mutuo sublaturi essent, eoque frustra scriberentur; ac proinde liquet tuto deleri posse ab initio quantitatem vv . Idemque quod in hoc exemplo accidit, necessario quoque in quibuslibet alijs contingere diligenter intuenti manifestum erit.

7) La publication de 1693 (voyez le note 1 de la p. 229) a par erreur: „Quod vero si signa . . .” La même faute d'impression se trouve dans les „Opera Varia” où, comme nous l'avons dit plusieurs fois (voyez p.e. la p. II du T. I), il n'est tenu aucun compte des manuscrits (ni, ajoutons-nous, des Registres de l'Académie).

8) Suivant la règle générale de la page 235 qui suppose qu'on égale à zéro la somme de tous les termes trouvés, il faudrait au contraire écrire $+3bbccx^3$, les „dimensiones x in numeratore” étant „plures . . . quam in denominatore”, et le „signum verum” (première ligne du présent alinéa) étant $+$. Mais dans le présent alinéa Huygens suppose tacitement qu'une partie des termes soit égale à une autre partie.

Il semble avoir remarqué plus tard cette incongruité puisque dans le premier projet il a corrigé le mot „plures” du présent alinéa en „pauciores”; mais en adoptant cette leçon il faudrait aussi changer le texte de la règle de la page 235.

9) N'eût-il pas été plus simple d'établir directement à l'aide d'une figure que lorsque la fonction considérée de x , pour employer ce terme, a une valeur maximale ou minimale, il en est nécessairement de même pour une autre fonction dont la différence avec la première est constante?

RÈGLE POUR TROUVER LES TANGENTES DES LIGNES COURBES.

1667.

Le même Fermat cherchait les tangentes aux lignes courbes par une règle à lui, dont Descartes soupçonnait qu'il ne comprenait pas suffisamment lui-même les fondements, comme cela appert par les lettres de Descartes sur ce sujet. Il est vrai que dans les oeuvres posthumes de Fermat l'application de la règle n'est pas bien exposée et que toute démonstration y fait défaut. Or, je trouve que dans les lettres mentionnées Descartes montre avoir plus ou moins compris la raison de cette règle, mais qu'il ne l'explique pourtant pas aussi clairement que cela sera fait dans ce que nous proposerons ici; il s'agit d'ailleurs ici d'un écrit que nous avons composé longtemps avant que les lettres de Descartes aient été rendues publiques.

En ce temps abréger la règle de Fermat était pour moi une chose importante. L'ayant rendue aussi brève que je pouvais, je constatai qu'elle devient identique avec les belles règles de Hudde et de Sluse dont ces deux messieurs m'avaient fait part presque simultanément. J'ignore encore s'ils y sont parvenus de la même manière que moi ou bien d'une autre.

III.

REGULA AD INVENIENDAS TANGENTES LINEARUM CURVARUM.

1667 ¹⁾.

Registres, T. II, p. 161 : Ce 13 d'Auril [1667] Mr. Hugens a presenté a la Compagnie une regle pour trouuer les tangentes des lignes courbes.

La Pièce elle-même occupe, avec la Pièce IV qui suit, les p. 123—142 du T. II des Registres.

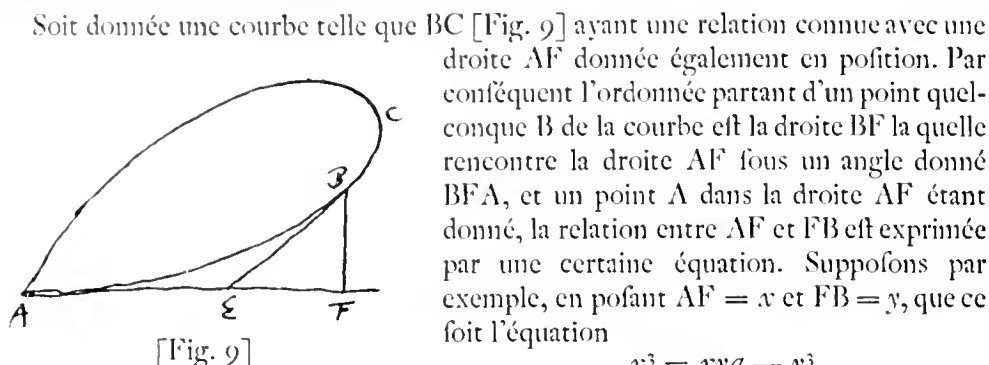
Nous observons — voyez le premier alinéa qui suit, ou bien le premier alinéa de la p. — qu'il n'est nullement besoin de supposer que l'angle des coordonnées (ou, si l'on veut, celui des axes) soit un angle *droit*.

Sit data linea curva ut BC [Fig. 9] quæ relationem habeat ²⁾ ad rectam aliquam positione datam AF, ac proinde applicata è puncto qualibet curvæ, ut B, recta BF in dato angulo BFA; datoque in recta puncto A; certa æquatione relatio quæ est inter AF et FB expressa habeatur. Exempli gratia appellando AF, x , FB, y , sit æquatio $x^3 \propto xy a - y^3$ ubi a lineam quandam significare censenda est.

¹⁾ De même que dans le cas de la Pièce précédente (note 1 de la p. 225) nous imprimons ici le texte des Registres, quoique nous possédions également le manuscrit original de Huygens lequel porte la date 13 Apr. 1667 („Chartæ mathematicæ”, f. 121—124). Comme la Pièce précédente la présente Pièce aussi a été publiée en 1693 à Paris dans les „Divers Ouvrages”. Sur la première page du manuscrit Huygens a noté au crayon: parler de Fermat, de Hudde et Slusius. Et en effet, dans la publication de 1693 — et par conséquent aussi dans les „Opera Varia” de 1724 — on trouve au début les deux alinéas suivants (que nous mettons en tête de notre traduction française):

Idem Fermatius linearum curvarum Tangentes regulâ sibi peculiari inquirebat, quam Cartesius suspicabatur non satis ipsum intelligere quo fundamento niteretur, ut ex epistolis ejus hac de re apparet. Sanè in Fermatii operibus post mortem editis, nec bene expositus est regulæ usus, nec demonstrationem ullam adjectam habet. Cartesium verò in his quas dixi literis, rationem ejus aliquatenus affectum invenio, nec tamen tam perspicuè eam explicuisse quàm per hæc quæ nunc trademus fiet, quæ jam olim, multò ante istas literas vulgatas conscripsimus.

Præcipuum verò operæ pretium tunc fuit compendiosa hujusce regulæ contractio, quam, quoad potui, prosecutus, tandem in ipsas illas insignes Huddenii, Slusique regulas desinere inveni, quas mihi Viri hi Clarissimi uterque fere eodem tempore exhibuerant: an vero hac eadem viâ an aliâ in illas inciderint nondum mihi compertum.



[Fig. 9]

Soit donnée une courbe telle que BC [Fig. 9] ayant une relation connue avec une droite AF donnée également en position. Par conséquent l'ordonnée partant d'un point quelconque B de la courbe est la droite BF la quelle rencontre la droite AF sous un angle donné BFA, et un point A dans la droite AF étant donné, la relation entre AF et FB est exprimée par une certaine équation. Supposons par exemple, en posant $AF = x$ et $FB = y$, que ce soit l'équation

$$x^3 = axy - y^3$$

où a désigne une certaine longueur.

S'il faut mener au point B une tangente BE qui rencontre la droite AF en E et qu'on pose $FE = z$, la longueur de cette dernière d'après cette règle — la règle de Fermat abrégée — sera tirée uniquement de l'équation donnée.

Transportons tous les termes de l'équation donnée dans le premier membre qui devient donc alors égal à zéro. Multiplions d'abord chacun des termes dans lesquels se trouve y par le nombre des dimensions que cette lettre a dans le terme considéré: leur somme sera notre numérateur. Multiplions ensuite de la même manière chaque terme contenant x par le nombre des dimensions de cette dernière et divisons chacun de ces termes par x : la somme obtenue sera notre dénominateur. En formant la fraction de ce dénominateur avec le numérateur trouvé plus haut nous aurons la quantité égale à z ou FE. Quant aux signes + et —, il faut les garder partout comme ils sont. Même si par hasard la quantité du dénominateur ou du numérateur, ou l'une aussi bien que l'autre, est négative, il faut pourtant les considérer comme si elles étaient positives, en observant seulement que lorsque l'une des deux est positive et l'autre négative, FE doit être prise vers le point A; mais qu'elle doit être prise en sens contraire lorsque les deux quantités sont ou bien positives ou bien négatives.

Dans le cas de la courbe proposée dont l'équation est $x^3 + y^3 - axy = 0$ le numérateur deviendra d'après cette règle $3y^3 - axy$ et le dénominateur $3x^2 - ay$. Partant $z = \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - ay}$. C'est une longueur connue, x , y et a étant données.

Considérons de même une autre courbe ABH [Fig. 10] à équation

$$ax^2 - x^3 - q^2y = 0,$$

a et q étant des lignes données, tandis que $AF = x$ et $FB = y$. Soit BE la tangente et appelons FE z comme auparavant.

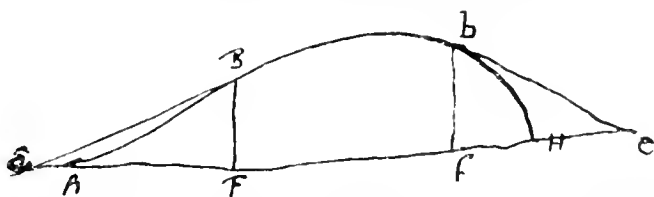
Le numérateur deviendra ici $-q^2y$ suivant la règle. Et le dénominateur $2ax - 3x^2$.

Quod si jam ad punctum B tangens ducenda sit BE, quae occurrat rectae AF in E voceturque FE, z , ejus longitudo per hanc regulam ³⁾ inuenietur ex sola aequatione data.

Translatis omnibus terminis aequationis datae ad unam aequationis partem, qui proinde aequales sunt nihilo ⁴⁾; multiplicentur primo termini singuli in quibus reperitur y , per numerum dimensionum quas in ipsis habet y , atque ea erit quantitas dividenda. Deinde similiter termini singuli in quibus x , multiplicentur per numerum dimensionum quas in ipsis habet x , et è singulis una x tollatur; atque hæc quantitas pro divifore erit, subscribenda quantitati dividendæ jam inuentæ, quo facto habebitur quantitas æqualis z siue FE. Signa autem $+$ & $-$ eadem ubique retinenda sunt, atque etiam si forte quantitas diviforis, vel dividendæ, vel utraque minor nihilo siue negata sit, tamen tanquam affirmatæ sunt considerandæ: hoc tantum observando, ut cum altera affirmata est, altera negata, tunc FE sumatur versus punctum A; cum vero utraque vel affirmata est, vel negata, ut tunc sumatur FE in partem contrariam.

In curva proposita cuius æquatio $x^3 + y^3 - axy \propto 0$ fiet secundum hanc regulam dividenda quantitas $3y^3 - axy$; divifor vero $3xx - ay$ ideoque $z \propto \frac{3y^3 - axy}{3xx - ay}$ quæ est longitudo cognita, cum dentur x , y et a .

Esto item alia curva ABH [Fig. 10], cujus æquatio $axx - x^3 - qgy \propto 0$ posito scilicet a et q esse lineas datas, AF vero $\propto x$, FB $\propto y$. Sit BE tangens et FE dicatur [Fig. 10]



ut ante z . Hic fiet, secundum regulam, dividenda quantitas $-qgy$. Divifor autem

Les différences entre les textes — nous ne mentionnons pas les différences minimales — ne sont pas toutes insignifiantes: Huygens a ajouté quelques bouts de phrases au texte de son manuscrit: voyez les notes suivantes.

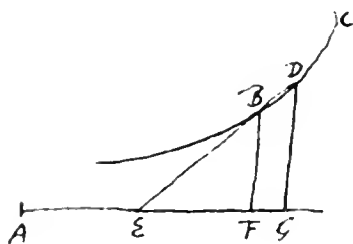
²⁾ Le manuscrit de Huygens a: quæ cognitam relationem habeat; il en est de même dans les publications de 1693 et de 1724.

³⁾ Le manuscrit de Huygens ajoute en marge: Fermatianæ regulæ compendiarium. On trouve ces mots aussi dans les publications de 1693 et de 1724 (qui écrivent cependant „compendiarium”).

⁴⁾ Le manuscrit de Huygens ajoute dans l'interligne: et neglectis ijs in quibus nec x nec y inest.

D'où $z = \frac{-q^2 y}{2ax - 3x^2}$. Or, comme le numérateur est négatif, il faudra, lorsqu'il en est de même du dénominateur, c.à.d. lorsque $2a < 3x$, prendre z ou FE du côté opposé à celui où se trouve A; mais lorsque $2a > 3x$, il faudra prendre FE du côté de A suivant le précepte de la règle.

Pour expliquer la raison en même temps que l'origine de la règle simplifiée par nous, considérons de nouveau une courbe BC [Fig. 11] à laquelle on demande de mener une tangente au point B.



[Fig. 11]

Prenons d'abord une droite EBD qui ne touche pas la courbe en B mais qui la coupe tant en ce point qu'en un autre D fort proche de B. Puissè cette sécante rencontrer la droite AG en E, et menons des deux points B, D à la droite AG les deux ordonnées inclinées sous le même angle BF et DG. Soit $AF = x$ et $FB = y$ comme auparavant.

Supposons en outre que FG soit une longueur donnée e et cherchons $FE = z$.

On a donc $EF : FB$, c.à.d. $z : y = EG$ (ou $z + e$) : GD , d'où $GD = y + \frac{ey}{z}$.

Il est évident que ceci est vrai pour une courbe quelconque.

Considérons maintenant l'équation exprimant la nature de la courbe; que ce soit par exemple celle proposée plus haut $x^3 + y^3 - axy = 0$, dans laquelle a désignait une longueur connue (AH). Or, il est évident que lorsque le point D est situé sur la courbe, les deux longueurs AG et GD, c.à.d. $x + e$ et $y + \frac{ey}{z}$, doivent avoir entr'elles la même relation que AF et FB, c.à.d. x et y . En d'autres termes, lorsque dans l'équation proposée on substitue partout $x + e$ à x et $y + \frac{ey}{z}$ à y , l'équation résultante aura de nouveau zéro dans le second membre. On aura donc

$$x^3 + \boxed{3ex^2} + 3e^2x + e^3 + y^3 + \boxed{\frac{3ey^3}{z}} + \frac{3e^2y^3}{z^2} + \frac{e^3y^3}{z^3} - axy - \boxed{aey} - \boxed{\frac{aeyx}{z}} - \frac{ae^2y}{z} = 0.$$

Il est certain que cette équation doit contenir les termes de l'équation précédente qui a servi à sa formation, savoir $x^3 + y^3 - axy$. Et comme l'ensemble de ces termes est nul d'après la propriété de la courbe, il est par conséquent nécessaire que, ces termes ayant été supprimés, le reste aussi soit égal à zéro. Or, il est manifeste que dans tous les termes qui sont restés on trouve une ou plusieurs lettres e , et que par conséquent ils peuvent tous être divisés par cette longueur; et je fais qu'il faut évaluer à zéro, en

$2ax - 3xx$, unde $z \propto \frac{-qqy}{2ax - 3xx}$, ubi cum dividenda quantitas sit negata, si fuerit etiam divisor minor nihilo, hoc est si $2a$ minor quam $3x$; erit z siue FE sumenda in partem ab A averſam, si vero $2a$ major quam $3x$ sumenda erit FE verſus A ex præcepto regulæ.

Horum vero rationem, ipſiusque regulæ ⁵⁾ originem ut explicemus, proponatur ut ante curvæ BC [Fig. 11] ad cuius punctum B tangens ducenda ſit.

Intelligatur primum recta EBD, quæ non tangat curvæ in B ſed eam ſecet, atque item in alio puncto D, ipſi B proximo. rectæ autem AG occurrat in E et ab utriſque punctis B, D, ducantur ad rectam AG, iſdem angulis inclinatæ, BF, DG, et ſit AF $\propto x$, FB $\propto y$ ſicut antea; ponatur etiam FG data eſſe quæ ſit e quæraturre FE $\propto z$.

Eſt itaque ſicut EF ad FB, hoc eſt ſicut z ad y ; ita EG, hoc eſt $z + e$ ad GD quæ erit $y + \frac{ey}{z}$, et hoc quidem in qualibet curvæ ita ſe habere manifeſtum eſt.

Nunc porro conſideretur æquatio naturæ curvæ continens, exempli gratia illa ſuperius propoſita $x^3 + y^3 - xya \propto 0$, ubi a rectam longitudine datam, velut AII ſignificabat. Et patet cum punctum D in curvæ ponatur debere eodem modo duas AG, GD, hoc eſt $x + e$ et $y + \frac{ey}{z}$ ad ſemutuo referri atque AF, FB, hoc eſt x et y . Nempe ſi in æquatione propoſita pro x ſubſtituatur ubique $x + e$ et pro y , ubique $y + \frac{ey}{z}$, debet æquatio hinc formata terminos omnes habere æquales nihilo, hoc eſt

$$x^3 + \boxed{3exx} + 3eex + e^3 + y^3 + \boxed{\frac{3ey^3}{z}} + \frac{3eey^3}{zz} + \frac{e^3y^3}{z^3} - axy - \boxed{aey} - \boxed{\frac{aeyx}{z}} - \frac{aee y}{z} \propto 0.$$

In hac autem æquatione conſtat neceſſario terminos prioris æquationis ex qua formata eſt contineri debere, nempe $x^3 + y^3 - axy$, qui cum ſint æquales nihilo ex proprietate curvæ, ideo hiſ in æquatione deletis, neceſſe eſt etiam reliquos æquari nihilo. In quibus ſingulis manifeſtum quoque eſt vel unum e vel plura reperiri; ideoque omnes per e dividi poſſe. qui autem poſt hanc diviſionem non amplius habebunt e , eos, neglectis reliquis, ſcio nihilo æquari debere, quantitatemque lineæ z ſiue FE oſtenſuros; ſi nempe BE tanquam tangens conſideretur, ideoque FG ſeu e infinite parva.

⁵⁾ Le Manuſcrit de Huygens intercale: et compendii quo reducta eſt. Ces mots ont été reproduits dans les publications de 1693 et 1724.

négligeant les autres, tous ceux qui, après cette division, ne contiendront plus e . L'équation ainsi obtenue donnera la droite z ou FE, bien entendu dans le cas où BE est considérée comme une tangente de sorte que FE ou e est infiniment petite. Car les termes dans lesquels e est restée représenteront alors des quantités infiniment petites ou entièrement évanouissantes.

Jusqu'ici nous avons expliqué l'origine et la raison de la règle de Fermat. Voyons maintenant de quelle manière elle a été amenée à une si grande concision.

Je constate que de la dernière équation écrite plus haut il suffit de conserver les termes qui contiennent e une seule fois. On a donc ici $3ex^2 + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = 0$.

Il s'agit d'expliquer comment ces termes se déduisent avec facilité de ceux de l'équation donnée $x^3 + y^3 - axy = 0$. Il apparaît d'abord que $3ex^2$ et $\frac{3ey^3}{z}$ ne sont rien d'autre

que les deuxièmes termes des cubes de $x + e$ et de $y + \frac{ey}{z}$ et qu'ils se trouvent ici parce que dans l'équation donnée il y avait x^3 et y^3 . Quant à tous les autres termes de ces cubes, de même que les termes correspondants d'autres puissances quelconques de $x + e$ et de $y + \frac{ey}{z}$, ils contiennent e soit plusieurs fois soit point du tout; comme

nous l'avons déjà dit, on les écrirait donc inutilement. Par conséquent, s'il y avait d'autres puissances de x et de y dans l'équation proposée, il faudrait écrire dans la seconde équation seulement les deuxièmes termes des mêmes puissances de $x + e$ et de $y + \frac{ey}{z}$, en remarquant que ces deuxièmes termes se déduisent des puissances données de x et de y d'après une méthode fixe, savoir, pour une puissance quelconque de x , en changeant une lettre x en e et en ajoutant un facteur numérique égal au nombre des dimensions de x . De cette façon on trouve ici $3ex^2$. D'autre part chaque puissance d' y doit être multipliée par $\frac{e}{z}$, le facteur numérique égal au nombre des di-

mentions y étant de plus ajouté. Ainsi notre terme y^3 donne $\frac{3y^3e}{z}$. La raison ressort immédiatement du mode de formation des puissances.

Il apparaît en outre facilement ce qu'il faut écrire dans la seconde équation à cause de la présence de xy dans le terme $-axy$ de l'équation donnée. En effet, comme il faut substituer à xy le produit de $x + e$ par $y + \frac{ey}{z}$ en écrivant seulement les termes qui contiennent e une seule fois, nous ne multiplions par y que le second des termes x et e , et par x seulement le second des termes y et $\frac{ey}{z}$. Nous obtiendrons ainsi $ey +$

Nam termini in quibus adhuc e superest etiam quantitates infinite parvas siue omnino evanescentes continebunt ⁶⁾.

Video itaque ex æquatione ⁷⁾ tantum eos terminos scribi necesse esse quibus inest e simplex, velut hic $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} \propto 0$, qui termini quomodo facili negotio ex datis æquationis terminis $x^3 + y^3 - axy \propto 0$ describi possint deinceps explicandum. Et primo quidem apparet $3exx + \frac{3ey^3}{z}$ nihil aliud esse quam secundos terminos cuborum ab $x + e$ et ab $y + \frac{ey}{z}$ ideo scriptos, quia in æquatione habentur cubi ab x et y , nam reliqui omnes termini cuborum, ut et quarumvis aliarum potestatum ab $x + e$ et ab $y + \frac{ey}{z}$, vel plura quam unum e habent, vel nullum; ideoque uti jam diximus frustra scriberentur. Eadem itaque ratione, si aliæ potestates ab x vel y essent in æquatione propositæ [lisez plutôt: propositæ ⁸⁾], scribendi forent in æquatione altera, termini secundi tantum similium potestatum ab $x + e$ et ab $y + \frac{ey}{z}$ notandumque secundos hosce terminos ex ipsis datis potestatibus ab x et y certa ratione confici, nempe ex potestate quavis x , velut x^3 , mutando unum x in e et præponendo numerum dimensionum ipsius x . Ita hic fit $3exx$. Ex potestate y vero ducendo eam in $\frac{e}{z}$ præponendoque similiter numerum dimensionum ipsius y . Ita hic ab y^3 fit $\frac{3y^3e}{z}$ quorum quidem rationem ex potestatum formatione intelligere facillimum.

Porro propter xy in termino æquationis $-axy$, facile quoque apparet quid in æquatione secunda scribendum sit. cum enim substituendum sit pro xy productum ab $x + e$ in $y + \frac{ey}{z}$, sed ea tantum scribenda in quibus unum e , ideo de duobus $x + e$ tantum e ducemus in y et tantum x in $\frac{ey}{z}$ adeoque fient $ey + \frac{exy}{z}$ quibus in a ductis, præpositoque signo $-$, quia habetur $-axy$, existet $-aey - \frac{aexy}{z}$ sicut supra.

⁶⁾ Le manuscrit de Huygens intercale: Et his quidem hætenus Fermatiana Regula origo ac ratio declaratur. Nunc porro ostendemus quo pacto eadem ad tantam brevitatem perducta sit. Cette phrase se trouve aussi (avec „quomodo” au lieu de „quo pacto”) dans les publications de 1693 et de 1724.

⁷⁾ Publications de 1693 et de 1724: æquatione tota novissima. Le manuscrit avait d'abord: æquatione tota; Huygens y ajouta après coup le mot novissima.

⁸⁾ Conformément au texte de l'écrit de Huygens de 1663 pour J. de Witt (l. 15 de la p. 316 du T. IV).

$\frac{exy}{z}$ et en les multipliant par $-a$, puisqu'il y avait $-axy$, il viendra $-aey - \frac{aexy}{z}$ comme ci-dessus.

De la même manière, si y avait x^2y^3 dans l'équation proposée, je prendrais à cause de x^2 les deux premiers termes du carré de $x + e$, savoir $x^2 + 2ex$; et à cause de y^3 les deux premiers termes du cube de $y + \frac{ey}{z}$, savoir $y^3 + \frac{3ey^3}{z}$; leur produit doit être substitué à x^2y^3 . Mais ici aussi il suffit de multiplier seulement le premier des deux termes x^2 et $2ex$ par $\frac{3ey^3}{z}$, et le deuxième seulement par y^3 , car les autres produits partiels contiendraient e plusieurs fois ou pas du tout. Il vient donc $\frac{3ex^2y^3}{z} + 2exy^3$.

Il appert par ces considérations que l'un et l'autre des deux termes requis peut toujours être déduit du terme donné, qui est ici x^2y^3 ; savoir l'un en changeant une lettre x en e et en y ajoutant comme facteur numérique le nombre des dimensions de x ; c'est ainsi en effet qu'on trouve $2exy^3$; l'autre en multipliant le terme donné par $\frac{e}{z}$ et en y ajoutant de même comme facteur le nombre des dimensions de y ; c'est

ainsi qu'on obtient le terme $\frac{3ex^2y^3}{z}$. Or, comme il a été montré un peu plus haut que les termes de la seconde équation proviennent des deuxième termes des puissances de $x + e$ et de $y + \frac{ey}{z}$ correspondant aux puissances de x et de y dans l'équation donnée, il est à présent manifeste que les différents termes de l'équation donnée contenant x ou une de ses puissances, donnent lieu dans la seconde équation à un nombre égal de termes ne contenant pas z , tandis que les différents termes contenant y ou une de ses puissances engendrent de la manière susdite un nombre égal de termes fractionnaires ayant z pour dénominateur, sans que cette lettre apparaisse ailleurs.

Ceci étant connu, c.à.d. sachant comment de l'équation quelconque proposée, comme ici $x^3 + y^3 - axy = 0$, on en tire une autre, comme ici $3ex^2 + \frac{3ey^3}{z} - aey$

$-\frac{aexy}{z} = 0$, j'observe ensuite que lorsque les termes ayant z pour dénominateur sont transportés dans l'autre membre et que tous les termes sont multipliés par z , et qu'on divise ensuite par la somme des termes qui primitivement ne contenaient pas cette lettre, on trouve la quantité z toute seule d'un côté de l'équation. De cette

façon on obtient ici $z = \frac{-3ey^3 + aexy}{3ex^2 - aey}$. J'en conclus que pour calculer la quantité z il suffit d'écrire les termes de la seconde équation qui proviennent de ceux des termes de la première qui contiennent y , en supprimant le dénominateur z et en invertissant les signes $+$ et $-$, et de diviser ensuite ces termes par ceux provenant des

Sic quoque si in æquatione proposita haberetur xy^3 sumerem propter xx duos priores terminos quadrati ab $x + e$, nempe $xx + 2ex$; et propter y^3 duos priores terminos cubi ab $y + \frac{ey}{z}$ nempe $y^3 + \frac{3ey^3}{z}$ quorum productum pro xy^3 surrogandum. sed etiam hic de duobus $xx + 2ex$ tantum xx ducendum in $\frac{3ey^3}{z}$ tantumque $2ex$ in y^3 (nam cætera vel plura quam unum e vel nullum habent) adeo ut fiat $\frac{3exxy^3}{z} + 2exy^3$.

Atque ex his animadvertere licet, semper utrumque eorum terminorum describi posse ex dato termino, qui hic xy^3 , alterum quidem mutato uno x in e et præponendo numerum dimensionum ipsius x : ita enim fit $2exy^3$; alterum vero ducendo datum terminum in $\frac{e}{z}$, præponendoque similiter numerum dimensionum ipsius y ; ita enim fit $\frac{3exxy^2}{z}$. cumque hac eadem immutatione, paulo ante etiam secundos terminos potestatum ab $x + e$ et ab $y + \frac{ey}{z}$ ex potestatibus x et y æquationis datæ describi ostensum sit, manifestum jam est a singulis terminis æquationis datæ, in quibus x vel potestas eius, describi prædicta methodo, in secunda æquatione, totidem terminos in quibus non est z , a singulis vero in quibus y vel potestas eius, describi totidem terminos, dicta etiam methodo, quarum fractionis denominator sit z , nec alibi hanc litteram in secunda æquatione repertum iri.

Hoc igitur cognito quo pacto ex æquatione quavis proposita, velut hic $x^3 + y^3 - axy \propto 0$ alia describenda sit, ut hic $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} \propto 0$, animadverto porro si termini divisi per z , ad alteram partem æquationis transferantur, ductisque omnibus in z , divisio deinde fiat per terminos in quibus initio non erat z , existere tunc ipsam quantitatem z ab una æquationis parte, uti hic fiet $z \propto \frac{3ey^3 + aexy}{3exx - aey}$. Atque hinc intelligo ad consequendam quantitatem z ponendos tantum eos terminos æquationis qui descripti sunt ex terminis æquationis primæ in quibus y , sublato tantum denominatore z mutatisque signis + & —. deinde dividendos istos terminos per eos

termes contenant x de la première équation. il paraît en outre que tous les termes tant du numérateur que du dénominateur peuvent être divisés par e ; de sorte que dans notre exemple on trouve $x = \frac{-3y^3 + ayx}{3x^2 - ay}$. On supprime donc $\frac{e}{z}$ dans les termes provenant de ceux qui contiennent y . En effet, nous avons dit plus haut qu'ils se dériveraient des termes donnés en multipliant ceux-ci par $\frac{e}{z}$ et en y ajoutant le facteur numérique indiquant les dimensions d' y . On voit donc que pour obtenir ces termes nécessaires pour la détermination de z il n'y a d'autre changement à apporter aux termes contenant y de l'équation donnée, que celui d'y ajouter comme facteur le nombre des dimensions d' y et d'invertir les signes $+$ et $-$. De cette façon $y^3 - axy$ donne $-3y^3 + axy$. Quant aux termes provenant de ceux de la première équation qui renferment x , comme il s'est montré qu'il faut seulement y supprimer la lettre e , et comme nous avons dit antérieurement qu'ils sont déduits de telle manière qu'une lettre x a été changée en e et que de plus on y a ajouté comme facteur le nombre des dimensions de x , il appert que désormais, pour constituer le dénominateur requis, il suffit d'ajouter comme facteur à chacun des termes contenant x de la première équation le nombre indiquant les dimensions de x , et de supprimer ensuite une seule lettre x dans chaque terme. C'est ainsi que de $x^3 - axy$ proviendra $3x^3 - axy$ et ensuite, en divisant par x , $3x^2 - ay$. Par ces raisonnements la règle énoncée au début est maintenant démontrée. Il est vrai que nous avons dit à présent qu'il faut changer les signes $+$ et $-$ dans les termes qui proviennent de ceux contenant y , tandis que dans la règle nous disions qu'il ne faut rien changer dans les signes, mais il est évident que ceci revient au même puisque nous disions aussi qu'il faut considérer chaque quantité négative [numérateur ou dénominateur] comme si elle était positive. Mais pour qu'on comprenne la raison de la remarque ajoutée à la règle sur le sens de la ligne FE, nous répéterons ici la figure considérée plus haut dans laquelle nous avons vu que $AG = x + e$ et $EG = z + e$, d'où se concluait $GD = y + \frac{ey}{z}$. Si toutefois la tangente tombe de l'autre côté de la ligne BF [Fig. 12], comme ici be, et qu'elle est d'abord, comme l'autre, censée couper la courbe, savoir en d, et qu'on tire dg parallèle à bf, il arrivera qu'en posant de nouveau $fg = e$ et $fe = z$, Ag devient égale à $x + e$, mais eg à $z - e$, d'où résulte $gd = y - \frac{ey}{z}$. Il est facile d'en conclure que la seconde équation résultant de l'équation proposée $x^3 + y^3 - axy = 0$ sera dans ce cas $3ex^2 - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = 0$. C.à.d. les termes à dénominateur z y ont des signes contraires à ceux qu'ils avaient dans l'équation antérieurement déduite qui était $3ex^2 + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = 0$. Il résulte de cette dernière que lorsque la quantité $3ex^2 - aey$ ou plutôt $3x^2 - ay$ (qui constitue le dénominateur suivant la règle) est inférieure à zéro ou négative,

la quantité restante $\frac{3ey^3}{z} - \frac{aeyx}{z}$, ou aussi la quantité $3y^3 - ayx$ (qui, suivant la règle, constitue le numérateur) est positive; que lorsqu'au contraire celle-là est positive, celle-ci est négative, puisque la somme totale de tous les termes est nulle. Mais il en est autrement dans le cas de l'équation $3ex^2 - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = 0$. De celle-ci il résulte que lorsque la quantité $3ex^2 - aey$, ou plutôt $3x^2 - ay$, est négative, la partie restante $-\frac{3ey^3}{z} + \frac{aeyx}{z}$ ou aussi la quantité $-3y^3 + ayx$, est positive, et par conséquent $3y^3 - ayx$ négative; tandis que, lorsque $3x^2 - ay$ est une quantité positive, $-3y^3 + ayx$ doit être négative, et par conséquent l'expression $3y^3 - ayx$ positive.

Ceci fait voir que des quantités trouvées par la règle et contenues dans l'équation $\frac{3y^3 - ayx}{3x^2 - ay} = z$, on peut inférer auquel des deux cas appartient la construction de la tangente: d'une différence de signe entre le dénominateur et le numérateur on peut conclure qu'on se trouve dans le premier cas, c.à.d. que z ou FE doit être prise vers A, tandis que dans le cas de l'égalité des signes c'est dans la direction opposée qu'il faut la prendre.

Or, la quantité z ou FE trouvée d'après la règle peut parfois être réduite à des termes plus simples au moyen de l'équation donnée exprimant la nature de la courbe. Il en est ainsi par exemple dans la présente courbe AC [Fig. 13] possédant l'axe AD et le sommet A et dont la nature est telle que si de son point C on mène l'ordonnée CD le produit de BD^3 (B étant un point donné sur l'axe en dehors de la courbe) par DA^2 est égal à DC^5 . En d'autres termes posant $BA = a$, $BD = x$, $DC = y$ l'équation exprimant la nature de la courbe deviendra $x^5 - 2ax^4 + a^2x^3 - y^5 = 0$, CG étant une tangente qui rencontre l'axe en G, et posant $DG = z$, on obtient d'après la règle $z = \frac{5y^5}{5x^4 - 8ax^3 + 3a^2x^2}$. Mais comme d'après l'équation donnée $y^5 = x^5 - 2ax^4 + a^2x^3$, on trouve, en substituant à $5y^5$ sa valeur,

$$z = \frac{5x^5 - 10ax^4 + 5a^2x^3}{5x^4 - 8ax^3 + 3a^2x^2},$$

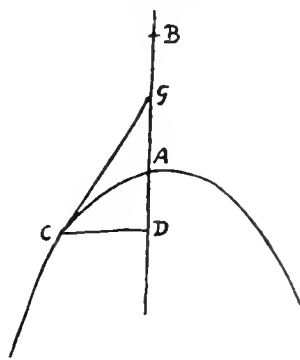
ou bien, en divisant par x^2 ,
$$z = \frac{5x^3 - 10ax^2 + 5a^2x}{5x^2 - 8ax + 3a^2}.$$

Et en divisant de nouveau par $x - a$ on aura $z = \frac{5x^2 - 5ax}{5x - 3a}$, ce qui signifie que lorsqu'on prend le rapport BD: DG égal à $5BD - 3BA$ (ou $2BA + 5AD$): $5AD$, GC touchera la courbe AC en C.

quando quantitas $3exx - aey$ siue quando $3xx - ay$ (quæ diviforem constituit secundum regulam) fuerit minor nihilo, siue negata, tunc quantitatem reliquam $\frac{3ey^3}{z}$ $\frac{aeyx}{z}$ siue etiam $3y^3 - ayx$ (quæ quantitatem dividendam secundum regulam constituit) esse affirmatam; aut cum illa est affirmata, hanc esse negatam; quia omnes simul æquationis termini æquantur nihilo. At contra ex illa æquatione $3exx - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} \propto 0$ sequitur quando quantitas $3exx - aey$, siue $3xx - ay$, fuerit negata tunc reliquam $-\frac{3ey^3}{z} + \frac{aeyx}{z}$, siue etiam $-3y^3 + ayx$ esse affirmatam, ac proinde $3y^3 - ayx$ esse negatam: aut quando $3xx - ay$ fuerit affirmata, tunc $-3y^3 + ayx$ esse negatam, ac proinde $3y^3 - ayx$ esse affirmatam.

Per hæc itaque apparet ex quantitibus per regulam inuentis, quæ erant $\frac{3y^3 - ayx}{3xx - ay} \propto z$, judicari posse ad utrum casum constructio tangentis pertineat, nempe ex comperta dissimilitudine affectionis in divifore et dividendo, sequi ad priorem casum eam pertinere, hoc est z siue FE accipiendam esse versus A. Ex similitudine vero eorum affectionis sequi ad contrariam partem sumendam.

Potest autem quantitas z siue FE, per regulam inuenta, nonnunquam ad simpliciores terminos reduci ope æquationis datæ quæ naturam curvæ continet, velut in hac curvæ AC [Fig. 13] axem habente AD verticem A, cuiusque ea est proprietas ut si a puncto C in ea sumpto applicetur ordinatim CD, fiat productum ex cubo BD (est autem B punctum in axe extra curvæ datum) in quadratum DA æquale cubo quadrato DC. Siue ponendo $BA \propto a$, $BD \propto x$, $DC \propto y$, fiat æquatio naturam curvæ continens, $x^5 - 2ax^4 + aax^3 - y^5 \propto 0$. Hic ponendo CG esse tangentem, quæ occurrat axi in G,



[Fig. 13]

vocandoque DG, z , fit secundum regulam $z \propto \frac{5y^5}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$. quia autem ex data æquatione est $y^5 \propto x^5 - 2ax^4 + aax^3$ restituendo pro $5y^5$ id quod ipsi æquale est fiet $z \propto \frac{5x^5 - 10ax^4 + 5aax^3}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$ siue dividendo per xx erit $z \propto \frac{5x^3 - 10axx + 5aax}{5xx - 8ax + 3aa}$.

Et rursus dividendo hanc fractionem per $x - a$ habebitur $z \propto \frac{5xx - 5ax}{5x - 3a}$, quod

significat faciendum ut sicut BD quinquies sumpta, minus BA ter, siue ut BA bis, una cum AD quinquies, ad AD quinquies, ita BD ad DG, atque ita GC tacturam in C curvæ AC.

IV.

DE CURVIS PARABOLOIDIBUS ET HYPERBOLOIDIBUS.

1667¹⁾.

Dans le T. II des Registres le texte de cette Pièce suit celui de la Pièce III.

LEMMA.

Si differentia linearum FL, KL, quæ est KF dividatur in quotcunque partes æquales punctis T, S, G, ratio ... etc.

C'est à d'insignifiantes différences près (p.e. „quotcunque partes” au lieu de „partes quotcunque”), le Lemma qui occupe les p. 283—284 du T. XIV. Ce Lemma nous semble dater de 1667, et non pas de 1657 comme le dit le T. XIV où il est emprunté à une feuille séparée²⁾. En effet, la première rédaction du Lemma — les ratures indiquent que c'est bien la première — se trouve à la p. 188 du Manuscrit C, laquelle date de juillet 1667.

Le Lemma dans la communication est suivi par le

THEOREMA.

Si a puncto in paraboloide recta ad axem ordinatim applicetur . . . etc., exactement comme dans les feuilles détachées qui ont fourni le texte des p. 284—287 du T. XIV auxquelles nous renvoyons le lecteur. La remarque de Huygens dans la note finale 5 de la p. 287 „Convenit . . . ad BQ” fait aussi partie du texte des Registres, et l'on y trouve en cet endroit la „figure entièrement analogue à la Fig. 6 de la p. 279” dont il est question dans la note nommée.

Ce Theorema date apparemment aussi de 1667 puisque dans le Manuscrit C il fait suite au Lemma. Il en est de même du Theorema suivant (p. 285 du T. XIV) qui correspond à celui de la page antérieure 186 du Manuscrit C³⁾. A la p. 185 du Manuscrit C Huygens commençait sa

¹⁾ Dans les Registres la Pièce fait corps avec la précédente et n'a donc pas de titre. Dans la lettre de septembre 1686 à de la Hire — citée aussi dans la note 83 de la p. 212 ainsi que dans la note 125 de la p. 219 qui précèdent — Huygens l'appelle „Dimensio Paraboloidum, ou je pourray joindre celle des Hyperboloides”.

²⁾ Il faut lire à la p. 283, l. 3 du T. XIV „Ratio FL ad LK”, non pas „ad LT”, et à la p. 284, l. 2 „rationem FL” au lieu de „ratione FL”. Nous avons remarqué dans la note 7 de la p. 283 que, par suite d'une inadvertance, Huygens ne s'est pas exprimé correctement. Ceci s'applique au texte de la communication à l'Académie comme à celui du T. XIV.

³⁾ La démonstration n'y est pas achevée et s'arrête au milieu d'une phrase.

Pièce par les mots: Paraboloides voco curvas in quibus ordinatim applicatæ ad axem vel earum potestates quædam sunt inter se ut interceptæ inter easdem applicatas et verticem, vel aliquæ earum potestates. Etc.

D'après la note 5 déjà mentionnée de la p. 287 du T. XIV Huygens ajouta encore au crayon à la feuille séparée considérée en cet endroit la remarque *Addenda quadratura Hyperboloidum* ce qui correspond à ce qu'il a écrit dans la lettre de 1686 citée dans la note 1. Il nous semble que le texte de l'Appendice II (p. 288 et suiv.) du T. XIV, emprunté à la même feuille séparée, doit dater également de 1667 et non pas de 1657: à la p. 190 du Manuscrit C, datant de 1667, on trouve des remarques analogues — quoique non pas identiques — sur les „hyperboloides” ou hyperboles de divers degrés. La publication du texte de cette page du Manuscrit C nous semble superflue.

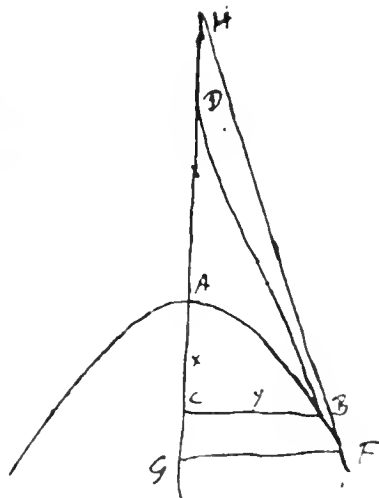
Outre les parties déjà publiées la communication comprend encore un théorème final que voici. Il correspond en grande partie au texte de la p. 185 du Manuscrit C. Le fait qu'il s'agit ici de la construction d'une tangente d'après la méthode de la Pièce III explique que dans les Registres les Pièces III et VI aient été soudées l'une à l'autre de manière à former en quelque sorte une seule Pièce.

THEOREMA.

Si Paraboloidem tangens recta linea cum axe convenit, et a puncto contactus recta ad axem ordinatim applicetur; erit pars axis inter applicatam et tangentem intercepta, ad partem ejusdem axis inter applicatam et verticem, ut exponens potestatis quæ in ea paraboloides consideratur in ordinatim applicatis, ad exponentem potestatis quæ consideratur in partibus axis, abscissis ad verticem.

Ut si sit Paraboloides AF [Fig. 14] cuius axis AG vertex A, rectaque eam tangens in puncto B conveniat cum axe in D, sit autem Paraboloides eius naturæ ut applicatarum ordinatim BC, FG, quadrato cubi sint inter se sicut quadrata CA, GA, hic quia in ordinatim applicatis consideratur potestas quinta, in abscissis vero ad verticem potestas secunda, dico fore DC ad CA, ut 5 ad 2. Hoc facile ostenditur ex Methodo tangentium. Quod si vero alia item tangens ducatur FH manifestum est ut DA ad AC, et ut AH ad AG, ita esse HD ad CG.

[Fig. 14]



V.

EXAMEN DU LIVRE DE WALLIS „ARITHMETICA INFINITORUM” DE 1655.

1667.

Registres, T. II, p. 164: Ce 24 d'Aoust [1667] M. Hugens a continué l'examen du livre de Wallis.

Il doit s'agir, pensons nous, de l'œuvre principale de Wallis, l'„Arithmetica infinitorum five nova methodus inquirendi in curvilinearum quadraturam aliaque difficiliora matheos problemata” de 1655. Huygens a évidemment pu parler aussi des autres ouvrages du même auteur dont les principaux étaient l'„Arithmetica universalis” et le „Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis” datant l'un et l'autre également de 1655, la „Mathesis universalis five arithmeticum opus integrum” de 1657 et les „Tractatus duo.. de cycloide.. de cissoïde.. et de curvarum tum linearum $\epsilon\upsilon\lambda\acute{\alpha}\nu\sigma\epsilon\iota$ tum superficierum $\pi\lambda\alpha\tau\upsilon\sigma\mu\acute{\omega}$ ” de 1659 ¹⁾. Peut-être a-t-il aussi fait mention de la réfutation de la prétendue quadrature géométrique du cercle par Hobbes, la „Hobbiani Puncti Dispunctio” de 1657 ²⁾.



¹⁾ Voyez sur le dernier ouvrage, dédié à Huygens, la p. 518 de notre T. II.

²⁾ Consultez sur Huygens, Hobbes et Wallis la p. 380 qui suit, appartenant à la Pièce „Les trois grands problèmes de l'antiquité”.

VI.

INSUFFISANCE DE LA DÉMONSTRATION DE GREGORY DE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE.

1668.

Registres, T. I. p. 258—259: Le 4. d'Auril [1668]... Mr. Hugens a lû a la Compagnie l'examen qu'il a fait d'un livre nouveau de Gregorius... de verâ circuli et hyperbolæ quadraturâ.

Mr. Hugens fait voir qu'il demonstre mal cette impossibilité [avoir l'impossibilité de la quadrature].

Les observations de Huygens n'ayant pas été publiées dans les Registres, mais (sous la forme d'une lettre à l'éditeur Gallois) dans le Journal des Scavans du 2 juillet 1668, nous renvoyons le lecteur au T. VI, où l'on trouve cette lettre (No. 1647) ainsi que la première réponse de Gregory du 23 juillet 1668 tirée des Philosoph. Transactions (No. 1653) et les autres Pièces qui s'y rapportent parmi lesquelles quelques-unes de Wallis (No. 1659, 1669, pièce du 12 novembre 1668 de Huygens dans le Journal des Scavans, No. 1670, 1671, 1672, 1675, 1676, 1682, 1683, 1684, 1685, 1708, 1709, 1718, 1720, 1721, 1722). Voyez aussi les Appendices I—V aux p. 303—327 qui suivent.

Consultez surtout l'article de F. Schuh — cité (déjà avant son apparition) à la p. 174 du T. XII de 1910, et aussi à la p. 39 du T. XVIII de 1934 — qui fut composé „à la suite de la préparation de l'écrit bien connu de Huygens *De circuli magnitudine inventa*, pour les *Ouvrages complètes*". Cet article est intitulé „Sur quelques formules approximatives pour la circonférence du cercle et sur la cyclométrie de Huygens"; il occupe les p. 1—177 et 229—323 du T. III de 1914 de la Série IIIA des „Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles" (Nijhoff, la Haye). L'auteur y considère e.a. les propositions de Gregory et le § 31 est intitulé „Critique de Huygens de la démonstration de Gregory".

Voyez aussi sur cet article les notes 2 de la p. 369 et 27 de la p. 374 qui suivent.

VII.

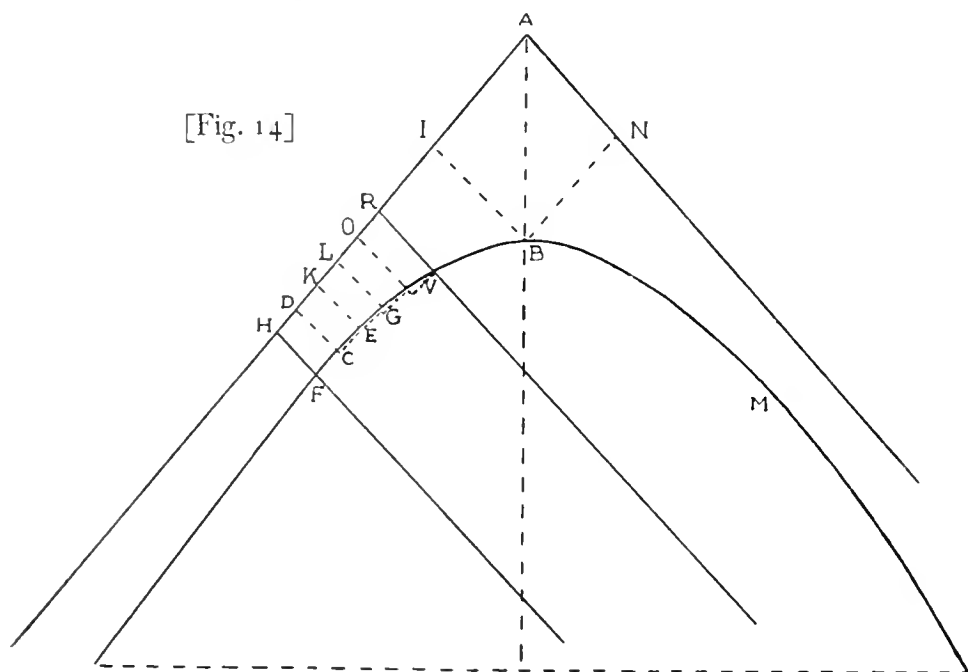
SUR LA QUADRATURE ARITHMÉTIQUE DE L'HYPERBOLE PAR MERCATOR ET SUR LA MÉTHODE QUI EN RÉSULTE POUR CALCULER LES LOGARITHMES.

1668.

Registres, T. III ¹), p. 138—143: Le mercredi 17^e jour du mois d'Octobre 1668 la compagnie estant assemblée M^r. Hugen a parlé de la quadrature arithmetique de l'hyperbole de M^r. Mercator qui est inferée dans un Journal d'Angleterre ²).

M. Mercator a esté le premier qui a proposé cette quadrature. M^r. Wallis l'a depuis expliquée et reformée ²); et M^r. Hugen y a adiousté plusieurs choses pour en faciliter l'intelligence. Voicy la maniere dont il l'a proposée ³).

Soit l'hyperbole MBF [Fig. 14], dont les asymptotes AH, AN fassent un angle droit ou autrement; et soit AIBN le quarré ou le rhombe de l'hyperbole c'est a dire dont le diamètre AB soit la moitié de l'axe transverse.



Qu'il y ait maintenant quelque espace hyperbolique FVRH, compris d'une portion de la courbe FV, des deux paralleles a l'asymptote AN, et de la partie qu'elles enferment de l'autre asymptote savoir HR, dont on veuille trouver le contenu c'est a dire sa proportion au quarré ou rhombe AB; et il n'importe que VR tombe entre BI, FH ou entre BI, NA, quoyque la supputation se fera d'autant plus facilement que HR sera plus petite a raison de HA, comme il paroîtra cy apres.

La methode pour parvenir a la mesure de l'espace VRHF, consiste premierement a concevoir des petits rectangles ou parallelogrammes circonserits a tout cet espace comme CH, ED, GK, &c, dont les costez soient paralleles a l'asymptote AN, et leurs largeurs sur l'autre asymptote toutes égales. Et quoyque ces parallelogrammes surpassent de quelque chose l'espace VRHF, toutes fois en considerant comme fait l'auteur qu'il y en a un nombre infini l'on peut dire qu'ils egalent parfaitement ledit espace et il ne reste qu'a trouver la grandeur de tous ces parallelogrammes mis en une somme.

On suppose pour cela AH égale a l'unité ou 1. HR égale a a ; IA égale a b . et chaque largeur des petits parallelogrammes comme HD, DK, égale a a . Il est constant maintenant par la propriété cogneüe de l'hyperbole que comme AH ou 1 est a AI ou b , ainfy AI a FH qui sera $\frac{bb}{1}$ ou bb . Et par la mesme raison parce que AD est $1 - a$, DC sera $\frac{bb}{1-a}$, KE $+$ $\frac{bb}{1-2a}$, LG $+$ $\frac{bb}{1-3a}$ et ainfy des autres hauteurs des petits parallelogrammes.

Mais en faisant la diuision de bb par $1 - a$, on trouuera que $\frac{bb}{1-a}$ c'est a dire CD est égale a $bb + bba + bbaa + bba^3 + bba^4$ &c. a l'infini, c'est a dire a bb multiplié par $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ &c. Et partant en multipliant cette hauteur CD par a le parallelogramme CH sera egal a $1 + a + a^2 + a^3$ &c. in abb . De mesme en diuisant bb par $1 - 2a$ on trouuera que $\frac{bb}{1-2a}$ c'est a dire EK est égale a bb in $1 + 2a +$

¹⁾ Le T. III est intitulé: „Registre de Mathematique. 1668”.

²⁾ La „Logarithmo-Technia” de 1667 de Nic. Mercator, déjà citée à la p. 11 qui précède — voyez sur l'auteur la note 8 de la p. 300 du T. I — parut d'abord dans les „Philosophical Transactions” de 1668 (17 Août, No. 38), ensuite avec un autre traité (voyez la note 2 de la p. 302 qui suit) sous forme de livre (Londres 1668), comme l'indique la note 5 de la p. 276 du T. VI. Cette note parle d'une réimpression en 1674. La „Logarithmo-Technia” se trouve aussi dans les „Scriptores logarithmici” de Fr. Maseres de 1791. Dans le même n° des Philos. Transactions J. Wallis traite de cette quadrature. Immédiatement après Mercator publia un deuxième article: „Some illustrations of the Logarithmo-technia” (Phil. Trans. n. 38, 1668).

³⁾ Le brouillon de la conférence qui occupe les p. 82—85 du Manuscrit D commence par l'alinéa suivant: Pour expliquer la quadrature de l'hyperbole de Mercator, reformée par M. Wallis, je n'auray qu'a repeter l'abbregé que le dernier en a donné, en esclarcissant les difficultez qui y pourroient rester.

$4aa + 8a^3 + 16a^4$ &c. Et partant le parallelogramme ED fera $1 + 2a + 4aa + 8a^3 + 16a^4$ &c. in abb . Et ainſy en examinant tous les autres petits parallelogrammes on verra facilement qu'ils ſont ainſy

$$\left. \begin{array}{l} CH + 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 \text{ \&c.} \\ ED + 1 + 2a + 4a^2 + 8a^3 + 16a^4 \text{ \&c.} \\ GK + 1 + 3a + 9a^2 + 27a^3 + 81a^4 \text{ \&c.} \end{array} \right\} \text{ in } abb$$

et ainſy conſecutivement juſqu'au plus grand VO + $1 + A + A^2 + A^3 + A^4$ &c. donc la ſomme de tous c'eſt à dire l'eſpace VRHF fera

$$A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 + \frac{1}{4}A^4 + \frac{1}{5}A^5 \text{ \&c. in } bb.$$

On a dicté que le plus grand des parallelogrammes VO eſt egal à $1 + A + A^2 + A^3$ &c. in bb , parce qu'en diuiſant bb par $1 - A$, l'on trouue que $\frac{bb}{1 - A}$ c'eſt à dire VR,

eſt egale à cette progreſſion multipliée par bb . Et par conſéquent en multipliant de plus par RO ou a le parallelogramme VO doit eſtre $1 + A + A^2 + A^3$ &c. in abb .

Mais pour ce qui eſt de la conſequence par laquelle la ſomme de tous les parallelogrammes eſt egale à $A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3$ &c in bb , elle eſt fondée ſur des Theoremes aſſez connus des progreſſions des puiſſances. Car en conſiderant les colonnes deſcendantes des quantitez eſcrites cy deſſus on void que la premiere colonne eſt faite d'unitéz multipliées par abb qui ſont des parallelogrammes egaux entre eulx, dont la ſomme par conſequent fera egale au dernier abb pris autant de fois qu'il y a des particules egales en la ligne HR ou A faiſant les largeurs deſdits parallelogrammes. C'eſt à dire ſi on met n pour ce nombre infini des parties la ſomme de tous les parallelogrammes ſera $nabb$, mais na , c'eſt à dire une des parties multipliée par le nombre des parties eſt egale à la ligne HR ou A , donc toute la premiere colonne continuée à l'infiny eſt egale à $Aabb$, comme elle a eſté miſe.

Pareillement la ſeconde colonne eſtant $a + 2a + 3a + 4a$ &c. multipliez par abb qui eſt une ſuite de parallelogrammes qui ſont comme les nombres depuis l'unité, il eſt certain que leur ſomme eſt egale à la moitié du plus grand A in abb , multipliée par n , c'eſt à dire priſe autant de fois qu'il y a des petites parties en HR ou A . Cette ſomme ſera donc $\frac{1}{2}Aanbb$, ou parce que na eſt egale à A ce ſera $\frac{1}{2}AAbb$ comme elle a eſté miſe.

De meſme la troiſième colonne eſtant $aa + 4aa + 9aa$ &c. multipliez par abb qui eſt une ſuite de parallelogrammes qui ſont entre eux comme les quarez des nombres depuis l'unité: leur ſomme ſera egale à $\frac{1}{3}$ du plus grand multiplié par A c'eſt à dire à $\frac{1}{3}AAanbb$ ou parce que na eſt egal à A ce ſera $\frac{1}{3}A^3bb$; et ainſy du reſte.

Suppoſant maintenant quelque nombre pour la longueur de A ou HR qui ſoit moindre que l'unité (car HA eſt ſuppoſé + 1) et de meſme pour b ou AI, la ſomme ſuſdite $A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 + \frac{1}{4}A^4$ &c. in bb exprimée en nombre ſera le contenu de l'eſpace hyperbolique HFVR. Et quoyqu'il puiſſe ſembler d'abord qu'on cherchera en vain cette ſomme, parce qu'il y a une multitude infinie de quantitez à adiouter, cependant puiſque A eſt une fraction moindre que l'unité, il ſ'enſuit que les puis-

fances de A deviennent d'autant moindres que l'unité qu'elles font plus hautes, en forte que les dernières peuvent estre negligées comme il paroitra par cet exemple. Soit

$AI \propto 1$; $b \propto \frac{1}{10}$ que l'on escriira ainsy 0,1; et par conséquent $bb \propto \frac{1}{100}$ ou 0,01;

$II R$ ou $A \propto \frac{21}{100}$ ou 0,21.

L'on aura donc

$$\begin{aligned} A &\propto 0,21. \\ \frac{1}{2} A^2 &0,02205. \\ \frac{1}{3} A^3 &0,003087. \\ \frac{1}{4} A^4 &0,000486203. \\ \frac{1}{5} A^5 &0,000081682. \\ \frac{1}{6} A^6 &0,000014294. \\ \frac{1}{7} A^7 &0,000002573. \\ \frac{1}{8} A^8 &0,000000473. \\ \frac{1}{9} A^9 &0,000000088. \\ \frac{1}{10} A^{10} &0,000000017. \\ \frac{1}{11} A^{11} &0,000000003. \end{aligned}$$

Et leur somme
Qui estant multipliée

$$\propto 0,235722333.$$

par bb
fait

$$\propto 0,01$$

$$0,00235722333$$

pour le contenu de l'espace hyperbolique $FHRV$ en parties dont le quarré ou Rhombe AB en contient 0,01. Cest a dire que l'espace $FHRV$ fera au quarré ou Rhombe AB

comme $\frac{23572233}{100000000}$ a 1⁴).

⁴) Dans le brouillon du Manuscrit D (note 3 de la p. 261) Huygens fait encore un calcul du même genre pour $A = 0,5$.

Par la manière de cette opération il est facile de comprendre la raison de ce qui a été dict au commencement sçavoir que le calcul sera d'autant plus aisé que HR aura moindre raison a HA et d'autant plus long que cette raison sera plus grande, car suivant cela les puissances de A ou HR diminueront plus ou moins vite pour pouvoir estre negligées ainsy que dans l'exemple proposé l'on voit que les Caractères signifiant des puissances de A se retirent assez vite vers la main droite. Ce qui n'arriveroit pas de mesme si A estoit 0,7 ou 0,8, mais il faudroit continuer l'opération plus auant pour auoir le mesme nombre de veritables caracteres pour le contenu de l'espace hyperbolique.

Or cette dimension de l'hyperbole sert aussi a trouver les logarithmes avec facilité parce que ces espaces hyperboliques comme VRHF, BIHF sont toujours entre eux comme la raison de VR a FH⁵⁾ est a la raison de BI a FI⁵⁾ ce que Gregorius de Sancto Vincentio a montré le premier⁵⁾. C'est a dire si l'on pose des nombres pour BI, VR, FH alors comme l'espace VRIH est a BIHF ainsy fera la difference des logarithmes des nombres VR, FH a la difference des logarithmes de BI, FI. La proportion desquelles differences estant connue et supposant ensuite comme dans les tables 0 pour logarithme de l'unité et 1,0000000000⁶⁾ pour celui de 10, l'on trouue facilement les logarithmes de chaque nombre tels qu'ils sont dans les mesmes tables.

⁵⁾ Voyez sur la proposition de Grégoire de Saint-Vincent la note 3 de la p. 452 du T. XIV.

Sous l'expression assez étrange dans sa brièveté „raison de VR a FH” il faut entendre ici le „numerus ratiuncularum” (Mercator) qui correspond au rapport VR : FH; même remarque pour la „raison de BI a FI”. Gr. de S. Vincent qui ne connaît pas les „ratiunculæ” ni le mot logarithme — voyez la note citée du T. XIV — s'exprimait autrement que Huygens le fait ici; pour lui un rapport de deux longueurs *est compris* dans un autre rapport, ou bien en *contient* un autre, un certain nombre de fois (ou „nombre” ne désigne pas généralement, comme dans l'expression „numerus ratiuncularum” un nombre entier). Dans le brouillon mentionné dans la note 3 de la p. 261 les mots „ce que Greg. a S^{to} Vinc. a montré le premier” ont été *ajoutés dans l'interligne*, ce qui explique que Huygens n'insiste aucunement sur la non-identité des logarithmes de Mercator et des logarithmes — pour employer ce mot — de Grégoire.

⁶⁾ Apparemment il ne s'agit pas ici du nombre 1, mais de dix mille millions (d'ailleurs c'est le copiste, pensons-nous, qui a ajouté trois zéros; dans le brouillon Huygens n'en écrit que sept): Mercator lui aussi écrit 1,0000000 pour désigner 10 millions (Mercator se sert ailleurs, il est vrai, d'un certain signe décimal, mais ce signe n'est pas la virgule).

Huygens ne parle pas ici, comme il aurait pu et peut-être dû le faire, de „numeri ratiuncularum” infiniment grands; un „numerus ratiuncularum” fini ne correspondra pas *exactement* à tout rapport VR : FI ou BI : FI; voyez ce que nous disons sur ce sujet aux p. 215—216 qui précèdent. Chez Mercator l'„intervalle-atome” dont nous avons parlé dans la note 2 de la p. 155, finit par céder le pas à l'intervalle infiniment petit ou, si l'on veut, à la continuité.

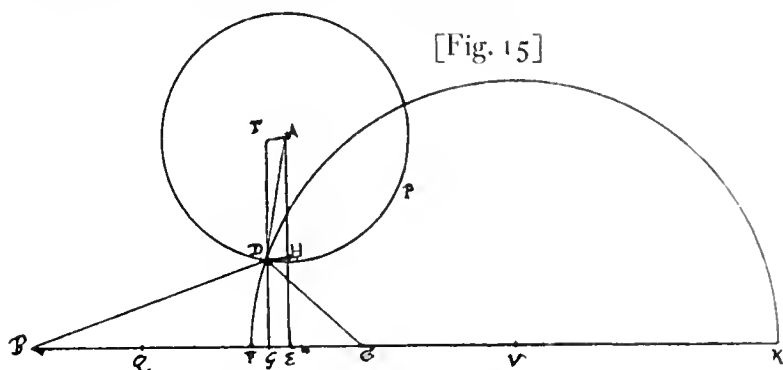
VIII.

PROBLEMA ALHASENI.

[1669. 1670?]

1669

A¹⁾. Dato speculo sphaerico convexo aut cavo, datisque puncto visus et puncto rei visæ, invenire in superficie speculi punctum reflexionis.



Ducto plano per speculi centrum A [Fig. 15], et per puncta B, C, oculi et rei visæ, fiat sectio in speculi sphaera circulus DP. Junctâque BC fit in eam perpendicularis AE. Et posito puncto reflexionis D, fit etiam DG perpendicularis in BC, et DH perpendicularis in AE. et ducatur recta ADE, quæ secabit necessario angulum BDC bifariam, ideoque erit ut BD ad DC ita BF ad FC. quare sumta $FQ \propto FC$ (quam pono minorem duarum BF, FC) factoque ut BQ ad BF ita FC ad FV, necessario circum-

¹⁾ „Chartæ Mathematicæ” f. 145. Les Fig. 15, 16 et 17 correspondent exactement à des figures des p. 119 et 124 du Manuscrit D qui contient en cet endroit les calculs primitifs, datant apparemment de janvier 1669, puisque la p. 145 porte la date 1 Fevr. 1669. La Fig. 16 correspond aussi à celle de la page, imprimée par Huygens lui-même d’après son procédé spécial, qui est reproduite dans notre T. VI (planche vis-à-vis de la p. 462); le texte de cette page correspond — à quelques variantes près — avec celui de la „Constructio” de la présente Pièce (et aussi avec le texte de la p. 124 du Manuscrit D). La première partie de la présente Pièce motive cette construction ou du moins fournit les données qui permettent de la vérifier.

ferentia deferipta centro V radio VF tranfibit per punctum D, ut aliunde conflat ²⁾).

Sint jam AE $\propto a$. EB $\propto b$. EC $\propto c$. radius AD $\propto d$. AH $\propto x$. HD $\propto y$.
Ergo FE $\propto \frac{ay}{x}$.

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \text{BF } b - \frac{ay}{x} \quad \text{five} \quad \text{FG } \frac{HE}{x} - \frac{FD}{a - x} - \frac{AD}{d} \left/ \frac{ad - dx}{x} \right. \text{DF} \\ \text{FC } c + \frac{ay}{x} \quad \text{y} \quad \frac{HD}{y} - \frac{DA}{d} - \frac{FD}{\frac{ad - dx}{x}} \left/ \frac{add - ddx}{yx} \right. \text{FK}^3) \end{array} \right\} \\
 \hline
 \text{BQ } b - c - \frac{2ay}{x} \quad \text{Sit } b - c \propto e \quad \text{Ergo } \frac{add - ddx}{2yx} \text{ FV} \\
 \hline
 e - \frac{2ay}{x} = b - \frac{ay}{x} = c + \frac{ay}{x} = \frac{add - ddx}{2yx} \\
 \hline
 ex - 2ay = bx - ay = cx + ay = \frac{add - ddx}{2y} \quad b - c \propto e \\
 \hline
 \frac{eaddx - eddxx - 2aaddy + 2addxy}{2y} \propto bcxx + bayx - acyx - aayy \\
 \hline
 eaddx - eddxx - 2aaddy + 2addxy \propto 2bcxx + 2eaxy - 2aay^3 \quad \frac{yy}{dd} \propto \frac{xx}{xx} \\
 \hline
 \text{Div. per } x \quad 2eaxy - eadd - eddx \propto 2bcxy + 2aaxy - 2addy \\
 \hline
 xx \propto \frac{2bcyx + 2aaxy + eddx + eadd - 2addy}{2ae}
 \end{array}$$

Completo igitur rectangulo AHDT, positaque AT $\propto y$ erit TD $\propto x$, punctumque D erit ad hyperbolam ut constat ex æquatione. Sed et ad circumferentiam DP quia

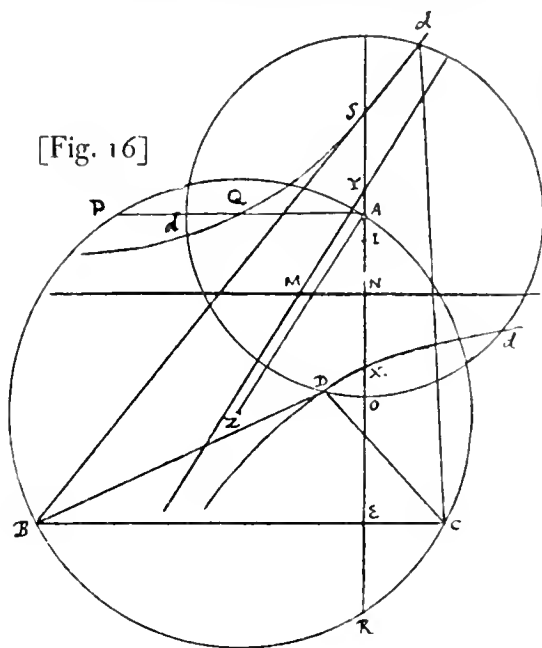
²⁾ Il s'agit, d'après la construction de Huygens, de la circonférence de cercle qui constitue le lieu de tous les points du plan considéré pour lesquels le rapport des distances aux deux points fixes B et C a la valeur constante DB: DC.

³⁾ Puisque l'angle FDK est droit.

dd — *yy* ∞ *xx*. Ergo inventa hyperbola quæ locus est puncti D in recta TD, ea circumferentiam DP secabit in puncto D quæsito. Invenietur autem hoc modo.

Constructio 4).

Per tria puncta A, B, C [Fig. 16] describatur circuli circumferentia cujus centrum sit Z. Occurrat autem ei producta AE in R. Et sit duabus RA, OA tertia proportionalis NA, eritque NM parallela BC, altera asymptotôn. Rursus sint proportionales EA, $\frac{1}{2}AO$, AI, sumtaque $IY \propto IN$, du-



$\frac{1}{2}AO$, AI , sumtaque $IY \propto IN$, ductatur YM parallela AZ . eaque erit altera asymptotos. Ductâ denique AP in circulo parallela BC , divisâque bifariam in Q , erit Q punctum per quod altera oppositarum sectionum transibit⁵⁾. Ad inventas asymptotos describendis⁵⁾, quarum intersectiones cum circumferentia DO , ostendent puncta reflexionis quæ sita, quæ usque ad quatuor vera esse possunt cum puncta B, C intra circulum Id data sunt.

Constructio hæc ad omnes casus, quibus problema solidum, accommodata est, præter unum quo non hyperbola sed parabola describenda est, cum nempe circumferentia per puncta A, B, C descripta tangit rectam AE [Fig. 17]⁶⁾. Invenietur

4) Malgré les calculs du Manuscrit D, mentionnés dans la note 1 de la p. 265, il n'est pas clair comment Huygens parvient à cette construction; mais il n'est pas difficile de la vérifier. L'équation de l'hyperbole étant

$$2aex^2 - 2(a^2 + bc)xy - ed^2x + 2ad^2y - ead^2 = 0$$

$$2aex^2 - 2(a^2 + bc)xy - cd^2x + 2ad^2y - ead^2 = 0$$

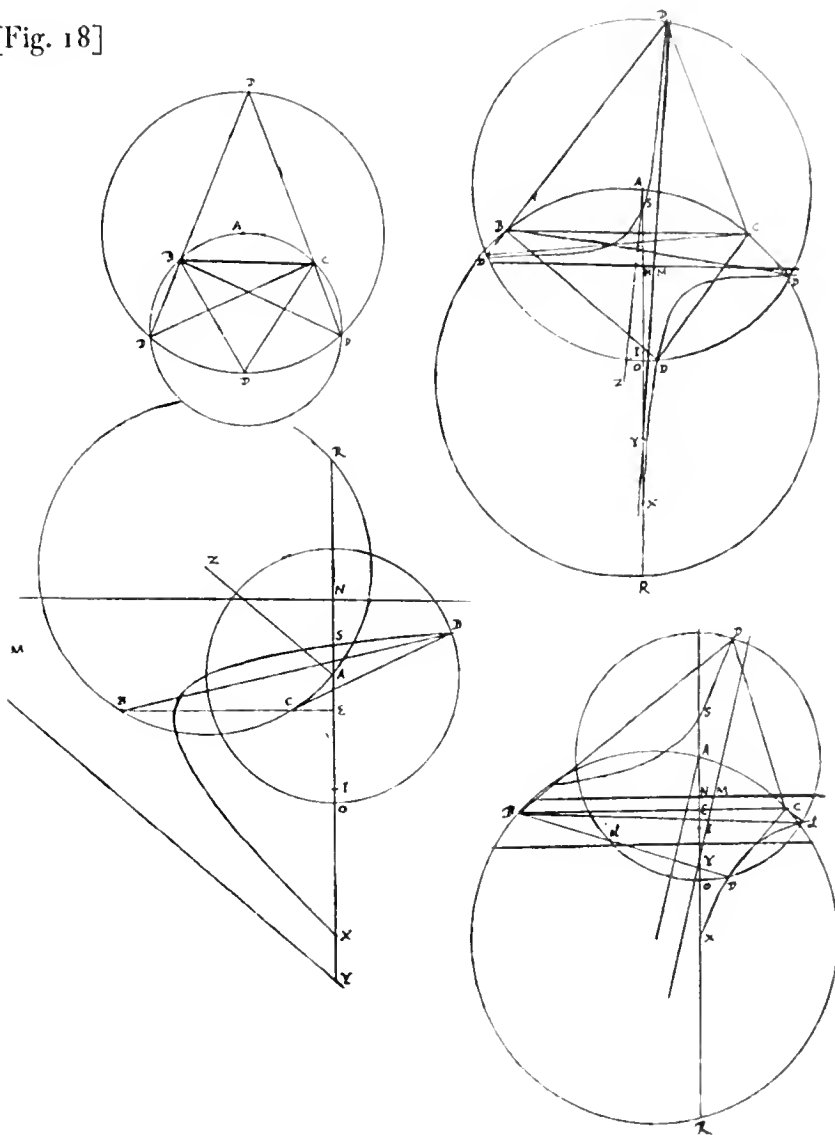
on trouve, en posant $y = 0$, $x = \frac{ad^2}{a^2 + bc}$: c'est l'équation de l'asymptote horizontale.

Comme la circonférence de cercle passant par A, B et C a pour équation $a(x^2 + y^2) - (a^2 + bc)x - a(b - c)y = 0$, on trouve $AR = \frac{a^2 + bc}{a}$; et comme $AO = d$, on a $NA = \frac{OA^2}{RA} = \frac{ad^2}{a^2 + b^2}$, conformément à l'équation trouvée de l'asymptote.

Le centre Z de la circonférence a pour coordonnées $x = \frac{a^2 + bc}{2a}$, $y = \frac{b-c}{2}$; l'équation de la droite AZ est donc $y = \frac{a(b-c)}{a^2 + bc}x$. Or, l'équation de l'hyperbole donne effectivement, en divisant par y^2 et en posant ensuite $y = \infty$, $\frac{x}{y} = \frac{a^2 + b^2}{ae}$ ou $\frac{a^2 + b^2}{a(b-c)}$, de sorte que la deuxième asymptote est parallèle à AZ. Etc.

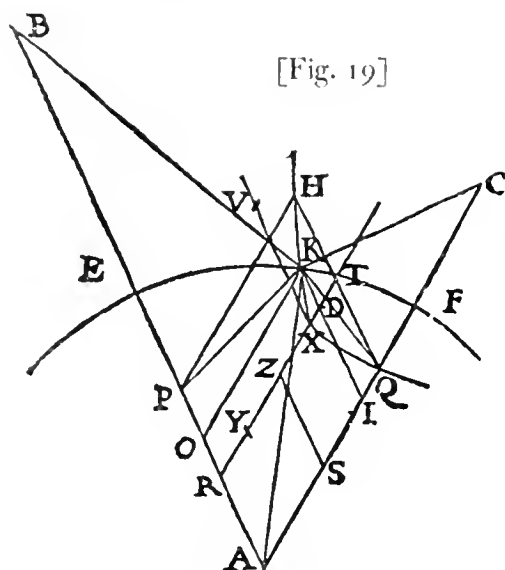
Ajouté au crayon: multo meliorem constructionem postea invenimus ⁷⁾.

[Fig. 18]



⁷⁾ Il s'agit de la construction du Manuscrit 11 qui constitue notre Appendice II à la p. 330 qui suit.
Consultez aussi notre remarque sur cet Appendice à la p. 271 qui suit.

B⁸). *Construction d'un Problème d'Optique, qui est la XXXIX. Proposition du Livre I. d'Alhazen, & la XXII du Livre VI. de Vitellion.*



[Fig. 19]

XV aurait dû être une ligne droite.

Les points BC [Fig 19] et le cercle EK dont le centre est A font donner sur un même plan; il faut trouver le point K sur le cercle, en sorte que les lignes BK, CK fassent avec la ligne AK des angles égaux entr'eux.

Ayant mené AB, AC soit fait comme AC à AF, ainsi AF à AQ; & comme AB à AE, ainsi AE à AP. Soit aussi AR & AS, chacune la moitié de AP & de AQ. Dans l'angle BAC soit achevé les parallélogrammes PAQH & ARZS. Sur RZ prolongée soit pris ZY & ZX, chacune égale à la ligne qui peut la différence d'entre les quarrés de QS & ZS⁹). Ayant fait XV égale à XY et parallèle à AB, sur les deux costez XV, XY soit décrit une hyperbole qui passera par les points Q & H, comme

il est évident par la construction: cette hyperbole QXH rencontrera le cercle au point K qui est celui que l'on cherche.

Ayant mené KO, & KI parallèles à AC & à AB, dont KI rencontre YX au point D; à cause de l'hyperbole le rectangle YDX est égal au quarré de KD ordonnée, ou de OR; & le rectangle YTX est égal au quarré de HT ou de PR; & ayant ôté du rectangle YTX le rectangle YDT [lisez: YDX¹⁰], & du quarré de PR le quarré de OR, il restera le rectangle RDT ou AIQ qui fera égal au rectangle AOP: donc PO est à AI ou OK son égale, comme QI est à AO ou IK. Et ayant mené les lignes KP, KQ, les triangles KOP, KIQ seront semblables, & partant équiangles; c'est pourquoy les angles APK, AQK qui font les mêmes ou les suppléments des angles

⁸) „Divers ouvrages de mathématique et de physique par MM. de l'Académie Royale des Sciences”, 1693, p. 336. Comparez la note 56 de la p. 207 qui précède.

⁹) C.à.d. $ZY = ZX = \sqrt{QS^2 - ZS^2}$. Z est le centre de l'hyperbole équilatère, dont l'équation par rapport à deux diamètres conjugués RT et SZ est $TZ^2 - HT^2 = ZX^2$, ou, si l'on veut, $x^2 - y^2 = a^2$ ou bien $y^2 = (x + a)(x - a)$ ou $HT^2 = TY \cdot TX$.

¹⁰) L'erreur a été corrigée dans la traduction latine des „Opera Varia” de 1724 (tome IV, p. 759).

égaux OPK , IQK feront égaux entr'eux. Mais par la construction on a fait comme AB à AE ou à AK , ainsi AK ou AE à AP : c'est pourquoy les deux triangles BAK , KAP sont semblables; & pour les mesmes raisons les deux triangles CAK , KAQ sont aussi semblables: c'est pourquoy l'angle BKA est égal à l'angle APK ; & l'angle CKA est égal à l'angle AQK . Mais nous venons de démontrer que les angles APK , AQK sont égaux; les angles BKA , CKA seront donc aussi égaux entre eux; ce qu'il fallait démontrer.

Si le point H tomboit sur la circonférence du cercle, ce point H feroit le point K que l'on cherche, & les lignes HP , KP , KO & semblablement les lignes HQ , KQ , KI ne feroient qu'une mesme ligne HP & HQ , d'où l'on prouveroit les mesmes choses qu'on a fait cy-devant, sans avoir besoin de l'hyperbole.

Dans une lettre du 3 septembre 1693 au marquis de l'Hospital (T. X, p. 497) Huygens se dit „fâché de voir qu'on ait mis dans les *Traitez de l'Academie des Sciences* la présente solution du problème d'Alhazen, et „non pas une beaucoup meilleure" sur laquelle on peut consulter, outre cette page du T. X., ce que nous observons au début de l'Appendice II à la Pièce VIII à la p. 330 qui suit.

A notre avis Huygens n'avait pas grande raison d'être fâché. L'hyperbole de la Fig. 19 — nous le disons aussi dans la note 2 de la p. 331 qui suit — est la même que celle de la pièce 1891 de 1672 du T. VII et aussi que celle de la solution et de la démonstration de 1673 de l'Appendice II que nous venons de mentionner lesquelles sont appelées par Huygens sa „plus belle solution et démonstration”.

On voit dans la Fig. 19, quoiqu'ici cela ne soit pas dit, que pour des raisons de symétrie l'autre branche de l'hyperbole doit passer par le point A , ainsi que par le point P .



CONSTRUCTION DE L'HYPERBOLE D'APRÈS SON ÉQUATION AU
MOYEN DE SES ASYMPTOTES.

[1670 ?]

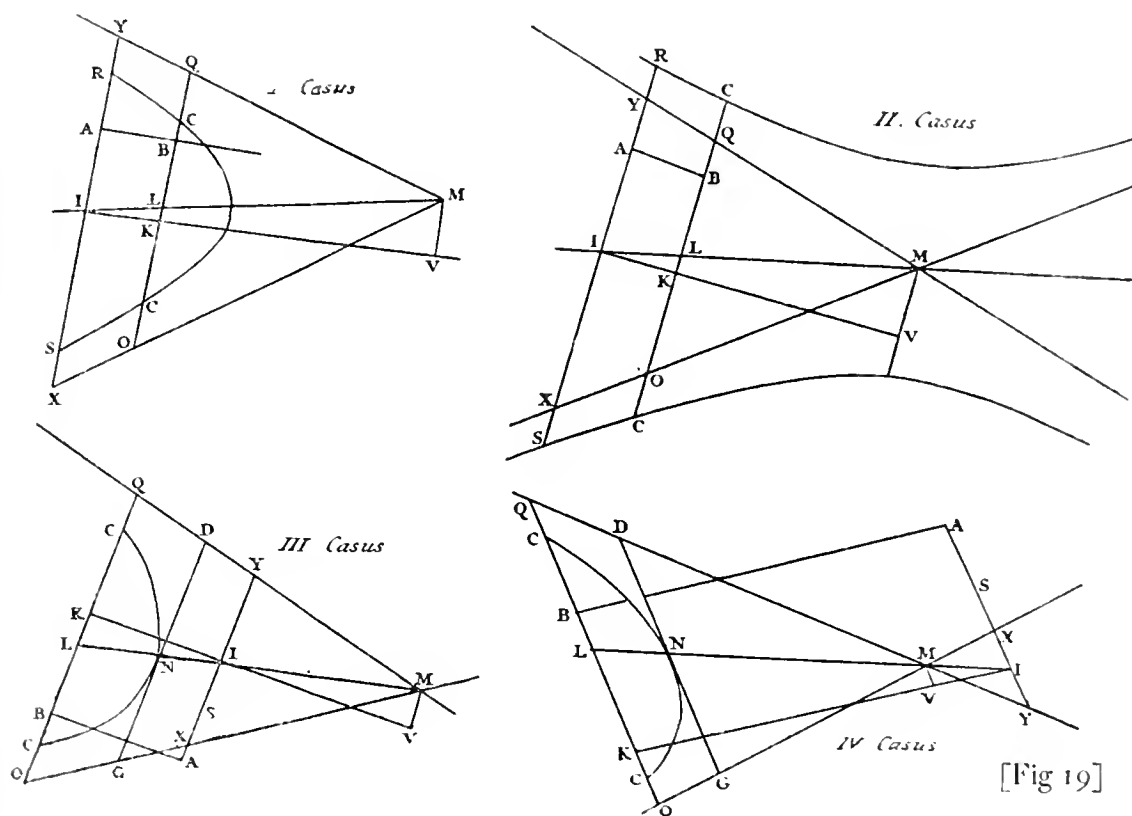
Lorsque, dans l'équation qui correspond à une hyperbole, aucune des deux lignes indéterminées (c. à. d. des variables) n'est multipliée par elle-même, p. e. lorsque l'équation est $xy = bb$ ou $xy = cx \pm b^2$ — où les lettres x et y désignent les lignes droites indéterminées AB et BC [Fig. 19], coordonnées entre elles sous un angle

IX.

CONSTRUCTIO LOCI AD HYPERBOLAM PER ASYMPTOTOS.

[1670?]¹⁾

In æquatione loci ad hyperbolam, si neutra indeterminatarum linearum in seipsam ducta inveniatur, velut si sit $xy = bb$; vel $xy = cx.bb^2$; (literis x et y lineas indeterminatas AB, BC [Fig. 19] significantibus, quæ in dato angulo sibi mutuò sint applicatæ,



¹⁾ Nous empruntons cette Pièce aux „Divers ouvrages” de 1693. Le manuscrit de Huygens qui porte la date du 30 Jan. 1669, fait partie des Chartæ mathematicæ (f. 161—162). Les deux textes, ainsi que les figures, s'accordent parfaitement. Nous avons dit dans l'Avertissement (p. 207, note 57) qu'il nous paraît fort vraisemblable que cette Pièce ait été présentée à l'Aca-

donnée, dont l'une, p.e. AB, est donnée en position, tandis que le point A de cette droite est également donné — la construction se fait aisément par la recherche des asymptotes, comme Fl. de Beaune l'a fait voir dans ses Notes sur la Géométrie de Descartes ³⁾. Nous ferons voir ici que lorsque x^2 et y^2 se trouvent dans l'équation, la construction peut néanmoins être effectuée au moyen des asymptotes, et que ceci est plus court que de rechercher le diamètre ainsi que le *latus rectum* et le *latus transversum*.

Supposons l'équation réduite à la forme $y = \pm l \pm \frac{nx}{z} \pm \sqrt{\pm m^2 \pm ox + \frac{p^2 x^2}{g^2}}$.

En effet, elle peut toujours être réduite à ces termes, de sorte que d'un côté de l'équation il n'y ait rien que y , l'une des deux lignes indéterminées, ordonnée par rapport à l'autre qui est donnée en position, et de l'autre côté un nombre de termes qui n'est pas supérieur à celui de ceux écrits ici; il est vrai que souvent il peut y en avoir moins, puisqu'une seule la présence de $+\frac{p^2 x^2}{g^2}$ et de l'un des deux autres, m^2 ou ox , est nécessaire.

L'angle ABC étant donné, il faut mener par le point A la ligne XY parallèle à la droite BC et y prendre AI égale à l , du côté BC s'il y a $+l$ dans l'équation, du côté opposé s'il y a $-l$. Il faut après cela mener IK parallèlement à AB. Mais s'il n'y a pas de l du tout, la droite IK doit être censée coïncider avec AB.

Ensuite comme z est à n , rapport donné, ainsi soit la longueur arbitraire IK à KL; laquelle doit être menée parallèlement à AI de telle manière que les points K et L soient situés dans le même ordre que A et I s'il y a $+\frac{nx}{z}$ dans l'équation, mais inversement s'il y a $-\frac{nx}{z}$. Il faut ensuite tirer la droite IL; mais si $\frac{nx}{z}$ fait défaut, IL est identique à IK.

quarumque altera, ut AB, positione data intelligitur, & in ea datum punctum A) constructio per asymptotorum inventionem faciliè absolvitur, ut ostensum est à *Fl. de Beaune* in Notis ad Geometriam Cartesii³⁾. Cum verò habetur xx vel yy in æquatione, vel utrumque, nihilominus ad asymptotos rem deduci posse, & quidem brevius quàm ad diametri laterumque recti & transversi inventionem, ostendimus hoc modo.

Sit æquatio ejusmodi reducta, $y = l \cdot \frac{nx}{z} \cdot \sqrt{\frac{mm \cdot ox + \frac{ppxx}{gg}}{}}$ ⁴⁾; semper enim ad hos terminos reduci potest, nempe ut y altera linearum indeterminatarum, quæ applicata est ad positione⁵⁾ datam, sola ab una parte æquationis habeatur, ab altera verò non plures termini quàm hic inveniantur; nam sæpe pauciores etiam esse possunt, cum soli necessarii sint $+\frac{ppxx}{gg}$ cum alterutro horum mm vel ox .

Quum angulus ABC datus sit, ducatur per A punctum linea XY quæ sit rectæ BC parallela, & in ea accipiat AI æqualis l , idque ad partes BC, si habeatur $+l$ in æquatione, in contrarias verò si habeatur $-l$, & agatur IK parallela AB. Si verò non habeatur omnino l , recta IK in AB incidere intelligenda est.

Deinde sicut z ad n , quæ est ratio data, ita sit IK ad libitum sumpta, ad KL; quæ ipsi AI parallela ducenda est, sumendaque hoc pacto, ut puncta KL sita sint quo ordine AI, si habeatur $+\frac{nx}{z}$, at contrà si habeatur $-\frac{nx}{z}$, & ducatur recta per IL; si verò deficit $\frac{nx}{z}$, eadem est IL & IK.

démie, quoique cela ne soit pas dit expressément. Quant à la date de la présentation qui doit être 1670 au plus tôt et 1674 au plus tard, nous supposons qu'elle est plutôt 1670. Le Manuscrit D renferme déjà une page (p. 135), où Huygens désigne son calcul comme bon qui contient les principales équations de la Pièce IX, tandis que les p. 136—138 contiennent, outre des calculs du même genre, une Pièce, plus courte que celle du texte, intitulée „Constructio loci ad hyperbolam”,

commençant par les mots: „Proposita æquatione hujusmodi, $y \propto l \cdot \frac{nx}{z} \cdot \sqrt{\frac{mm \cdot ox + \frac{pp}{gg}xx}{}}$

— voyez la note suivante — quæ relationem denotet inter se rectarum indeterminatarum x et y seu AB.BC...” et se terminant par la phrase „Unde jam hyperbola data erit, ac describi poterit”. Or, les p. 118 et 145 du Manuscrit D portent respectivement les dates 1669 et 1 Febr. 1669.

²⁾ Le . doit désigner ici notre signe \pm . Il en est évidemment de même dans l'équation de Huygens du Manuscrit D reproduite dans la note précédente.

³⁾ Voyez l' „Observatio Quinta” des „Notæ breves” de Florimond de Beaune, se trouvant dans le recueil de 1659 de F. v. Schooten („Geometria à Renato des Cartes etc.”)

⁴⁾ Nous avons restitué les . (désignant \pm , comme plus haut), là où le copiste, ou l'imprimeur, les avait omis.

⁵⁾ Dans les „Opera Varia” de 1724, où la Pièce est reproduite d'après le texte de 1693, on a imprimé par erreur „positionem”.

Maintenant comme p est à g , ainsi soit $\frac{1}{2}o$ à chacune des longueurs IX et IY lesquelles il faut prendre dans la droite AI. Ainsi soit aussi IX à IV laquelle il faut prendre sur IK du côté AB s'il y a $-ox$, mais du côté opposé s'il y a $+ox$. Et soit VM parallèle à AI et puisse-t-elle couper la droite IL en M. Ce point M fera le centre de l'hyperbole cherchée; et les droites MX et MY feront les asymptotes.

Mais s'il n'y a pas de ox dans l'équation, I fera le centre de l'hyperbole. Il faut alors prendre des longueurs quelconques, égales entr'elles, IX et IY, et après que les points V et M ont été trouvés comme précédemment, on peut mener par I, parallèlement à elles, les asymptotes MX et MY.

On trouvera ensuite, s'il y a $+m^2$, les points S et R par lesquels doivent passer ou bien l'hyperbole ou bien les sections opposées: ils seront déterminés en prenant sur la droite AI, à partir du point I, IS et IR, l'une et l'autre égale à m . Alors l'hyperbole sera donnée et pourra être tracée. BC y fera l'ordonnée correspondant au diamètre lorsque $\frac{\frac{1}{2}og}{p} > m$;

mais lorsque $\frac{\frac{1}{2}og}{p} < m$, BC fera parallèle au diamètre de l'hyperbole sur laquelle se trouve le point C comme ici dans le deuxième cas [Fig. 19 II]. Si par hasard le point S tombe en X, le lieu du point C fera donné par les asymptotes elles-mêmes. Et s'il n'y a pas de terme m^2 , I fera lui-même un point de l'hyperbole cherchée.

Mais s'il y a $-m^2$ dans l'équation, il faut placer dans l'angle XMI la droite GN parallèle à IX, telle que $GN^2 = IX^2 + IS^2$, ou bien telle que $GN = IS$ s'il n'y a pas de $-ox$; N fera alors un point de l'hyperbole cherchée qui fera donc de nouveau donnée.

Prenant dans le premier cas $AB = x$, longueur arbitraire, et lui appliquant l'ordonnée BC sous un angle donné, laquelle se termine à l'hyperbole construite, il faut démontrer que

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - ox + \frac{p^2 x^2}{g^2}}.$$

Démonstration. Puisse BC, prolongée de part et d'autre s'il en est besoin, rencontrer les asymptotes en O et Q. D'après la construction IX ou IY = $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$ et IV = $\frac{\frac{1}{2}og^2}{p^2}$. Or, le rapport IK:KL est égal à $z:n$. Et l'angle IKL est également donné. Donc aussi le rapport IK:IL qui soit égal à $z:a$. Par conséquent, comme IK:IL = IV:IM, on aura IM = $\frac{\frac{1}{2}aog^2}{zp^2}$. Or, comme IM est à IX, c.à.d. comme $\frac{\frac{1}{2}aog^2}{zp^2}$ est à $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$, ou bien comme ag est à pz , ainsi est ML, ou MI — IL, c.à.d. $\frac{\frac{1}{2}aog^2}{zp^2} - \frac{ox}{z}$ à LO ou LQ; cette dernière fera donc $\frac{\frac{1}{2}og}{p} - \frac{px}{g}$. Ensuite, puisque BK = l et LK =

Porro ut p ad g , ita sit $\frac{1}{2}o$ ad singulas IX, IV sumendas in recta AI; atque ita quoque IX ad IV sumendam in IK ad partes AB si habeatur $-ox$, aut in contrarias si habeatur $+ox$; & sit VM parallela AI, occurratque rectæ IL in M: erit jam M centrum hyperbolæ quæsitæ; asymptoti vero, rectæ per MX, MY ductæ.

Si verò non habeatur ox in æquatione, erit I centrum hyperbolæ; sumptisque IX, IV ad libitum sed inter se æqualibus, inventisque inde punctis V & M, ut ante, ducuntur asymptoti per I parallelæ ipsis MX, MY.

Jam porro si habeatur $+mm$, puncta S & R, per quæ hyperbola vel oppositæ sectiones transire debent, invenientur sumendo in recta AI à puncto I, singulas IS, IR æquales m : unde jam hyperbola data erit ac describi poterit, in qua BC erit ordinatim applicata ad diametrum, si $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$ major quàm m ; sin verò $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$ minor quàm m , erit BC parallela diametro hyperbolæ ad quam est C punctum, ut hic casu secundo. Quòd si forte punctum S incidat in X, locus puncti C, erunt ipsæ asymptoti. Si verò non habeatur mm , erit ipsum I punctum in hyperbola quæsitæ.

At si habeatur $-mm$, accommodanda est intra angulum XMI recta GN parallela IX, quæque possit quadrata ab IX et IS ⁶⁾, vel tantum ipsi IS æqualis, si non habeatur ox ; eritque punctum N in hyperbola quæsitæ, quæ proinde rursus data erit.

Sumpta enim in casu primo AB = x ad arbitrium, eique applicata BC = y in angulo dato, quæ ad hyperbolam inventam terminetur, ostendendum sit quòd

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}.$$

DEMONSTRATIO.

Occurrat BC utrinque si opus sit producta, asymptotis in O & Q. Ex constructione est IX vel IV = $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$, IV = $\frac{\frac{1}{2}ogg}{pp}$. Ratio verò data IK ad KL, eadem nempe quæ z ad n . Sed & angulus IKL datus est. Ergo & ratio IK ad IL, quæ sit ea quæ z ad a . Ergo quia ut IK ad IL ita IV ad IM, erit IM = $\frac{\frac{1}{2}aogg}{2pp}$. Ut autem IM ad IX, hoc est ut $\frac{\frac{1}{2}aogg}{2pp}$ ad $\frac{\frac{1}{2}go}{p}$, sive ut ag ad pz , ita ML, sive MI minùs IL, hoc est $\frac{\frac{1}{2}aogg}{2pp} - \frac{ox}{z}$ ad LO vel LQ; quæ itaque erit $\frac{\frac{1}{2}og}{p} - \frac{px}{g}$. Porro quia BK = l , & LK = $\frac{nx}{z}$, erit BL

⁶⁾ Le copiste avait écrit par erreur: IX vel IS.

$\frac{nx}{z}$, on aura $BL = l - \frac{nx}{z}$; et en retranchant cette dernière de $BC = y$, on trouve $LC = y - l + \frac{nx}{z}$. Mais d'après une propriété de l'hyperbole le rectangle QCO fera égal au rectangle YSX. D'autre part le rectangle QCO est égal à $LO^2 - LC^2$, c. à. d. au carré de $\frac{\frac{1}{2}g\theta}{p} - \frac{px}{g}$ diminué du carré de $y - l + \frac{nx}{z}$; la différence de ces carrés est

$$\frac{\frac{1}{4}g^2\theta^2}{p^2} - ox + \frac{p^2x^2}{g^2} - y^2 + 2ly - l^2 + \frac{2nxy}{z} + \frac{2lnx}{z} - \frac{n^2x^2}{z^2}.$$

C'est donc cette expression qui est égale au rectangle YSX, c. à. d. à $IX^2 - IS^2$ ou $\frac{\frac{1}{4}g^2\theta^2}{p^2} - m^2$, puisque $IX = \frac{\frac{1}{2}g\theta}{p}$ et $IS = m$. En supprimant $\frac{\frac{1}{4}g^2\theta^2}{p^2}$ de part et d'autre dans cette équation, on trouvera

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - ox + \frac{p^2x^2}{g^2}},$$

ce qu'il fallait obtenir.

Dans le deuxième cas le rectangle QCO est égal à $LC^2 - LO^2$, et le rectangle YSX à $IS^2 - IX^2$. D'où l'on calcule la même valeur pour y que dans le premier cas.

Mais le troisième cas est celui où l'on a $-m^2$, l'équation étant

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-m^2 + ox + \frac{p^2x^2}{g^2}}.$$

Puisse GN prolongée rencontrer l'autre asymptote en D. Ici il apparaîtra de la même manière que plus haut, que LO ou LQ est égale à $\frac{\frac{1}{2}g\theta}{p} + \frac{px}{g}$ et $LC = y + \frac{nx}{z} - l$. Et d'après une propriété de l'hyperbole on aura: rectangle QCO = rectangle DNG ou NG^2 , c. à. d. $\frac{\frac{1}{4}g^2\theta^2}{p^2} + m^2$, puisque $XI = \frac{\frac{1}{2}g\theta}{p}$ et $IS = m$, à la somme des carrés desquelles nous avons rendu égal le carré GN^2 par construction. Or, le rectangle QCO est égal à $LO^2 - LC^2$, c. à. d. à

$$\frac{\frac{1}{4}g^2\theta^2}{p^2} + ox + \frac{p^2x^2}{g^2} - y^2 - \frac{2nxy}{z} - \frac{n^2x^2}{z^2} + 2ly + \frac{2lnx}{z} - l^2.$$

Cette expression est donc égale à $\frac{\frac{1}{4}g^2\theta^2}{p^2} + m^2$. En supprimant $\frac{\frac{1}{4}g^2\theta^2}{p^2}$ de part et d'autre dans cette équation on obtient

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-m^2 + ox + \frac{p^2x^2}{g^2}}.$$

Et la marche de la démonstration est la même dans le quatrième cas et dans tous les autres, en tenant toujours compte des signes + et -.

S'il n'y a pas de $\frac{nx}{z}$ dans l'équation, les points M et V coïncident. Si dans ce cas p

$= l - \frac{nx}{z}$; quâ ablata à $BC = y$, fit $LC = y - l + \frac{nx}{z}$. Propter hyperbolam verò erit rectangulum QCO æquale rectangulo YSX. Sed rectangulum QCO æquale est quadrato LO minus quadrato LC, hoc est quadrato ab $\frac{\frac{1}{2}g^o}{p} - \frac{px}{g}$ minus quadrato ab $y - l + \frac{nx}{z}$; quorum quadratorum differentia est $\frac{\frac{1}{4}g^o}{pp} - ox + \frac{ppxx}{gg} - yy + 2ly - ll + \frac{2nxy}{z} + \frac{2lnx}{z} - \frac{mxx}{zz}$. Ergo hæc æquatur rectangulo YSX, hoc est quadrato IX minus quadrato IS, hoc est $\frac{\frac{1}{4}g^o}{pp} - mm$; quia $IX = \frac{\frac{1}{2}g^o}{p}$ & $IS = m$. In qua æquatione deleto utrinque $\frac{\frac{1}{4}g^o}{pp}$, invenietur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}$, ut oportebat.

In secundo casu rectangulum QCO æquatur quadrato LC minus quadrato LO; & rectangulum YSX quadrato IS minus quadrato IX. Unde rursus valor y idem qui casu primo invenietur.

Sit tertius casus quo habeatur $-mm$, sitque æquatio

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-mm + ox + \frac{ppxx}{gg}},$$

producta GN occurrat alteri asymptoto in D. Hic jam eadem ratione qua prius, apparebit LO vel LQ esse $\frac{\frac{1}{2}g^o}{p} + \frac{px}{g}$, & $LC = y + \frac{nx}{z} - l$. Et propter hyperbolam erit rectangulum QCO = rectangulo DNG seu quadrato NG, hoc est $\frac{\frac{1}{4}g^o}{pp} + mm$, quia $XI = \frac{\frac{1}{2}g^o}{p}$, & $IS = m$, quorum quadratis æquale fecimus quadratum GN. Rectangulum autem QCO æquatur quadrato LO minus quadrato LC, hoc est $\frac{\frac{1}{4}g^o}{pp} + ox + \frac{ppxx}{gg} - yy - \frac{2nxy}{z} - \frac{mxx}{zz} + 2ly + \frac{2lnx}{z} - ll$. Ergo hoc æquale $\frac{\frac{1}{4}g^o}{pp} + mm$. In qua æquatione deleto utrinque $\frac{\frac{1}{4}g^o}{pp}$, invenietur

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}.$$

Eademque est demonstrandi ratio in casu quarto, & aliis quibuscvis, habita ratione signorum + & -.

Cum non habetur $\frac{nx}{z}$ in æquatione, puncta M & V unum sunt, tunc verò si $p = g$,

$= g$, c. à. d. si l'on a x^2 au lieu de $\frac{p^2 x^2}{g^2}$, les asymptotes feront toujours à angles droits, puisque nous avons fait que comme p est à g , ainsi est $\frac{1}{2}o$ à IX et à IV, et aussi IX à IV; ici on aura donc $IX = IV = IV' = \frac{1}{2}o$, de sorte que le point V se trouve sur une demie circonférence de cercle construite sur XY et que l'angle XYY est donc droit.

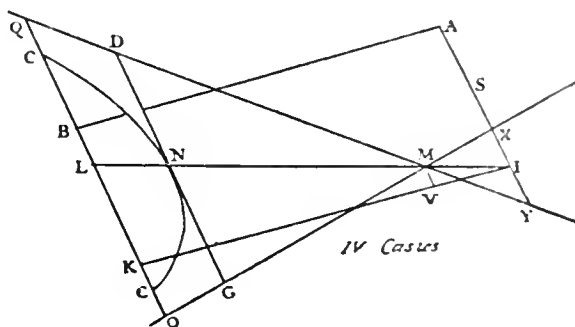
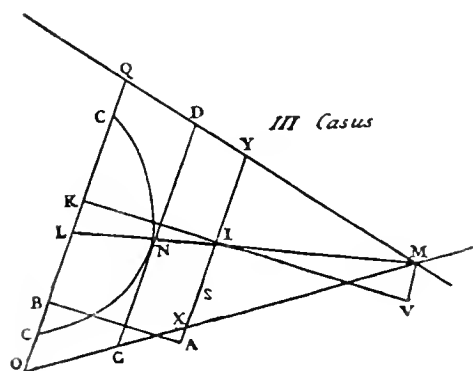
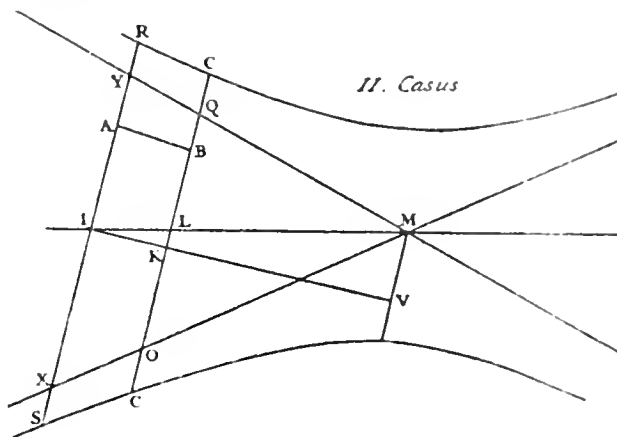
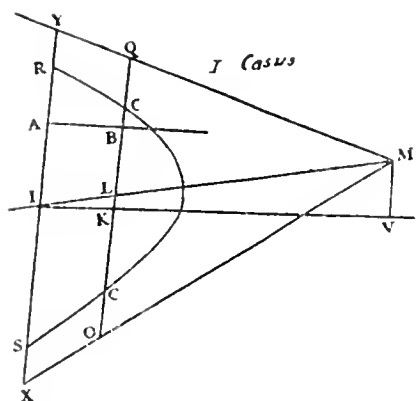
Il paraît en outre, puisque $IM = \frac{\frac{1}{2}aog^2}{zp^2}$, que lorsque $ag = zp$, c. à. d. $g:p = z:a$, on

aura $IM = \frac{\frac{1}{2}og}{p}$: cette longueur fera donc égale à IX et IV qui avaient aussi la valeur

$\frac{\frac{1}{2}og}{p}$. Par conséquent dans ce cas les asymptotes feront à angles droits, puisque cette fois le point M se trouvera sur une circonférence de cercle décrite sur XY du centre I.

hoc est si habeatur $+xx$ pro $\frac{ppxx}{gg}$, erunt semper asymptoti fibi mutuò ad angulos rectos, quia ut p ad g , ita fecimus $\frac{1}{2}o$ ad IX & ad IV, & ita IX ad IV; fiunt enim jam æquales IX, IV, IV & singulæ = $\frac{1}{2}o$, unde punctum V est in semicirculo super XY & proinde angulus XYY rectus. Item quia $IM = \frac{\frac{1}{2}o gg}{zpp}$, patet quod si $ag = zp$, hoc est

[Fig. 19].



si g ad p ut z ad a , tunc erit $IM = \frac{\frac{1}{2}o g}{p}$, ac proinde æqualis ipsi IX & IV quæ etiam erant $\frac{\frac{1}{2}o g}{p}$. Adeoque hoc casu erunt asymptoti fibi mutuo ad angulos rectos; cum rursus punctum M fit futurum in circumferentia circuli descripti super XY centro I.

X.

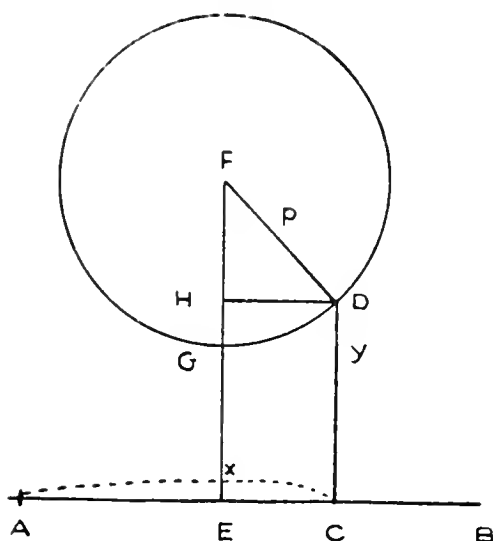
SUR LES LIEUX PLANS D'APOLLONIUS.

1678.

Registres, T. VII, f. 196 v et f. 251 v. Samedi 13^e d'Aoust [1678] M^r. Hugens a donné une démonstration des lieux plans d'Apollonius, et de tous ceux où le lieu du point que l'on cherche est une circonférence de cercle dont fuit la copie.

Construction des lieux plans d'Apollonius, et de tous ceux où le lieu du point que l'on cherche est une Circonférence de cercle.

[Fig. 20].



A [Fig. 20] étant un point donné dans la ligne AB donnée de position; et le point que l'on cherche pour la solution du problème D. Duquel soit menée sur AB la perpendiculaire DC. Si l'indeterminée longueur AC est appelée x et CD aussi indeterminée y , et que l'on trouve une equation¹⁾ dans laquelle d'un costé il y ait yy seul et parmi les termes de l'autre costé — xx sans qu'il y ait xy , comme si de l'autre costé il y a $by . cc . ax - xx$ (étant a, b, c des lignes données) ou seulement — xx avec un ou deux des trois autres termes. Alors le lieu du point D sera toujours une circonférence de cercle duquel on trouvera le centre, et le diamètre de cette façon.

¹⁾ Dans l'équation qui suit le . équivaut apparemment à notre signe \pm (comme dans la Pièce IX qui précède). Il en est de même dans les équations suivantes. Le signe \propto (vers la fin de la Pièce) a la même signification. Nous avons dû apporter plusieurs petites corrections aux équations, le copiste ayant omis le . ou écrit x au lieu de ∞ etc.
Comparez sur le . la p. 230 du T. XIV.

Si le terme by se trouve l'on reduira premierement l'equation a la maniere accoustumée, et l'on aura $y \propto \frac{1}{2}b \cdot \sqrt{\frac{1}{4}bb \cdot cc \cdot ax - xx}$. mais si le terme by n'y estoit point on auroit sans reduction $y \propto \sqrt{cc \cdot ax - xx}$ ensuite si le terme ax se trouue on ajoutera aux termes de $ax - xx$ un autre terme en sorte que le composé des trois fasse un quarré lequel autre terme sera necessairement $-\frac{1}{4}aa$ soit qu'il y ait $+ax$ ou $-ax$. mais afin de conserver l'égalité aux deux costés de l'equation on ajoutera $+\frac{1}{4}aa$ aux termes de $\frac{1}{4}bb \cdot cc$ de sorte qu'il y aura

$$y \propto \frac{1}{2}b \cdot \sqrt{\frac{1}{4}bb \cdot cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}aa \cdot ax - xx}$$

ou il paroist que $-\frac{1}{4}aa \cdot ax - xx$ est un quarré soustrait des quantités connues ayant la racine $\frac{1}{2}a \cdot x$.

Que si au lieu de $\frac{1}{4}bb \cdot cc + \frac{1}{4}aa$ l'on escrit pp l'on aura

$$y \propto \frac{1}{2}b \cdot \sqrt{pp - \frac{1}{4}aa \cdot ax - xx}$$

et la construction sera comme s'ensuit.

Du point A dans la ligne AC l'on prendra AE esgale a $\frac{1}{2}a$ sçavoir vers le mesme costé ou l'on a supposé AC si dans l'equation il y a $+ax$, mais du costé contraire s'il y a $-ax$.

Ensuite du point E on menera EF perpendiculaire sur AB et esgale a $\frac{1}{2}b$, et cela du costé ou l'on a supposé la perpendiculaire CD s'il y a $+\frac{1}{2}b$, ou du contraire s'il y a $-\frac{1}{2}b$; et si $\frac{1}{2}b$ ne s'y trouve point le point F sera le mesme que E. Ce point F sera le centre de la circonference dans laquelle le point D que l'on cherche se trouve partout, et le demy diametre se doit prendre egal à la ligne p .

Que si dans l'equation donnée du commencement le terme ax ne se fut point trouué, l'effectiō du quarré en adjoutant $\frac{1}{4}aa$ n'eust point eu lieu, et l'equation reduitte auroit esté $y \propto \frac{1}{2}b \cdot \sqrt{pp - xx}$ et alors le point C est le mesme que A.

La demonstration de la construction est facile car si par exemple l'equation est $y \propto +\frac{1}{2}b \cdot \sqrt{pp - \frac{1}{4}aa + ax - xx}$ et que l'on ait trouvé la circonference DG suivant ce qui vient d'estre dit; en prenant dans elle quelque point D d'où l'on tire DC perpendiculaire sur AB, et DH perpendiculaire sur FE, alors EC ou DH fera $x - \frac{1}{2}a$ ou $\frac{1}{2}a - x$ et FH $\frac{1}{2}b - y$ ou $y - \frac{1}{2}b$ et les quarrés de FH et HD ensemble $\frac{1}{4}bb - by + yy + xx - ax + \frac{1}{4}aa$ egaux au quarré de FD $\propto pp$ et par consequent $yy \propto pp + by - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa + ax - xx$,

laquelle equation estant reduitte vient $y \propto \frac{1}{2}b \cdot \sqrt{pp - \frac{1}{4}aa + ax - xx}$ qui est la mesme qui a esté donnée. Et dans tous les autres cas la demonstration est la mesme, ou plus facile quand quelques termes manquent dans l'equation, seulement les lignes $+$ et $-$ se changent en différentes manieres.

D'icy l'on peut tirer la regle generale pour ces constructions sçavoir quand l'equation reduitte est $y \propto \frac{1}{2}b \cdot \sqrt{qq \cdot ax - xx}$ sans avoir la peine de former le quarré avec

. $ax - xx$, il faut seulement trouver les points C et F. comme a esté dit en prenant $AE \propto \frac{1}{2}a$ et $EF \propto \frac{1}{2}b$, et le demi diamètre FD sera egal a $qq + \frac{1}{4}aa$.

Cette Regle comprend toutes les equations par les quelles le lieu du point qu'on cherche est une circonference d'un cercle hormis une dont parle Descartes, dans laquelle aam est egal a pzz , ou le lieu en un certain cas peut être une circonference de cercle mais ce cas est tout a fait singulier ²⁾.

²⁾ Il s'agit ici du problème de Pappos discuté par Descartes dans le premier et dans le second livre de „La Géométrie”. A propos du lieu géométrique cherché Descartes dit, dans le second livre, que „c'est [parfois] une ellipse, excepté seulement si la quantité aam est égale à pzz et que l'angle HLC soit droit, auquel cas on a un cercle au lieu d'une ellipse”. L'endroit se trouve à la p. 29 de l'édition de F. v. Schooten de 1683, et les p. 188—189 contiennent le commentaire de v. Schooten sur ce cas particulier.

Dans la Pièce originale, telle qu'elle se trouve au Manuscrit E (p. 130—131), cette remarque finale fait défaut. A-t-elle été ajoutée à la suite d'une discussion à l'Académie?

XI.

RECTIFICATION ET QUADRATURE DE L'ÉPICYCLOÏDE.

1678—1679.

Registres, T. VII, f 227v: Le Samedi 3^e de Decembre 1678 la Compagnie estant assemblée Mr. Huguens a leu les demonstrations de la mesure des lignes epicycloïdes qu'il donnera au premier jour pour mettre dans les Registres.

T. VII, f. 233v: Le Samedi 7^e de Januier 1679 Mr. Huguens a continué la demonstration de la mesure des epicycloïdes.

Cette Pièce qui (malgré la f. 227v du T. VII) ne se trouve pas dans les Registres, mais dont nous possédons le manuscrit, a déjà été publiée par nous §§ 2 et 3 de l'Appendice III à la Troisième Partie de l'„Horologium oscillatorium” dans le T. XVIII (p. 400 et suiv.); Huygens y indique, conformément aux Registres, qu'elle a été lue par lui à l'Académie le 3 décembre 1678.

XII.

SUR LES ÉQUATIONS SOLIDES.

1680.

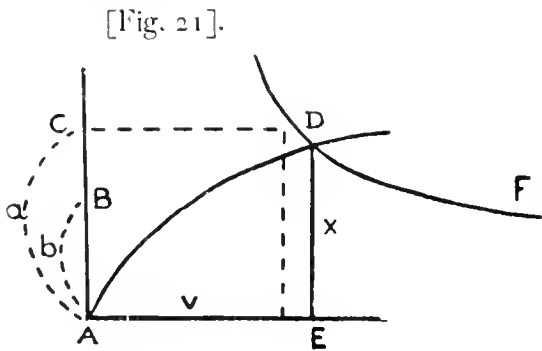
Registres, T. IX, f. 17 : Le Samedy 2^e de Mars 1680... M^r. Hugens a aussi proposé une methode pour trouver les équations folides.

Nous ne possédons pas le texte de cette communication. C'est pourquoi nous reproduisons ici les p. 227—228 du Manuscrit E (les p. 221 et 232 portent resp. les dates du 11 janvier et du 22 mars 1680) qui en contiennent sans doute la substance ou plutôt le début.

*Méthode pour construire les équations cubiques et quarréquarrées
en les resolvant en deux lieux.*

§ 1. Je commenceray par le probleme des 2 moienes entre deux lignes donnees. Soient ces lignes a et b ; l'une des moienes, qui fuit apres a , soit x ; donc l'autre moiene est $\frac{xx}{a}$, et le rectangle de ces 2 ſçavoir $\frac{x^3}{a}$ est egal a ab . Et $x^3 \propto aab$. Je diviſe de coſtè et d'autre par x . Vient $xx \propto \frac{aab}{x}$. J'egale enſuite chaque coſtè, à un rectangle bv , ſuppoſant v inconnue. J'ay donc $bv \propto xx$ et $\frac{aab}{x} \propto bv$ ou $aa \propto xv$. l'un eſtant un lieu a une parabole dont le coſtè droit eſt b . l'autre une hyperbole aux aſymptotes de laquelle le rectangle eſt egal à aa . Je ſuppoſe que l'inconnue x ſoit perpendiculaire ſur l'inconnue v , que je prens dans la droite AE depuis le point A .

Soit AD [Fig. 21] une parabole dont le sommet est A, l'axe AE. le costé droit AB égal à b . Soit aussi aux asymptotes AE, AC que je suppose faire un angle droit, l'hyperbole DF, dont le rectangle soit égal à aa . Et qu'elle coupe la parabole en D d'où soit menée DE perpendiculaire sur AE. Je dis que DE est x , scavoir l'une des moyennes qui suit a . Car il paroît [que] $ax \propto bx$ à cause de la parabole. Et que $ax \propto$



aa a cause de l'hyperbole, ou $bvx \propto aab$, ou $bv \propto \frac{aab}{x}$. Mais xx estoit aussi egal à bv . donc $xx \propto \frac{aab}{x}$. Et $x^3 \propto aab$.

§ 2. Soit derechef $x^3 \propto aab$. $va \propto xx$ parabole dont le parametre est a . $\frac{aab}{x} \propto va$. $ab \propto xv$. hyperbole dont le rectangle est ab .

§ 3. Cette methode consiste a partager l'équation donnée en deux, et par ce moyen la reduire a deux lieux dont l'interfection fasse connoître la racine que l'on cherche. Par ou l'on trouve les constructions les plus simples.

Nous omettons le reste où Huygens répète encore une fois la construction du § 1.

Huygens n'ignore point — comparez la p. 223 du T. XII — que cette méthode n'est autre que celle de Ménachme; à la p. 235 du même Manuscrit on trouve ce qui suit:

$$\begin{array}{rcl} x^4 \propto aabx. & xv \propto \frac{x^4}{aa} & bx \propto xv \\ \hline v \propto \frac{xx}{a} & & \\ \hline av \propto xx \end{array}$$

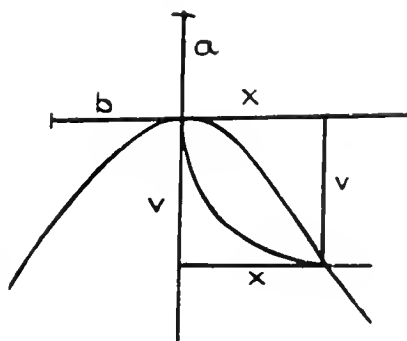
deux paraboles de Menechme [Fig. 22].

Ici v est précisément la deuxième moyenne proportionnelle: on a $a:x = x:v = v:b$. Il en est de même dans le § 2 lequel donne une deuxième construction de Ménachme rapportée, comme la première, par Eutokios.

Huygens n'est plus ou moins original que dans le § 1 où v ne désigne pas la deuxième moyenne proportionnelle.

Dans la suite de son discours à l'Académie Huygens a sans doute donné d'autres exemples. En effet, à la p. 227 du Manuscrit E il écrit en marge: Cette methode est dans le livre D [antérieur à 1680], pratiquée sans explication dans quelques exemples, comme des 2 moyennes proportionnelles et de la perpendiculaire a une hyperbole d'un point donné. Voyez, aux p. 334—360 qui suivent, l'Appendice de 1682, tiré du Manuscrit 11; et consultez surtout les notes 4 et 5 de la p. 335 sur les relations de Huygens avec de la Hire. Dans la f. 66 des Chartæ mathematicæ, qui traite aussi des normales abaissées d'un point donné sur une conique, Huygens renvoie également au Manuscrit D. Nous n'y trouvons cependant pas l'endroit dont il entend parler. Il s'agit peut-être d'un feuillet enlevé.

[Fig. 22]



XIII.

THÉORÈME SUR LES POINTS D'INTERSECTION DES CONIQUES DONT LES AXES SONT PARALLÈLES OU À ANGLES DROITS.

Le théorème principal est précédé par deux autres propositions qu'on peut considérer comme des lemmes.

1680 ¹⁾.

Registres, T. IX, f. 32: Le Samedi 23 de Mars 1680... M^r Hugens a donné le théorème suivant touchant les sections coniques.

(Le brouillon du Manuscrit E — voyez l'Appendice — porte la date du 22 mars 1680.)

Theoreme. Si une section conique coupe une autre section conique en 4. points, et que leurs axes soient paralleles ou a angles droits l'un a l'autre ces quatre points seront dans la circonference d'un cercle. Les hyperboles opposees sont comptees pour une section.

D'où sensuit que si une section conique coupe une parabole en 4 points ayant leur axes paralleles ou a angles droits l'un a l'autre, la somme des perpendiculaires, qui tombent des points d'interfection sur l'axe de la parabole d'un, et d'autre costé seront egales, ou l'une perpendiculaire d'un costé aux trois de l'autre.

Registres, T. IX, f. 33—35: Le Samedi 30^e de Mars [1680] M^r Hugens a donné la demonstration du Theoreme qu'il auoit proposé des sections coniques qui se coupent en 4. points dont suit la copie.

1^{re} Proposition.

Si une parabole est coupée par une section conique en 4 points, et que leur axes soient paralleles ou a angles droits l'un a l'autre les perpendiculaires menées des 4 points d'interfection sur l'axe de la parabole d'un costé et d'autre, auront leurs sommes egales, ou l'un d'un costé sera esgale aux trois de l'autre costé.

Cecy se demontre facilement par Algebre, parce qu'en mettant pour inconnue l'une de ces perpendiculaires, il paroît qu'on parvient necessairement a une equation quarréquarrée, ou manque le second terme sçavoir celui qui est affecté sous le cube, d'où l'on sçait que les valeurs affirmées de cette inconnue sont ensemble egales aux valeurs negatiues de la mesme, c'est a dire les perpendiculaires d'un costé ensemble egales a celles de l'autre costé, ou l'une aux trois ²⁾).

1) Comparez la note 5 de la p. 284 du T. VIII.

Voyez sur la publication de la Pièce XIII par F. Schuh en 1921 le début de la partie B de l'Appendice.

2) La parabole étant représentée par l'équation $y^2 = 2px$, l'ellipse ou hyperbole ayant un de ses

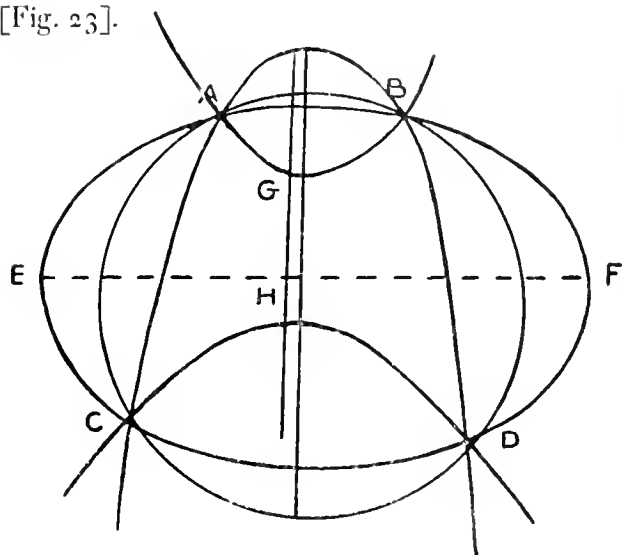
2^e Proposition.

Par trois points donnez qui ne soient pas en une ligne droite, l'on peut decrire une parabole dont l'axe soit parallèle à une ligne donnée, pourveu que les points soient donnez en sorte, que des paralleles qu'on menera de chacun à la ligne donnée, il n'y en ait point de coincidentes.

Ce probleme se construit aisément par la conuerse de la 49^e du 1. Livre des Coniques³⁾.

3^e Proposition.

[Fig. 23].



Si deux sections coniques se coupent en 4 points, et que leurs axes soient paralleles ou à angles droits l'un à l'autre, les 4 points d'intersection sont dans la circonference d'un cercle.

Les hyperboles opposees sont comptees pour une section.

Soient deux sections coniques [Fig. 23] dont les axes EF, GH soient paralleles ou à angles droits et les 4. points de leur intersection A, B, C, D, je dis qu'ils sont dans la circonference d'un cercle.

axes parallèle à celui de la parabole s'écrira (nous nous servons d'équations de formes modernes)

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \text{ En éliminant } x, \text{ on trouve en effet une équation du 4}^{\text{ième}} \text{ degré}$$

en y où manque le terme en y^3 . Il en résulte que la somme algébrique des quatre valeurs de y qui satisfont à cette équation est nulle; or, ce sont là les quatre perpendiculaires des points d'intersection des deux coniques sur l'axe de la parabole. Il en est de même lorsque la deuxième conique est une parabole dont l'axe est parallèle à celui des y .

³⁾ Apollonios, Conica I, prop. 49 (d'après le texte latin de l'édition de I. L. Heiberg, Lipsiae, Teubner, 1891): „Si recta parabolam contingens cum diametro concurrir, per contactum autem recta diametro parallela ducitur, a uertice autem recta ordinate ductae parallela, et fit, ut pars contingentis inter ordinate ductam punctumque contactus posita ad partem parallelae inter punctum contactus et ordinate ductam positam, ita recta aliqua ad duplam contingentis, quaecunque recta a sectione [contingenti parallela] ad rectam per punctum contactus diametro

DEMONSTRATION.

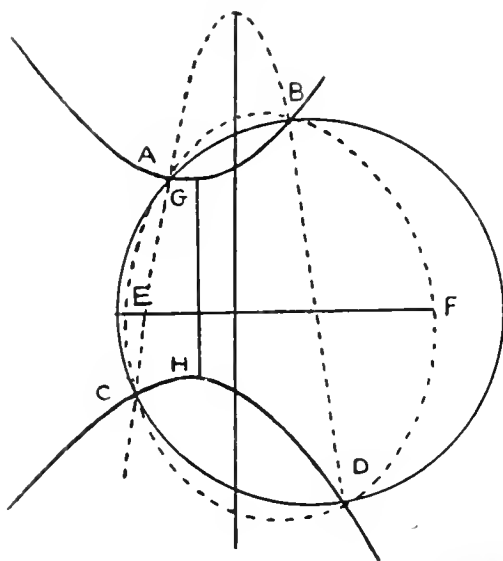
Il y aura toujours nécessairement 3. de ces points situés en sorte qu'on puisse décrire une parabole par les trois, de laquelle l'axe soit parallèle à l'axe de l'une des sections coniques données; ou bien les quatre points constitueront un rectangle, et ainsi ils seront manifestement dans la circonférence d'un cercle. Soient les trois points A, B, C [Fig. 23 bis] et la parabole décrite CAB laquelle coupera nécessairement chacune des sections données dans un quatrième point, et je dis que ce point sera D, ou ces deux sections se coupent entr'elles.

Car puisque la parabole coupe la section GH, les perpendiculaires menées des points A, B, C et du 4^e point d'intersection sur l'axe de la parabole auront leurs sommes égales de part et d'autre par la 1.^{re} proposition. Et puisque la même parabole coupe la section EF les mêmes perpendiculaires des points A, B, C sur l'axe de la parabole, et celle du 4^e point d'intersection auront encore leurs sommes de part et d'autre égales, donc cette 4^e perpendiculaire est nécessairement la même pour l'intersection de la parabole avec les deux sections GH et EF puisqu'il n'y a pas deux appliquées de même

longueurs sur l'axe de la parabole, et du même côté, donc les points d'intersection de la parabole avec les deux sections coniques outre les intersections A, B, C conviennent en un et par conséquent ce point est D ou les deux sections s'entrecoupent.

Mais un cercle passant par les points A, B, C [Fig. 23 bis] doit aussi couper la parabole en un 4^e point en sorte que les appliquées de ce point et des points A, B, C sur l'axe de la parabole aient leurs sommes égales de part et d'autre. donc ce 4^e point est encore le même ou la parabole coupoit les deux sections sçavoir le point D et ainsi il paroît que les 4 points A, B, C, D sont dans la circonférence d'un cercle.

[Fig. 23 bis]



parallelam ductam ducitur, quadrata æqualis est rectangulo comprehenso recta adsumpta rectaque ab illa ad punctum contactus abscisa". La „recta adsumpta" est le double paramètre $2p'$ de l'équation $y'^2 = 2p'x'$ de la parabole par rapport à des axes obliques conjugués (diamètre et tangente). On peut en effet déduire du théorème énoncé que lorsque la direction du diamètre et trois points de la parabole sont donnés, celle-ci est déterminée; la construction du paramètre peut être effectuée.

APPENDICE I¹⁾

À LA PIÈCE I DE LA P. 225

(RÈGLE POUR TROUVER LES LOGARITHMES, 1666 OU 1667).

[1661 ?]

[Fig. 24]



§ 1. Data multitudine proportionalium, minore termino et ratione proportionis, invenire proportionalium summam.

Sint proportionales continuè [Fig. 24]²⁾ $a \ b \ \frac{bb}{a} \ \frac{b^3}{aa} \ \frac{b^4}{a^3}$ quarum minor terminus a . Ratio proportionis a ad b . Quæritur summa dictarum proportionalium³⁾.

$$\begin{array}{r} b - a - a + x - x \\ \hline x \propto \frac{aa}{b - a} \end{array}$$

Fiet ut $b - a$ ad a ita a ad $\frac{aa}{b - a}$. Tunc erunt continue proportionales, et in portione a ad b , istæ

¹⁾ Manuscrit 14, f. 14 et suiv. Les feuilles antérieures du Manuscrit contiennent d'abord quelques dessins de 1658 (voyez celui d'octobre 1658 en tête du présent Tome), ensuite quatre pages „de motu corporum reflexo sive de Percussione Hypotheses” (voyez les p. 52—53 du T. VII) et quatre pages de calculs sur les normales à la parabole etc.; c'est tout. Après les calculs sur les capitaux et les intérêts, le Manuscrit contient six pages sur le cours du Rhin etc.; ce sont des extraits de documents allant de 1636 à 1670. Pour être complets nous mentionnons aussi (beaucoup plus loin dans le manuscrit qui contient après les extraits un grand nombre de pages vides) deux pages consacrées à des notes payées par Huygens en 1664, 1665 et 1666: voyez à la p. 168 du T. XVII la note de 1664 de l'horloger Oosterwijck. Rien certes n'empêche que les calculs qui constituent le présent Appendice ne datent de 1661, époque à laquelle Huygens dit (p. 12 qui précède) avoir commencé à s'intéresser aux logarithmes. Dans les calculs des §§ 1—6 les logarithmes ne figurent qu'au § 1. Mais voyez aussi le § 7.

²⁾ Comparez avec cette figure celle de 1652 de la p. 209 du T. I, la „logarithmique” dont nous parlons aussi à la p. 204 de l'Avertissement qui précède.

³⁾ Déjà en 1646 (T. XI, p. 53 et suiv.) Huygens s'était intéressé à la recherche de la somme des suites géométriques, mais sans se servir de logarithmes.

$$\frac{aa}{b-a}; \frac{aa}{b-a} + a; \frac{aa}{b-a} + a + b; \frac{aa}{b-a} + a + b + \frac{bb}{a};$$

$$\frac{aa}{b-a} + a + b + \frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa} \dots$$

quarum ab ultima si auferatur $\frac{aa}{b-a}$ patet residuum æquari summae proportionalium quaesitae.

per Logarithmos.

A duplo logar². termini minoris auferatur log¹. differentiae inter terminum minorem et sequentem, et habebitur logar. $\frac{aa}{b-a}$. Residuo addatur logar. proportionis datae, hoc est differentia log^{orum} termini minoris et sequentis sive quorumlibet duorum continue sequentium, multiplicatus per numerum multitudinis terminorum. Summa erit logar. numeri, a quo numero si auferatur numerus logarithmi $\frac{aa}{b-a}$ ante inventi; relinquitur summa proportionalium quaesita.

§ 2. Iisdem datis, invenire proportionalium summam triangularem incipiendo a minima.

a	b	$\frac{bb}{a}$	$\frac{b^3}{aa}$	$\frac{b^4}{a^3}$	Cum sint proportionales supra inventae $\frac{aa}{b-a}$ $+ a; \frac{aa}{b-a} + a + b; \frac{aa}{b-a} + a + b + \frac{bb}{a};$ $\frac{aa}{b-a} + a + b + \frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa}; \dots$ idque in ratione a ad b . inveniatur earum summa per praecedentem. ab qua si auferatur $\frac{aa}{b-a}$ toties quot sunt termini, facile apparet residuum fore summam triangularem quaesitam.
a	b	$\frac{bb}{a}$	$\frac{b^3}{aa}$		
a	b	$\frac{bb}{a}$			
a	b				
a					

$5a + 4b + \frac{3bb}{a} + \frac{2b^3}{aa} + \frac{b^4}{a^3}$ § 3. Aliter. Proportionalium $a, b, \frac{bb}{a}$ &c sum-

ma per praeced. reperta vocetur s . Cum itaque in eadem proportionione a ad b sint quoque proportionales aequae multae $\frac{aa}{b-a} + a; \frac{aa}{b-a} + a + b; \&c.$ erunt ut a ad s ita

$\frac{aa}{b-a} + a$ ad summam omnium posteriorum. sive permutando ut a ad $\frac{aa}{b-a} + a$, hoc est, ut $b - a$ ad b ita s ad summam omnium posteriorum, a qua si auferatur $\frac{aa}{b-a}$

ductum in numerum terminorum, relinquitur ut ante summa triangularis proportionalium $a, b, \frac{bb}{a}$ &c. incipiendo ab a .

§ 4. Prima propositio aliter.

$a \dashv m \dashv \frac{aa}{b-a} + a \dashv n$ Sit m maxima proportionalium : a minima;
 $b - a \dashv b \dashv m \div \frac{bm}{b-a} \propto n$ b quæ proxime post a sequitur. s summa
 proportionalium $a, b, \frac{bb}{a}$ &c. n maxima pro-
 portionalium feriei $\frac{aa}{b-a} + a, \frac{aa}{b-a} + a + b$ &c. Quum sint in prima propositione
 proportionales $\frac{aa}{b-a} + a; \frac{aa}{b-a} + a + b; \&c.$ totidem quot $a, b, \frac{bb}{a}$ &c. et in
 ratione eadem a ad b patet esse sicut a ad maximam proportionalium $a, b, \frac{bb}{a}$ &c.
 ita $\frac{aa}{b-a} + a$ ad maximam sui ordinis n . A qua si auferatur $\frac{aa}{b-a}$, fit (ut ex eadem
 prima propositione patet) residuum $n - \frac{aa}{b-a}$ æquale summae s proportionalium $a,$
 $b, \frac{bb}{a}$ &c. Sed $n \propto \frac{bm}{b-a}$. Ergo $s \propto \frac{bm - aa}{b-a}$.

§ 5. Secunda aliter.

Erat $b - a \dashv b \dashv s \dashv$ summam posteriorum.

Ergo $b - a \dashv b \dashv \frac{bm - aa}{b-a} \div \frac{bbm - baa}{bb - 2ba + aa} \left\{ \begin{array}{l} s. 4) \\ \frac{taa}{b-a} \end{array} \right.$

Summa triangulorum (t numerus terminorum)

$$a, b, \frac{bb}{a} \&c. \quad \frac{bbm - baa}{bb - 2ba + aa} - \frac{taa}{b-a}$$

§ 6.¹ Si series proportionalium ab a infinitè parva incipere ponatur sive, ab m maxi-
 ma, deorsum continuari in infinitum, patet ex regulis præcedentibus, cum a ad m
 infinite parvam rationem habeat, fore summam omnium in infinitum proportionalium
 $\propto \frac{bm}{b-a}$. Item summam triangularem omnium $\propto \frac{bbm}{qu. b-a}$.

⁴) C. à. d. subtrahendo.

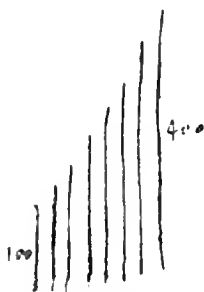
§ 7. Tegen hoeveel ten hondert in 't jaer foudemen fijn gelt moeten beleggen, mids oock intereff van intereff ontfangende, om ten eynde van 41 jaer 3 capitalen boven het fijne te winnen? Antwoord: tegen 3 en $\frac{44}{100}$ per cento.

Omdat in als 4 capitalen moeten fijn, welke 4 capitalen maecken de grootfte van 42 proportionalen, daer de cleynfte van is 100 en de grootfte 400, foo divideer ick de differentie der logarithmi van 400 en van 100, te weten 0,60206, door 41, en de quotiens 1468 addeer ick tot de logar. van 100. komt 2,01468, fijnde logar. van 103,44. daerom is het capitael metten intereff ten eynde vant eerfte jaer $103, \frac{44}{100}$.

En dienvolgens den intereff van 100 in een jaer, $3 \frac{44}{100}$.

Ick heb gefegt 42 proportionalen om dat die 41 differentien maecken.

[Fig. 25].



La figure donnée par Huygens pour illustrer le texte [Fig. 25] fait voir que, tout aussi bien que Zarline (note 1 de la p. 171 qui précède) et Merfenne (p. 33 qui précède, l. 2 d'en bas), il se figure comme des *lignes* les moyennes proportionnelles qu'il s'agit d'intercaler entre les deux quantités données. Il est évident que si la figure était correctement tracée les extrémités des lignes verticales équidistantes ne se trouveraient pas sur une ligne droite mais sur une logarithmique comme dans la Fig. 24 du § 1. La même remarque s'applique à quelques figures du même genre dans la „Chilias Logarithmorum” de 1624 de Kepler, ouvrage que Huygens ne mentionne d'ailleurs nulle part.

Les pages suivantes du Manuscrit contiennent encore plusieurs autres calculs, également rédigés en flamand, sur des capitaux placés à intérêt; il y est fait usage de logarithmes et de la formule $s = \frac{bm - a^2}{b - a}$ du § 4.

APPENDICE II¹⁾

À LA PIÈCE I DE LA P. 225

(RÈGLE POUR TROUVER LES LOGARITHMES, 1666 OU 1667).

[1661]

Radix²⁾ quintò extracta ex 2 est 10218971486541, hæc est *f*. Radix sexto extracta ex 2 est 10108892860517, hæc est *g*.

Hinc invenitur n in $a - \frac{ad}{f} \infty 23276918325789^3)$, unde logarithmus numeri 2 fit 30102999567 in quo decem notæ veræ sunt undecima unitate veram superat.

Cujuslibet numeri primi denario minoris logarithmus inveniri potest⁴⁾ extrahendo sexies radicem continuè; et deinde ternis magnis divisionibus et una multiplicatione.

una enim divisio est $\frac{100fd}{81f + 81d + 108g}$, altera $\frac{ad}{f}$, tertia $\frac{n \text{ in } a - \frac{ad}{f} \dots}{p \text{ in } a - d}$.

multiplicatio est $n \text{ in } a - \frac{ad}{f}$.

Sunt autem hæ extractiones radicum multo minus operosæ quam quibus utebantur in vulgari logarithmorum inventione, ubi ex 32^{bus} characteribus cum totidem zero adjunctis extrahebant, idque quadrages circiter ut habeantur decem characteres logarithmi veri. Si⁵⁾ dati numeri qui denario major sit, invenire logarithmum libeat; extrahatur ab eo toties continue radix quadrata donec ultimo extracta minor sit radice sexta ex 10, nempe 10366 &c. Voceturque ultimo extracta *g*, penultima *f*; omniaque dein-

¹⁾ Voyez sur cette Pièce, empruntée à la f. 11 v du portef. „Musica” — ce qui indique que la date de la f. 11 est 1661; comparez la p. 145 qui précède — la p. 205 de l’Avertissement qui précède.

²⁾ Voyez sur ces calculs la p. 458 du T. XIV, ainsi que la „Regle pour trouver les logarithmes” — communication de Huygens à l’Académie de 1666 ou 1667 —, mentionnée dans la note 1 de la p. 452 du T. XIV et publiée à la p. 225 qui précède.

³⁾ Ce nombre devrait être, semble-t-il, la 54^{ième} partie du nombre 12569535892606 qu’on trouve à la p. 226 qui précède. Toutefois la dite partie, savoir 232769183196, est *un peu* plus petite que le nombre formé par les douze premiers chiffres de celui de texte. Les neuf premiers chiffres sont les mêmes.

⁴⁾ Voyez la note 2 de la p. 451 du T. XIV.

⁵⁾ Cet alinéa (jusqu’à „numeri propositi logarithmus”) s’accorde presque textuellement avec le deuxième alinéa de la p. 459 du T. XIV. Comparez la note 7 qui suit.

ceps eodem modo peragantur ut prius; et inveniatur hac ratione logarithmus radicis quæ septima ab ultimo extracta numeratur, sive quæ sex locis illam præcedit; idque æque accurate atque modo logarithmum binarij invenimus, nempe ad 10 caractères veros. Inventum deinde logarithmum duplicando exister logarithmus radicis octavæ ab ultima; et rursus duplicando, nonæ; atque ita porro duplicatio continuabitur donec existat ipsius numeri propositi logarithmus. nullus autem numerus infra 100 000 000 opus habebit pluribus quam 9 extractionibus radicum.

Quia logarithmus denarij ad logarithmum numeri quæsitum (nempe hic ad logarithmum binarij) compositam habet rationem, uti jam vidimus, ex $a - d$ ad $a - \frac{ad}{f}$ et ex p. ad n; ratio autem p ad n, hoc est $\frac{100 ad}{81d + 81a + 108b} + \frac{20b}{27} - \frac{a-d}{18}$ ad $\frac{100 fd}{81d + 81f + 108g} + \frac{20g}{27} - \frac{f-d}{18}$ eadem est (si utrinque multiplicemus per 54) quæ $\frac{200ad}{3d + 4a + 4b} + 40b - 3a - 3d$ ad $\frac{200fd}{3d + 3f + 4g} + 40g - 3f - 3d$. Idcirco potius has utraq; summas vocabimus p et n. Eritque Regula ad inveniendos logarithmos hujusmodi ⁶⁾.

Habeantur ⁷⁾ radices primum continuè à denario extractæ usque ad sextam vel septimam characterum 14. Et radix ultimo extracta vocetur b , quæ vero penultimo sive illam præcedens vocetur a . Et unitas vocetur d . Omnia autem ducta intelligantur in 1 (13 ⁸⁾) ut radicem fractio evanescat.

Radix quinta ex 10 est 10746078283213 a

Radix sexta ex 10 est 10366329284377 b

Unitas vero 10000000000000 d

Iam inveniatur numerus æqualis istis simul

$$\frac{200 da}{3d + 3a + 4b} + 40b - 3a - 3d$$

⁶⁾ Voyez la note 4 de la p. 459 du T. XIV.

⁷⁾ Tout ce qui suit (excepté la remarque finale en marge) s'accorde presque textuellement avec le début de la Pièce des p. 458—459 du T. XIV.

⁸⁾ C. à. d. un 1 suivi de 13 zéros.

⁹⁾ En 1668 (T. VI, p. 276) Huygens parle également avec éloges de la „Logarithmo-Technia” de N. Mercator qui venait de paraître. Il est évident qu'il a ajouté cette remarque à la présente Pièce longtemps après la composition. — Voyez aussi sur l'ouvrage de Mercator la p. 431 du T. XIV ainsi que la communication de Huygens du 17 octobre 1668 à l'Académie Royale des Sciences (p. 260 qui précède), dont il est déjà question à la page 431 nommée.

qui numerus vocetur p (est autem 55966103584532) idemque ducatur in $a - d$, ac productus inde vocetur v , qui numerus ad omnes logarithmos inveniendos adhibebitur, estque 4175509443116778. Sed hos priores characteres adhibere sufficit. Si igitur ex. gr. sit inveniendus logar. binarij; habeantur et hujus radices quinto sex-
toque extracti sicut de denario diximus et

Radix quinta ex 2, nempe 10218971486541, vocetur f .

Radix sexta 10108892860517, vocetur g .

unitas ut ante 10000000000000, vocetur d .

Similiter quoque inveniatur numerus æqualis istis simul

$\frac{200df}{3d + 3f + 4g} + 40g - 3f - 3d$ qui numerus vocetur n . In hoc exemplo est
545869542830178.

Hic numerus n ducatur in $a - \frac{ad}{f}$, productusque inde vocetur s , qui est

12569535892606 &c. Jamque sicut inventus numerus v ad s ita logarithmus denarij ad logarithmum quæsitum propositi numeri, nempe hic 0,30102999567. Pro characteristica præponitur 0, idque scimus faciendum quando datus numerus minor est denario.


En marge: Regula ad inveniendos logarithmos. his multo meliora suppetunt ex quadratura hyperbolæ N. Mercatoris⁹).

APPENDICE I

À LA PIÈCE II DE LA P. 229
(DEMONSTRATIO REGULAE DE MAXIMIS ET MINIMIS, 1667).

[1660] ¹⁾.

Ex opere Vincentij Viviani Magni Ducis Etruriæ Mathematici de Maximis et Minimis ²⁾. Testatur tum ipse tum Pr. Leopoldus non sibi visos Apollonij libros 3 posteriores ³⁾.

Problema. (l. 2. pr. 20  ⁴⁾ — in hyperbola pr. 22 ⁵⁾. — in ellipti 23 ⁶⁾).

A puncto data ad sectionem conicam brevissimam lineam ducere, ope hyperbolæ solvit. Potest autem per circulum fieri ⁷⁾. Illud tamen in toto volumine optimum, et dubito annon alicunde mutuatus sit ⁸⁾.

¹⁾ Manuscrit A, p. 233. A la même page un extrait „ex literis Caroli Dati ad Nic. Heinsium datis 16 Mart. 1660”. Nous l'avons publié à la p. 42 du T. III.

²⁾ „De Maximis et Minimis geometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergæi adhuc desideratum”. Ad Serenissimum Ferdinandum II magnum ducem Etruriæ, auctore Vincentio Viviani. Florentiæ MDCLIX. Apud Ioseph Cocchini, Typis Novis, sub signo Stellæ.

³⁾ La Dédicace est datée „Oëtauo Calendas Ianuarij 1658” et la „Præfatio” „Oëtauo Idus Decembris 1658”. Dans cette préface Viviani parle de l'édition des livres 5—7 d'Apollonios que prépare Borelli: comparez la note 8 qui suit. Outre Viviani et le grand duc Leopoldo frère de Ferdinando, Borelli lui-même y déclare „che [Viviani] non hà havuto minima notizia di questi ultimi libri d'Apollonio”.

⁴⁾ La figure représente évidemment une parabole. En effet la Prop. 20 est la suivante: Probl. I. Prop. XX. „A dato puncto ad datae Parabolæ peripheriam, minimam rectam lineam ducere”.

⁵⁾ Probl. II. Prop. XXII du même livre: „A dato puncto, ad datae Hyperbolæ peripheriam, minimam rectam lineam ducere”.

⁶⁾ Probl. III. Prop. XXIII: „A dato puncto, ad datae Ellipsis peripheriam, maximam, & minimam rectam lineam ducere”.

⁷⁾ Voyez, à la p. 61 du T. III, la lettre de Huygens à N. Heinsius du 7 avril 1660 où il dit avoir reçu le livre de Viviani par l'entremise de Car. Datus, et où il mentionne sa construction „per

circulum" déjà publiée pour le cas de la parabole. Voyez aussi à la p. 335 qui suit la Partie A de l'Appendice à la Pièce XII de 1680 sur les équations solides.

⁸⁾ Voici le reste du texte de la p. 233 du Manuscrit A se rapportant au livre de Viviani (le premier alinéa — „Quantum etc.” — se trouve en effet à la troisième page de la „præfatio”):

De Galileo in præfatione ad Lectorem. Quantum Heroa nomino? quantum Florentiæ decus, lumen seculi, ingeniorum phoenicem, sydus, solemque universæ Matheseos? quale dixerim numen ac genium corrigendæ Geographiæ, astronomiæ novis phænomenis ope telescopii detectis illustrandæ, vindicandæque Philosophiæ, in orbis admirationem, ac posteritatis regulam natum.

E discipulis Galilei commendat [egalement dans la „præfatio”] Braccium Manettum jam defunctum, Andream Arrighettum Senatorem ac primæ notæ muneribus in Patria [c. à. d. à Florence] fungentem.

Carolus Datum [T. II, p. 462] matheseos, liberæque et indepravatæ Philosophiæ nobilem amatorem. hujus amoenissimas doctissimasque lucubrationes promittit.

Johannes Alphonfus Borellus [T. II, p. 252], Pisis Mathematicas proficitur, editor 3 librorum posteriorum Apollonij. Ex Arabico vertit Abraham Ecchellensis, natione Arabs linguarum orientalium peritissimus, matheseos non ignarus [voyez la note 2 de la p. 393 du T. XVIII].

Laurentium Magalottum [T. III, p. 148] adolescentem laudat, suumque opus cum eo communicasse scribit.

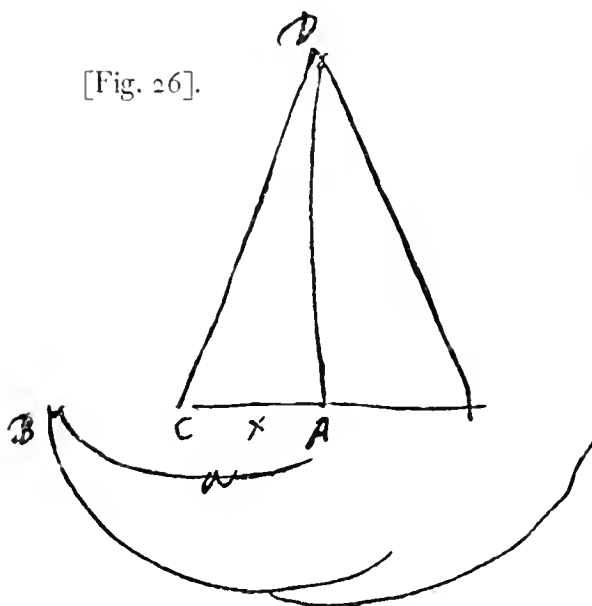
APPENDICE II¹⁾

À LA PIÈCE II DE LA P. 229

(DEMONSTRATIO REGULAE DE MAXIMIS ET MINIMIS, 1667).

[1669].

[Fig. 26].



§ 1. Radius dati circuli est a ,
quæritur conus maximus [Fig.
26] cujus superficies cum basi
æqualis sit dato circulo. Invenio
radius basis $[x]$ fore $\propto \frac{1}{2}a$,
latus con $[y]$ $\propto \frac{3}{2}a$.

$$\frac{xx + xy \propto aa}{y \propto \frac{aa - xx}{x}}$$

¹⁾ Manuscrit D, p. 229 et 231. On trouve les dates Juin 1669 et 21 Nov. 1669 respectivement aux p. 217 et 235. Dans l'un et l'autre paragraphe Huygens applique la règle démontrée par lui dans la Pièce II (règle de Fermat ou de Hudde). Dans le § 2 il multiplie respectivement par 1 et 3, non pas par 2 et 6, puisqu'ici il considère apparemment x^2 , et non pas x , comme la grandeur inconnue.

Il est évident sans aucun calcul qu'il s'agit dans l'un et l'autre cas d'un maximum, non pas d'un minimum. Toutefois Huygens vérifie numériquement le résultat obtenu, du moins dans le cas du § 1, en prenant d'abord, pour $AB = 2000$ [Fig. 26], $AC = 1000$, donc $DC = 3000$; ensuite, pour $AB = 2000$, $AC = 1004$ ou $AC = 996$: dans ces deux derniers cas le volume devient en effet plus petit que pour $AC = 1000$.

$$\frac{a^4 - 2aaxx + x^4}{xx} - xx \left[= AD^2 \right]$$

$$xx \sqrt{\frac{a^4 - 2aaxx}{xx}} \propto d^3 \text{ [volume du cône à un facteur numérique près]}$$

$$\frac{a^4xx - 2aax^4 \propto d^6}{\frac{2}{2a^4} \propto \frac{4}{8aaxx}}$$

$$\left[\frac{a^2 - x^2}{x} = y = \frac{3}{2}a \right]$$

§ 2. Invenire conum maximum cujus superficies sine bafi æqualis fit circulo dato.

Sit radius baseos x . Ergo latus coni erit $\frac{aa}{x}$. Ergo axis $\propto \sqrt{\frac{a^4}{xx} - xx}$.

$$\sqrt{\frac{a^4}{xx} - xx} \propto d^3 \text{ [volume du cône à un facteur numérique près]}$$

$$\frac{a^4xx - x^6 \propto d^6}{\frac{1}{a^4} \propto \frac{3}{3x^4}}$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{1}{3}a^4} \propto x}$$

$$\left[\text{latus coni} = \frac{aa}{x} = \right] \sqrt{\sqrt{3a^4}}.$$

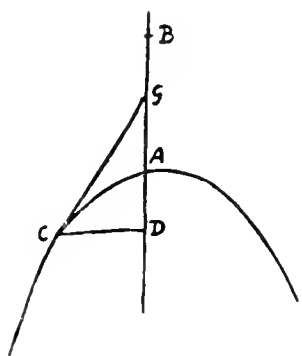


APPENDICE ¹⁾

A LA PIÈCE III DE LA P. 243 (REGULA AD INVENIENDAS TANGENTES LINEARUM CURVARUM, 1667).

[1666].

Hyperboloides Riccij ²⁾. Quæritur tangens.
Proprietas hæc quod cubus BD in quadr. DA æquale cuboquadrato DC ordinatim applicatae [Fig. 27].



Sit jam $BD \propto x$
[$BA \propto a$]

$$\begin{array}{r} x^3 \quad \text{cub. BD} \\ xx - 2ax + aa \text{ qu. AD} \left\{ m^3 \right\} \\ \hline x^5 - 2ax^4 + aax^3 - y^5 \propto 0 \\ \hline \frac{5y^5}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx} \propto DG^+). \end{array}$$

[Fig. 27].

¹⁾ Manuscrit C, p. 127. Les p. 110 et 128 sont respectivement datées: 2 Nov. 1666 et 31 Dec. 1666.

²⁾ Huygens reçut en novembre 1669 de la part du prince Leopoldo la „Geometrica Exercitatio de Maximis et Minimis” de 1666 de M.A. Ricci: voyez la note 2 de la p. 88 du T. VI, ainsi que la p. 161 du même Tome. Ce petit traité fut réimprimé en 1668 avec la „Logarithmotechnia” de N. Mercator; et de nouveau en 1791 dans les „Scriptores logarithmici” (London, Davis) de Fr. Maseres. Dans le „Lemma sextum” par lequel le traité se termine, l’auteur construit à sa façon la tangente à la courbe mentionnée ici par Huygens.

³⁾ C. à. d. multiplicando.

⁴⁾ C’est une application de la règle (démontrée par Huygens dans la Pièce III) qu’il appelle — note 3 de la p. 245 qui précède — „Fermatianæ regulæ compendiarium”. DG, soustangente, s’appelle z dans la Pièce III.

APPENDICE I¹⁾

À LA PIÈCE VI DE LA P. 259 (INSUFFISANCE DE LA DÉMONSTRATION DE GREGORY DE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE, 1668).

[1667 ou 1668.]

La présente Pièce contient les premières réflexions qu'inspira à Huygens le livre „Vera Circuli et Hyperbolæ Quadratura etc.” de 1667 de J. Gregory, dont l'auteur lui avait fait don en octobre 1667 (T. VI, p. 154) en demandant la „censûra”; réflexions qui donnèrent lieu à l'article „Examen etc.” publié par Huygens dans le No. du 2 juillet 1668 du „Journal des Sçavans” (T. VI, p. 228). On peut constater que le contenu de l'article plus bref imprimé en 1668 s'accorde avec celui de la présente Pièce.

D'ailleurs dans le Manuscrit C la présente Pièce est encore précédée par 4 pages de calculs portant la suscription: *In Veram quadraturam circuli et hyperbolæ Jac. Gregorij Abredonensis* ²⁾ *Schoti animadversiones.*

Ad Prop. 11 Jacobi Gregorij pag. 25.

„Sed nulla quantitas potest eodem modo analytice componi ex terminis $a^3 + aab$; $abb + b^3$, quo componitur ex terminis $aab + bba$; $2bba$ ”.

Negatur: ecce enim quantitas $2abbm + b^3m$. quæ sic invenitur per methodum ab authore traditam prop. 7.

Inveniatur primum quantitas, quæ multiplicata in $a^3 + aab$ et addita $abb + b^3$ multiplicata in quantitatem datam m , eandem quantitatem faciat ac si multiplicaretur in $aab + bba$ et adderetur $2bba$ multiplicata etiam in eandem quantitatem datam m . Sit quantitas illa z , et proinde

$$\begin{array}{rcl} a^3z + aabz + abbm & \text{æquatur} & aabz + bba z + 2bbam \\ \hline a^3z - abbz & \propto & abbm - b^3m \\ \hline & \approx \propto & \frac{abbm - b^3m}{a^3 - abb} \\ \hline \text{div. per } a - b & & \frac{bbm}{aa + ab} \\ & \approx \propto & \end{array}$$

¹⁾ Manuscrit C, p. 226—230. Les p. 203 et 231 sont respectivement datées 5 Sept. 1667 et 25 Feb. 1668.

²⁾ C. à. d. d'Aberdeen.

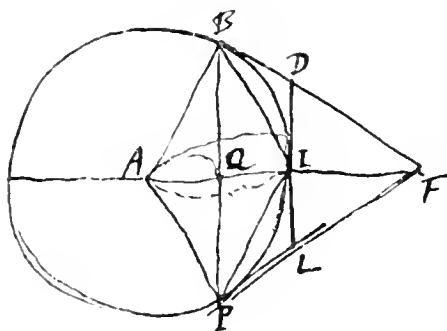
Hæc quantitas five multiplicetur in $a^3 + aab$ et addatur $abbm + b^3m$ five multiplicetur in $aab + bba$ et addatur $2bbam$, efficit eandem in utroque casu quantitatem, nempe $2abbm + b^3m$.

Hinc itaque secundum authorem terminatio quæ sita porro inveniri poterit adeoque ipsa Circuli quadratura. Dicit enim eandem hanc quantitatem eodem modo componi ex quibuslibet seriei terminis convergentibus quo componitur ex terminis $a^3 + aab$ et $abb + b^3$. ac proinde etiam ex ultimis, qui æquales sunt. Sit ultimus terminus x , qui itaque multiplicatus in $\frac{bbm}{aa + ab}$, alterque qui itidem est x , in m , facient $\frac{bbmx}{aa + ab} + mx$ quæ æquari debent $2abbm + b^3m$. Unde

$$x \propto \frac{3aab^3 + ab^4 + 2a^3bb}{bb + ab + aa}.$$

Hæc itaque Terminatio seriei convergentis x , quæ repræsentat circuli sectorem, cum inventa sit, dabitur Circuli quadratura. At non est vera hæc terminatio. Nam posita $b \propto 2a$, fiet, in primis terminis, $a^3 + aab$ æqualis quartæ parti $abb + b^3$. Hoc est

[Fig. 28].



triangulum BAP [Fig. 28] æquale $\frac{1}{4}$ trapezij ABFP. Ideoque arcus BI sextans circumferentiæ. Porro trapez. ABIP erit $aab + bba$ duplum trianguli ABP, et polygonum ABDLP, $2bba \propto \frac{8}{3}$ trianguli ABP, deinde \approx erit $\frac{4}{3}m$. Et Terminatio x five

$$\frac{3aab^3 + ab^4 + 2a^3bb}{bb + ab + aa},$$

hoc est sector ABIP ad triangulum ABP five $a^3 + aab$, ut 16 ad 7, quod est falsum. Nam dividendo esset segmentum BPI ad triangulum ABP, five ad triangulum BIP ut 9 ad 7 quæ ratio minor est quam 4 ad 3.

Quid vero deceperit authorem hinc intelligitur.

In serie convergente cujus primi termini a, b

$$\text{secundi } \frac{ca + bd - ad}{c}, \frac{bc - be + ae}{c}$$

cujus terminatio investiganda proponitur prop. 7. in hac igitur quærendo quantitatem \approx illa invenitur æqualis $\frac{me}{d}$, nam quod ille dicit $\approx \frac{mae - mbe}{ad - bd}$, non advertit divisionem fieri posse per $a - b$, et hinc forsan erroris occasio extitit. Cum autem sumtis a, b , pro quibuscunque seriei terminis, sequentes sint $\frac{ca + bd - ad}{c}, \frac{bc - be + ae}{c}$ ex hypothesi; manifestum est, ad quoscunque terminos sese proximè sequentes investigetur \approx , illam eandem quantitatem semper habituram, cum semper sit $\approx \frac{me}{d}$; quæ

m, e , et d , sunt quantitates datae. Proinde cum z five $\frac{me}{d}$, multiplicata in a , additaque ad hoc productum b multiplicata in m , producat quantitatem $\frac{mae + mbd}{d}$ (quam author dicit esse $\frac{maae - mae b + mab d - mbb d}{ad - bd}$, non videns divisionem fieri posse per $a - b$) eademque quantitas eodem modo producat ex terminis seriei secundis, ut sequitur ex inventione quantitatis z ; atque eodem quoque modo ex tertijs quo ex secundis, quoniam $z \propto \frac{me}{d}$ eadem semper quantitas ad primos et secundos, et ad secundos et tertios terminos invenitur, apparet etiam ex primis et ex tertijs terminis eodem modo eandem quantitatem $\frac{mae + mbd}{d}$ componi. Atque hinc facile perspicitur

[Fig. 29]

c	d	e
7	2	3

Figure 1 shows a vertical column with points F, N, Q, S, P, L, and G marked along its length. A dashed line connects F to L, and a dotted line connects F to G. The column is labeled 'a' and 'b' at the bottom.

eandem ex quibuslibet alijs seriei ejusdem terminis eodem semper modo compositum iri, et denique etiam ex ultimis. qui cum æquales sint, si alter ponatur ∞x , etiam reliquus erit x , unde

$$\frac{mex}{d} + mx \propto \frac{ame}{d} + bm.$$

unde

$$ex + dx \propto ae + bd \text{ et } x \propto \frac{ae + bd}{e + d}.$$

nam author rursus hic non vidit divisionem fieri per $a - b$.

Est autem hæc series nihil aliud quam quæ his lineis [Fig. 29] repræsentantur, ubi FG est b ; LG a ; LF $b - a$. Tum ut c ad d , hoc est, ut 7 ad 2, ita sit FL ad LP, quæ addita ad LG facit minorem secundorum terminorum PG. Et rursus ut c ad e , hoc est ut 7 ad 3, ita sit LF ad FN, quæ ablata ab FG, facit majorem secundorum terminorum NG. Et continuando porro ponitur PS $\frac{2}{3}$ NP, et NQ $\frac{3}{4}$ NP, et ita porro in infinitum. Unde tandem terminationis ultimum quoddam punctum concipitur, et recta quæ ab eo puncto ad G extenditur est hic terminatio quæ quæritur quam author recte dicit esse $33\frac{3}{5}$. Hæc autem facile quoque aliunde determinari potest. Nam cum partes hinc et inde in linea FL acceptæ, ut LP, FN, et reliquæ porro sint semper ut 2 ad 3, apparet et punctum terminationis quæsita ita dividere debere totam FL ut pars versus L sit ad reliquam ut 2 ad 3, tota autem FL est partium 14 quallium LG, 28. Ergo ab L ad punctum terminationis sunt $\frac{2}{5}$ ex 14, hoc est $5\frac{3}{5}$, quæ additæ ad LG 28 faciunt $33\frac{3}{5}$.

Porro author cum hanc determinationem recte inveniri methodo sua animadvertisset, existimavit cujuscunque alterius seriei convergentis terminationem inveniri similiter posse, si inventa esset quantitas quæ eodem modo componeretur ex primis terminis seriei convergentis et ex secundis. Quo dato, (non autem concesso, ob rationes postea adducen-

das) non sequitur inde, ut vult author, si quantitas ejusmodi nulla esse possit, tunc neque terminationem seriei analyticam fore respectu terminorum seriei. Nam et si verum esset, tali quantitate data quæ eodem modo componitur ex primis atque ex secundis seriei terminis, tunc ejus ope inventum iri terminationem seriei, et illam terminationem esse repertam, eodem quoque modo compositam fore ex primis, secundis, aut alijs quibuslibet seriei terminis. non inde sequetur terminationem seriei, aliâ forsan methode repertam, etiam debere componi eodem modo ex primis atque ex secundis seriei terminis. Itaque male rationem colligit author.

Dico autem porro, non esse verum, data quantitate quæ eodem modo ex primis et ex secundis seriei terminis componitur, inveniri inde semper posse seriei terminationem. quod jam patuit ante, cum quantitas $2abbm + b^3m$, eodem modo componatur ex terminis seriei primis $a^3 + aab$ et $abb + b^3$, quo ex secundis $aab + bba$, et $2bba$, nec tamen per eam vera terminatio seriei inveniat.

Quare autem non rectè succedat terminationis inventio in hac serie, cum secus eveniat in serie quam ponit author prop. 7, et in alijs quibusdam, ratio differentie hæc est, quod in serie prop. 7 cum invenitur quantitas $z \propto \frac{me}{d}$, in illa non occurrat quantitas a nec b , unde fit ut sive ad primos et secundos terminos inveniat z , sive ad secundos et tertios, semper eadem quantitas inveniat. Quod cum ita contingit, sequitur ope ipsius z inveniri quantitatem quæ eodem atque unico modo ex primis, secundis, tertijs alijsque quibuslibet seriei terminis componatur, ut folio præcedenti ostensum sit. Sed cum quantitates a et b , vel alterutra habentur in quantitate z , tunc z non erit eadem quantitas ad primos et secundos, ac ad secundos et tertios terminos reperta. Et invenietur quidem, per primam z , quantitas quæ eodem modo ex primis et ex secundis seriei terminis componitur, et per alteram z , invenietur quantitas eodem modo composita ex secundis et ex tertijs terminis. Sed quantitas hæc posterior non erit eadem cum priori, ac proinde cum non sit inventa quantitas quæ eodem modo ex quibuslibet duobus seriei terminis componitur, nec poterit inveniri per eam seriei terminatio.

Quod si vero quantitas aliqua inveniri possit eodem modo composita ex primis et ex secundis seriei terminis, absque inventione quantitatis z , tunc illa quantitas sufficit ad inventionem terminationis. ut si detur series convergens cujus primi termini a, b , secundi $\sqrt{e aab}, \sqrt{e bba}$, semperque sequentes duo ex duobus præcedentibus eodem hoc modo componantur, hic habebitur quantitas ab , eodem modo ex primis et ex secundis terminis composita, nempe ex multiplicatione terminorum simplici. Constatque eandem eodem modo etiam ex tertijs et alijs quibuslibet seriei terminis componi, quoniam a et b indifferenter pro quibuslibet seriei terminis sumi possunt. Itaque et ex ultimis qui æquales sunt. qui si vocentur x singuli erit $xx \propto ab$ et $x \propto \sqrt{ab}$ terminatio quæ sita.

Exemplum autem ab authore allatum propositione . . . absurdum est, nam si primi

termini sint a et b , secundi $\sqrt[aa]{ab}$ et $\sqrt[ab]{aa}$ fient rursus tertij termini a et b . Adeo ut hæc non sit series convergens, cujus proinde neque terminatio ulla esse potest, etsi author eam invenisse existimet.

Aliud initium ¹⁾. Primo male ratiocinatur prop. 11. cum ita colligit. *Si terminatio proposita seriei esset analytica cum terminis seriei, oporteret eam terminationem eodem modo componi ex primis et ex secundis terminis.*

Male inquam sic colligit. Nam licet verum sit terminationem, si inventa sit methodo authoris, eodem modo compositam fore ex primis et ex secundis, alijsve quibuscumque seriei terminis, non sequitur, si alio forsan modo terminatio seriei inventa sit, etiam tunc eodem modo ex primis et ex secundis terminis compositam fore. Oporteret enim, ut hoc sequeretur, ostendisse antea authorem nulla alia quam sua methodo terminationem seriei posse inveniri. Vel saltem quotiescunque aliqua methodo terminatio reperiri potest etiam sua methodo eam reperiri posse.

Rursus hallucinatur cum paulo post ait, At nulla quantitas potest eodem modo componi ex terminis $a^3 + aab$ et $abb + b^3$, quo componitur ex terminis $aab + bba$, et $2bba$.

¹⁾ Ce nouveau début s'accorde en substance avec le § I et le commencement du § II de l'„Examen etc.” publié en 1668. On trouve l'anticritique de Gregory, du 23 juillet 1668, à la p. 240 du T. VI.

APPENDICE II¹⁾

À LA PIÈCE VI DE LA P. 259

(INSUFFISANCE DE LA DÉMONSTRATION DE GREGORY DE
L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE, 1668).

[août ou septembre 1668]

Cette Pièce est le projet d'une réplique à la réponse de Gregory de juillet 1668 mentionnée dans la dernière note de l'Appendice précédent. On peut la comparer avec le début de l'article de Huygens publié dans le Journal des Sçavans du 12 nov. 1668 (T. VI, p. 272). Comme les Appendices suivants le font voir, Huygens exécuta encore bien des calculs²⁾ après avoir rédigé le présent projet, calculs dont il fit usage en rédigeant sa réplique pour la presse.

Quoy que M. Gregorius dans la réponse qu'il a faite a mes objections ait supplée quelques défauts qu'il y avoit dans ses demonstrations, il me permettra de dire qu'il s'en faut tant qu'après cela l'impossibilité de la quadrature du cercle soit bien prouvée, qu'il demeure encore incertain si le cercle et le quarré de son diamètre ne sont pas commensurables, c'est à dire s'il ne sont pas entre eux en raison de nombre a nombre.

Pour le faire voir il faut examiner encore sa prop. 11 et la solution qu'il donne a la difficulté que j'y avois objectée. J'avois dit que quoyque la terminaison d'une suite convergente étant trouvée par sa methode devoit nécessairement estre composée de mesme des seconds termes que des premiers, il ne s'en suivoit pas que cela seroit nécessaire, quand cette terminaison seroit peut estre trouvée par quelque autre maniere que la siene. Il me demande un exemple de ce cy, ou une juste raison de douter pourquoy la mesme chose ne conviendrait pas a toute terminaison de quelque maniere qu'elle fut trouvée; comme s'il ignoroit qu'en mathematique l'on a juste raison de douter de ce qu'un autre avance jusqu'à ce qu'il l'ait démontré [alinéa biffé].

Car mesme après la demonstration qu'il a donnée pour supplément de sa propos. 11, qu'est ce qu'il en peut conclure, si non que tout secteur de cercle n'est pas en raison analytique a sa figure rectiligne inscrite ou circonscrite³⁾. ce qui est tout autre chose

¹⁾ Manuscrit D, p. 27—29. On trouve aux p. 3 et 37 respectivement les dates du 11 août et du 21 septembre 1668.

²⁾ Les pages 7—11 et 26 du Manuscrit D contiennent également des calculs se rapportant à Gregory.

³⁾ Dans la Pièce du 12 nov. 1668 (T. VI, p. 273, l. 19) Huygens ajoute à bon droit: quoyque cette demonstration ne laisse pas d'avoir sa beauté.

que de dire que nul secteur de cercle ne l'est. Qui dit non omnis ne dit pas nullus. Et ainsi il ne suffit pas de démontrer que le secteur de cercle a sa figure inscrite n'est pas analytique indéfinie, mais il faut démontrer que c'est la même chose in casu omni definito. comme par exemple quand on prend le secteur qui fait le tiers du cercle, supposant a égal à 1, $b \propto 2$: les premiers termes de la suite convergente seront 3 et 12, les seconds 6 et 8. Que si je disois maintenant que la terminaison de cette suite est ou $\sqrt{\dots\dots}$, je ne pense pas que par sa prop. 11 il me puisse prouver le contraire. Par conséquent il ne s'en suit pas de ses démonstrations que le cercle ne soit au triangle équilatéral inscrit comme nombre à nombre. La même chose sera vraie dans tous les secteurs dont la soutendante au rayon du cercle aura quelque raison donnée de nombre à nombre soit rationnel soit sourd. car depuis qu'entre les quantitez a et b dans sa prop. 11 il y aura proportion numérique, l'on ne pourra plus dire de quelle façon un autre nombre proposé est composé des premiers ny des seconds termes de la suite convergente. Et par conséquent en tous ces cas la propos. 11 ne démontre point qu'il soit impossible de trouver la terminaison par quelque autre méthode que celle de l'auteur. Et c'est ce qui justifie ma première remarque.

Pour les autres il est vrai qu'elles sont toutes fondées sur ce que l'auteur n'avoit point limité l'usage de la méthode dont il cherche la terminaison dans la 7^e prop. ny fait la déclaration qu'il fait maintenant en ces mots. *Dico igitur et declaro me intelligere nullam quantitatem indefinitam præter ipsos terminos convergentes compositionem posse ingredi.* Et si je n'avois eu sujet de croire qu'il eut ignoré cette rejection des quantitez indefinies, je ne me serois point arrêté à en faire veoir la nécessité, par les fausses conséquences qui naissent de son omission. Mais puis que dans sa prop. 7^e il faisoit entrer dans la composition la quantité $\frac{mae - mbe}{ad - bd}$, ou les lettres a et b marquent des quantitez indefinies, j'ay eu raison d'en conclure qu'il les y avoit laissées quoy que les sachant estre telles. Car nécessairement l'un des deux est vrai, ou qu'il ait essayé d'oster a et b de cette quantité ou qu'il ne l'ait point essayé. S'il l'a essayé, il faut qu'il n'aye pas veu qu'il les pouvoit oster en divisant par $a - b$ car s'il l'eut veu, il ne pouvoit plus negliger cette division par inadvertance. N'ayant donc point veu que a et b se pouvoient oster apres l'avoir tenté, il a creu estre obligé d'admettre d'autres quantitez indefinies dans la composition, outre les termes convergents eux mêmes. Que s'il n'a point essayé d'oster a et b , qu'il scavoit denoter des quantitez indefinies, il s'en suit qu'en les laissant il n'a pas seulement pensé que de telles quantitez ne deussent point entrer dans la composition. Et ainsi je pense avoir assez prouvé que ce ne sont pas mes seules imaginations comme il luy plait dire qui ont donné sujet à mes dernières objections. Mais quoy qu'il en soit cela ne fait plus rien à la question principale, qui est si M. Gregorius a démontré, comme il pretend, que la raison du cercle au carré de son diamètre n'est pas analytique.

APPENDICE III ¹⁾

À LA PIÈCE VI DE LA P. 259

(INSUFFISANCE DE LA DÉMONSTRATION DE GREGORY DE
L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE, 1668).

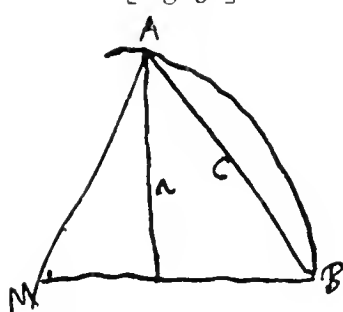
[septembre 1668].

§ 1. Ex meis de circuli magnitudine [Fig. 30].

$$2c + 3a \text{ --- } 4c + a \text{ --- } \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}a \text{ --- } \dots$$

$$4c + a$$

[Fig. 30].



$$\frac{\frac{3}{4}cc - ac - \frac{1}{3}aa}{2c + 3a}$$

ad. [c. à d.:
addendo]

$$\frac{\frac{1}{3}cc + 2ac - \frac{1}{3}aa}{2c + 3a}$$

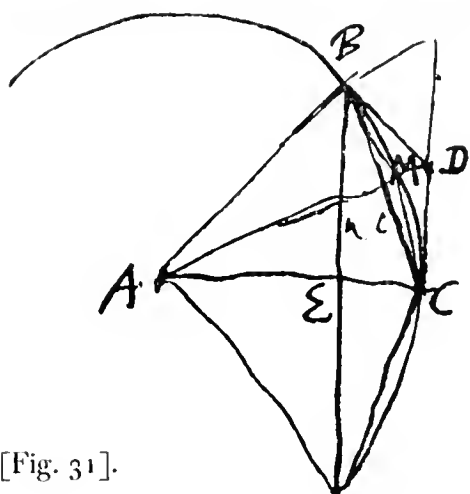
arcus AB ter-
minus major

$$a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a}$$

arcus AB ter-
minus major

Ceci correspond en effet à l'approximation donnée par Huygens en 1654 dans le Theor. XVI, Propos. XIX, de son Traité „De circuli magnitudine inventa” (T. XIII, p. 169). Le théorème, qui est accompagné d'une démonstration, donne tant une limite inférieure de l'arc AB $\left(\frac{4c-a}{3}\right)$, qu'une limite supérieure du même arc, celle considérée ici. Les mots „arcus AB terminus major” signifient donc que la quantité $a + \frac{10(c^2 - a^2)}{3(2c + 3a)}$ est supérieure à la longueur de l'arc.

¹⁾ Manuscrit D, p. 40—47. Les p. 37 et 50 portent respectivement les dates 21 sept. et 30 sept. 1668. Les calculs de Huygens dans le Manuscrit D servent à préparer son article de novembre 1668 se rapportant à la polémique avec Gregory. Comparez les deux Appendices précédents.



[Fig. 31].

Area polygoni ABC [Fig. 31] est $BE \propto a$ in AC. Pour trouver l'aire du polygone il faudrait évidemment encore multiplier par $\frac{n}{2}$, n étant le nombre des côtés.)

Area polygoni totidem laterum ABDC est $BDC \propto \frac{cc}{a}$ in AC (même remarque).

$\frac{cc}{a} - a$ (ceci multiplié par AC, et par $\frac{n}{2}$, donne la différence des aires des polygones circonscrit et inscrit).

Per Prop. 6 meam [du Traité nommé, savoir, dans la traduction française: Tout cercle est plus petit que les deux tiers du polygone semblable inscrit, T. XI, p. 130]:

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{2}{3} \frac{cc}{a} + \frac{1}{3} a & \text{major terminus} \\ c + \frac{1}{3} c - \frac{1}{3} a & \text{minor terminus} \end{array} \right\} \text{ s. [c. à d.: subtrahendo]}$$

Cette seconde équation correspond à la Prop. V (ou 5), T. XI, p. 128: Tout cercle est plus grand qu'un polygone à côtés égaux, qui lui est inscrit, plus le tiers de la quantité dont ce polygone surpasse un autre polygone inscrit d'un nombre de côtés réduit à la moitié.

$$\frac{2}{3} \frac{cc}{a} + \frac{2}{3} a - \frac{4}{3} c \quad \text{differentia Gregorij.}$$

Comme Huygens le dit dans la Pièce No. 1669 de notre T. VI (article publié dans le Journal des Sçavans du 12 nov. 1668) Gregory a en effet deux propositions équivalentes ²⁾ aux Prop. V et VI de Huygens, de sorte qu'il trouve les mêmes valeurs supérieure et inférieure pour la surface du cercle (il faut toujours supposer les expressions $\frac{2}{3} \frac{cc}{a} + \frac{1}{3} a$ etc. multipliées par le rayon AC et le nombre $\frac{n}{2}$; ou bien, ce qui est plus commode, supposer que le rayon a la longueur 1 et qu'il n'est pas question du cercle entier mais seulement d'un secteur). La différence de ces limites supérieure et inférieure est donc une „differentia Gregorij” tout aussi bien qu'une „differentia Hugonii”.

²⁾ Les Prop. XX et XXI de la „Vera circuli et hyperbolæ quadratura”.

³⁾ Nous avons ajouté la lettre M dans la Fig. 31.

$$\begin{array}{r}
 \frac{2}{3} \frac{cc}{a} + \frac{2}{3} a - \frac{4}{3} c \\
 \hline
 \frac{8}{3} \frac{cc}{a} + \frac{8}{3} a - \frac{16}{3} c \\
 \hline
 5 \quad \frac{8}{15} \frac{cc}{a} + \frac{8}{15} a - \frac{16}{15} c \\
 \qquad \qquad \qquad \frac{4}{3} c - \frac{1}{3} a \quad \text{minor terminus} \left. \vphantom{\frac{8}{15} \frac{cc}{a}} \right\} \text{ad.} \\
 \hline
 \frac{8}{15} \frac{cc}{a} + \frac{3}{15} a + \frac{4}{15} c \quad \text{factor ABM Gregorij}^3).
 \end{array}$$

D'après Huygens (voyez aussi la p. 274 du T. VI) Gregory croit obtenir ⁴⁾ une nouvelle fort bonne approximation (il s'agit apparemment d'un „terminus major”) pour le secteur considéré en ajoutant à l'ancien „terminus minor” seulement les $\frac{2}{3}$ de la différence entre l'ancien „terminus major” et l'ancien „terminus minor”. Huygens dit à la page citée (c. à. d. dans l'article du 12 novembre 1668 dont il était déjà question plus haut), „que cette approximation n'est pas vraie dans le cercle” ⁵⁾, c. à. d. qu'elle est beaucoup moins bonne que Gregory le pense, (à la p. 41 Huygens écrit: *hanc approximationem Gregorius proponit sed inutilis est cum non accedat ad verum*), puisqu'on obtient déjà un „terminus major” en ajoutant non pas $\frac{2}{3}$ mais $\frac{1}{3}$ de la dite différence (voyez aussi sur ce sujet la première note de l'Appendice V qui suit), ce qui donne

$$\frac{2}{15} \frac{cc}{a} - \frac{3}{15} a + \frac{16}{15} c.$$

Le rayon ayant par hypothèse la valeur 1, ce „terminus” pour le „factor ABM” peut tout aussi bien être appelé un „terminus” pour l'arc BC de la même Fig. 31. Huygens peut donc le comparer avec son „terminus major” à lui (le „terminus major” de la Prop. XIX, plus exact que $\frac{2}{3} \frac{c^2}{a} + \frac{1}{3} a$) pour le même arc. Ce faisant il constate que

$$\frac{2}{15} \frac{cc}{a} - \frac{3}{15} a + \frac{16}{15} c \parallel \frac{\frac{10}{3} cc + 2ac - \frac{1}{3} aa}{2c + 3a} \quad (\text{le signe } \parallel \text{ équivaut à notre } >).$$

En effet, en multipliant par $2c + 3a$, puis par $\frac{15}{4} a$, il obtient

$$\begin{array}{r}
 \frac{4}{15} \frac{c^3}{a} + \frac{4}{15} 2ac + \frac{3}{15} cc - \frac{1}{15} aa \parallel \frac{5}{15} cc + \frac{3}{15} 2ac - \frac{5}{15} aa \\
 \hline
 c^3 - 3acc + 3aac - a^3 \parallel 0 \\
 \text{c. à. d.} \qquad \qquad \qquad \text{cubus } c - a \text{ major nihilo}
 \end{array}$$

⁴⁾ Dernier alinéa de la Prop. XXV de la „Vera circuli et hyperbolae quadratura”: „Est etiam alia approximatio omnium brevissima & maximè admiranda, etiamsi mihi non contingat illam demonstratione geometrica munire, etc”.

⁵⁾ Voyez l'Appendice V qui suit pour le cas de l'hyperbole, à laquelle la nouvelle approximation de Gregory se rapporte aussi.

ce qui est évidemment exact (première ligne de la p. 275 du T. VI). Il conclut: Et cum mea sit major vero et minor quam ipſius, erit et ipſius major vero ⁶⁾.

Notons que Gregory dans la lettre à Oldenburg du 25 décembre 1668, publiée dans les Philosophical Transactions du 15 février suivant (notre No. 1682, T. VI), nie (p. 309) que Huygens, en faisant cette observation sur la valeur de l'approximation obtenue par l'addition des $\frac{2}{3}$ de la différence susdite, ait bien compris ce qu'il voulait dire.

§ 2. Parlant de l'approximation exprimée par l'expression $\frac{2}{15} \frac{cc}{a} - \frac{3}{15} a + \frac{16}{15} c$, Huygens dit dans le 4^{ème} alinéa de la p. 274 du T. VI pouvoir démontrer que les polygones [inſcrit et circonſcrit] s'accordant juſqu'au tiers de leurs chiffres, [l'expression conſidérée] ne peut différer au plus de la véritable grandeur du cercle ⁷⁾ que dans les deux derniers chiffres; et que le plus ſouvent il doit avoir tous les mêmes et au delà. Ceci n'est guère compréhensible pour le lecteur qui ne connaît pas le raisonnement de Huygens ⁸⁾. Cette demi-obscurité est peut-être voulue. Quoi qu'il en ſoit, il ne ſemble pas inopportun de faire connaître le dit raisonnement.

A la page 44 du Manuſcrit D Huygens commence par établir les ſix théorèmes ſuivants, tous bien ſimples et dont il ne formule donc pas la démonſtration.

Theor. 1.

Si numerus in numerum ducatur, habebit productum *non plures* cifras quam ſumma cifrarum eorum qui ducti ſunt. Idem vero productum non pauciores habebit cifras quam ſumma cifrarum ductorum minus unâ.

Theor. 2.

Si numerus per numerum minorem dividatur, habebit quotiens non pauciores cifras quam differentia cifrarum eorundem numerorum, non plures vero quam eadem differentia cifrarum plus unâ.

Theor. 3.

Si duo numeri æquali numero cifrarum priores aliquot cifras eafdem habuerint et proxima ab illis cifra majoris excedat binario vel amplius cifram ſuppoſitam minoris,

⁶⁾ Observons en paſſant qu'on n'a pas (l. 3 de la p. 275 du T. VI) $d = \frac{a}{cc}$ mais $d = \frac{cc}{a}$.

⁷⁾ Ou plutôt du ſecteur de cercle conſidéré, puſque l'expression conſidérée (voyez le § 1) ne correſpond pas au cercle entier, mais à un ſecteur.

⁸⁾ Comparez le début du dernier alinéa de la note 15 de la p. 142 du T. XII, ſe rapportant au Traité de 1654 „De circuli magnitudine inventa”.

auferaturque minor numerus à majore. habebit residuum totidem cifras quot erant in alterutro numero dissimiles.

Theor. 4.

Si duo numeri æqualem multitudinem cifrarum habuerint et priores aliquot cifras eandem alter alteri. ablato minore a majori, reliquus non habebit plures cifras quam quot erant cifræ dissimiles in ipsdem numeris.

Theor. 5.

Si duo numeri alter alteri addantur, summa non habebit plures cifras quam major numerorum plus unâ. quod autem non pauciores habebit quam major numerus, certum est.

Theor. 6.

Si numeri alicujus cifra initialis sit 1 vel 2, ejus quadratum cifras habebit bis tot quot latus cifras habebat minus una.

Ensuite, à la p. 47 du même Manuscrit, Huygens raisonne comme suit.

Differentia terminorum majorum Gregorij correcti, et mei (voyez le § 1 qui précède)

$$\frac{\frac{2}{15} \frac{cc}{a} - \frac{3}{15} a + \frac{6}{15} c - \frac{10}{15} cc - 2ac + \frac{1}{3} aa}{2c + 3a} \text{ mult. p. } 2c + 3a$$

$$\frac{\frac{4}{15} \frac{c^3}{a} - \frac{12}{15} cc + \frac{12}{15} ac - \frac{4}{15} aa}{\text{mult. p. } \frac{15}{4}}$$

non pauciores cifras habebit quam $x + 3s - 1$
(voyez sur x et s le texte qui suit)

$$\frac{c^3}{a} - 3cc + 3ac - aa \quad \text{non pauciores quam } x + 3s - 1$$

$$c^3 - 3acc + 3aac - aa \quad \text{cubus ex } c - a \text{ non pauciores quam } x + 6s - 2.$$

Dico autem quod si numeri c et a habeant priorem tertiam partem cifrarum eandem, sicut essent 104.671912 $\propto c$ et 104.528463 $\propto a$ quod tunc terminus istorum alter alterum non superabit numero ultra quam ex duabus cifris constante.

Ponatur enim differentia eorum habere cifras x , et numerus cifrarum similium in numeris c et a , vocetur s . Ergo tam c quam a habent singuli cifras $3s$.

Quia ergo $2c + 3a$ non habet pauciores cifras quam $3s$, sequitur ducendo ut fecimus $2c + 3a$ in differentiam propositam, productum non habiturum pauciores quam $x + 3s - 1$ per theorema 1 folii antepenultimi. Quod productum rursus ducendo in $\frac{15}{4}$, jam illud quod oritur quoque non pauciores habebit quam $x + 3s - 1$ quia multiplicatio per $\frac{15}{4}$ non potest minnere numerum cifrarum. Rursus multiplicando per a qui

habet 3s cifras. productum non habebit pauciores quam $x + 6s - 2$ per theor. 1. Atqui hoc productum est cubus ab $c - a$. Ergo cubus ab $c - a$ non habet pauciores quam $x + 6s - 2$. Ergo vicissim $x + 6s - 2$ non habet plures quam cubus ab $c - a$. Atqui cubus $c - a$ non habet plures quam 6s, per 1 theor. Ergo $x + 6s - 2$ non habebit etiam plures quam 6s. Ergo $x + 6s$ non habebit plures quam $6s + 2$. Ergo x non plures quam 2. Argumentatio subtilis.

APPENDICE IV¹⁾

À LA PIÈCE VI DE LA P. 259

(INSUFFISANCE DE LA DÉMONSTRATION DE GREGORY DE
L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE, 1668).

[sept. 1668].

On peut comparer la présente Pièce avec la p. 275 du T. VI (faisant partie de l'article de Huygens du 12 nov. 1668, mentionné aussi par nous au début de l'Appendice II qui précède); on trouve à cette page une figure identique (quoiqu'avec d'autres lettres) à la Fig. 32 qui suit. La présente Pièce donne l'explication de l'approximation géométrique d'un arc de cercle à laquelle ces figures se rapportent, explication qui faisait défaut dans l'article de nov. 1668.

[Fig. 32].



NB. Postea pag. 24. h. ²⁾ terminus minor propior vero invenitur.

Inventio termini minoris proximi ex nostris de Circuli Magnitudine.

$\frac{\frac{10}{3}cc + 2ac - \frac{1}{3}aa}{2c + 3a}$	s.	major terminus arcus AB [Fig. 32] inventus pag. 1 ²⁾ hujus ³⁾ .
$\frac{\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a}{1}$	s.	minor terminus ex nostris de Circuli magnitudine.
$\frac{2cc - 4ac + 2aa}{6c + 9a}$	m.	differentia terminorum. NB. numerator est quadratum duplum ab $c - a$.
$\frac{\frac{8}{3}cc - \frac{1}{3}6ac + \frac{8}{3}aa}{6c + 9a}$	m.	sesquitertia terminorum differentia. adde per præceptum nostrum prop. 20.
$\frac{2c + 3a}{1}$		

¹⁾ Manuscrit D, p. 48—51. Voyez sur la date de la Pièce la note 1 de la p. 310 qui précède. Vers la fin on trouve dans la Pièce la date du 30 septembre.

²⁾ Un groupe de pages du Manuscrit D se rapportant à la recherche de la quadrature du cercle a été numéroté par Huygens. Ces numéros (1—25) correspondent à la numération plus récente 40—64, dont nous nous servons.

³⁾ Voyez sur cette formule la p. 310 qui précède.

Il s'agit du Problema IV. Propos. XX du Traité de 1654 „De circuli magnitudine inventa” (T. XII p. 172 et suiv.). Comme on peut le voir aussi dans le T. XII, Huygens n'a pas voulu publier la démonstration de cette proposition qui enseigne de trouver, en partant des limites supérieure et inférieure trouvées antérieurement, une limite inférieure plus exacte pour la longueur d'un arc.

La limite qu'il calcule ici suivant cette proposition (dans son traité de 1654 il n'avait pas donné de formule algébrique), savoir $a + \frac{10(c^2 - a^2)}{6c + 9a + \frac{8(c-a)^2}{6c + 9a}}$, correspond (lorsqu'on multiplie par

$2n$, nombre des côtés du polygone inscrit, dont $AB = c$ est le côté) à la formule (terminus minor) de la note 52 de la p. 175 du T. XII, également déduite par nous de cette proposition,

$$p_n + \frac{10(p_{2n}^2 - p_n^2)}{6p_{2n} + 9p_n + \frac{8(p_{2n} - p_n)^2}{6p_{2n} + 9p_n}}$$

On peut voir aussi dans le T. XII que nous n'avons pas réussi à reconstruire la démonstration de la Prop. XX supprimée à dessein par Huygens et qui ne se trouve pas dans les manuscrits conservés.

Per idem præceptum ut summa ⁴⁾)

$$\frac{3 \text{ qu. } 2c + 3a + \frac{8}{3} \text{ qu. } c - a}{6c + 9a} - \frac{10c}{3} + \frac{10}{3}a - c - a / \dots$$

hoc est ut

$$\frac{9 \text{ qu. } 2c + 3a + 8 \text{ qu. } c - a}{6c + 9a} - \frac{10c + 10a}{3} - c - a / \frac{\frac{10cc - 10aa}{9 \text{ qu. } 2c + 3a + 8 \text{ qu. } c - a}}{6c + 9a}$$

$$\text{seu } \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a + \frac{8 \text{ qu. } c - a}{6c + 9a}} + a \quad \text{arcus AB in minore termino.}$$

Major terminus ante inventus pag. 1 ⁵⁾) hujus $\frac{10cc - 10aa}{6c + 9a} + a$ ⁶⁾).

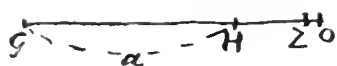
Additiuncula ad a in majori ad additiunculam in minori termino ad eandem a , est vice versa ut hujus denominator ad illius denominatorem quoniam numerator utrobique idem. Ergo si additiuncula in majori sit HO, in minori HZ [Fig. 33]; erit

⁴⁾ Savoir la somme des trois expressions considérées en dernier lieu.

⁵⁾ Un groupe de pages du Manuscrit D se rapportant à la recherche de la quadrature du cercle a été numéroté par Huygens. Ces numéros (1—25) correspondent à la numération plus récente 40—64, dont nous nous servons.

⁶⁾ Voyez sur cette formule la p. 310 qui précède.

[Fig. 33].



$$HO \text{ ad } HZ \text{ ut } 6c + 9a + \frac{8 \text{ qu. } \overline{c - a}}{6c + 9a} \text{ ad } 6c + 9a$$

$$HO \text{ ad } OZ \text{ ut } 6c + 9a + \frac{8 \text{ qu. } \overline{c - a}}{6c + 9a} + \frac{8 \text{ qu. } \overline{c - a}}{6c + 9a}$$

Hinc invento HO invenitur et HZ vel OZ.

$$HO \text{ ad } OZ \text{ ut } \text{qu. } \overline{6c + 9a} + 8 \text{ qu. } \overline{c - a} + 8 \text{ qu. } \overline{c - a}$$

$$HZ \text{ ad } ZO \text{ ut } \text{qu. } \overline{6c + 9a} + 8 \text{ qu. } \overline{c - a}.$$

Cum ergo ut qu. $\overline{6c + 9a}$ ad $8 \text{ qu. } \overline{c - a}$ ita fit HZ ad ZO, hinc ostendo differentiam terminorum OZ non esse plurium quam duarum cifrarum si prior triens cifrarum constituentium a et c sit idem. Dicatur enim numerus ille, cifrarum utrobique earundem, s . Ergo tam a quam c habent cifras $3s$ et $c - a$ non plures quam $2s$, per Theor. 4⁷⁾.

Demonstratio. Cum ergo $6c + 9a$ sit major numerus quam $10a$; constat numerum factum additione $6c + 9a$, habere non pauciores cifras quam $3s + \text{unâ}$. Unde quadratum ab $6c + 9a$ non pauciores habebit quam $6s + \text{unâ}$, per theor. 1 pag. 5 hujus. Sed $c - a$ non habet plures quam $2s$, per theor. 4 hujus. Ergo, quadratum ex $c - a$ non habebit plures quam $4s$ et $8 \text{ qu. } \overline{c - a}$ non plures quam $4s + 1$. Rursus HZ cum sit minor utique quam dupla $c - a$, non habebit plures quam $2s + 1$ per theor. 5 hujus⁷⁾. Ergo ducendo HZ in $8 \text{ qu. } \overline{c - a}$, productum non habebit plures quam $6s + 2$. Et dividendo hoc productum per qu. $\overline{6c + 9a}$ quod non pauciores habebat quam $6s + 1$ habebit factus hinc hoc est OZ, non plures quam cifras 2, quantæ fiunt cum à $6s + 2$ auferatur $6s + 1$, et rursus 1 additur per theor. 2 hujus.

Numquam igitur inter terminos approximationis meæ majorem minoremque (sumtis utriusque cifris triplis numero ad multitudinem cifrarum similium in a et c , sinu et subtensa) poterit differentia major esse quam duarum cifrarum. plerumque vero ad unius quidem reperitur, sed tantum fractio aliqua, cum nempe amplius quam triplus verorum characterum numerus efficitur.

Quæ autem indicant fore minorem differentiam sunt hæc. Ratio horum patet ex præcedente demonstratione. Si $6c + 9a$ habeat plures cifras quam $3s + 1$, nam potest habere $3s + 2$, si initiales in a et c sint magnæ. et sic qu. $\overline{6c + 9a}$ habebit $6s + 3$ ut constat ex 1 theor. Rursus si $c - a$ habeat initiales humiles ita ut qu. $\overline{c - a}$ habeat tantum $4s - 1$ cifras: simul enim fiet ut HZ, quæ non est dupla $c - a$, tantum habeat $2s$ cifras. Hæc humilitas cifrarum initialium in $c - a$ cernitur in exemplo pag. 3⁸⁾ unde ne unius quidem cifræ differentia inter terminos oritur ut videre licet in nostris de magnitudine circuli prop. 20⁹⁾, ubi hæc polygona adhibentur.

⁷⁾ Voyez les six théorèmes de la p. 313 qui précède.

⁸⁾ Il y est question de nombres 104

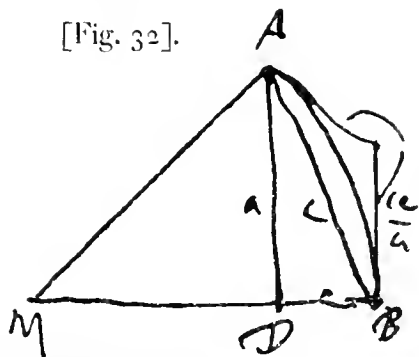
⁹⁾ Déjà citée plus haut.

Ceterum cum nostri termini hi major supra minorem possint differentiam habere duarum cifrarum, et Terminus ex nova approximatione pag. 8 ¹⁰) possit excessum habere supra majorem eorundem similiter duarum cifrarum. videndum jam quantum excessum habere possit Terminus iste ex nova approximatione supra Terminum minorem. Videretur dicendum prima fronte posse eum excessum esse 4 cifrarum. sed non potest esse plurium quam trium. Nam cum differentia inter minorem et majorem veterem non sit plurium quam 2 cifrarum, non erit major ista differentia quam 99. Et denovo cum differentia inter majorem veterem, et majorem novum sit non plurium quam 2 cifrarum nec major proinde quam 99, utraque differentia juncta, hoc est differentia inter minorem terminum et majorem novum non poterit esse major quam bis 99, sive 198; ideoque non major quam 3 cifrarum.

Est vero pulchra quoque nova ista Approximatio ¹⁰), quod, sicut vetus ¹¹), triplum verarum notarum numerum in arcuum dimensionem producit. nam uno ad summum ac plerumque ne uno quidem caractere aberrat, et quanquam pauxillo à veteri vincatur hoc exigui est momenti. Dat autem et constructionem egregiam ac simplicem, et ad numerorum calculum adhibita tantum opus habet latere inscripto, et circumscripto, et inscripto polygoni quod reliquorum numerum laterum subduplum habeat. Nam his datis, sola additione et subtractione arcus longitudinem veræ proximam edit, adeo exacte ut si vel 45°. gr. sit arcus non differat $\frac{1}{25000}$ subtenſæ. Nempe si sinus sit a , sub-

tenſa hic erit arcus $\infty c + \frac{\frac{1}{3}c + \frac{2}{3}\frac{cc}{a} - a}{5}$ — unde constructio erit hujusmodi.

[Fig. 32].



Virij ¹²). 30 Sept. 1668. $c + \frac{\frac{1}{3}c + \frac{2}{3}\frac{cc}{a} - a}{5}$

Approximatio nova. paulo major arcu cum a est sinus. c subtenſa [Fig. 32]. ideoque $\frac{cc}{a}$ latus polygoni circumſcripti totidem laterum quot c .

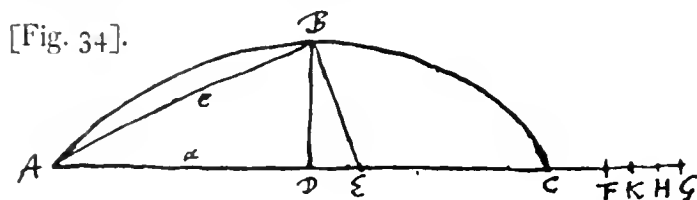
¹⁰) C. à. d. l'approximation (terminus major) $\frac{2}{15}\frac{cc}{a} - \frac{3}{15}a + \frac{1}{15}c$ de la p. 312 qui précède.

¹¹) C. à. d. $\frac{\frac{10}{3}cc + 2ac - \frac{1}{3}aa}{2c + 3a}$ ou $\frac{10cc - 10aa}{6c + 9a} + a$, également terminus major.

¹²) C. à. d. à Viry, chez Claude Perrault (T. VI. p. 497). Comparez sur ce séjour la p. 323 du T. X ainsi que la p. 372 du T. XIX.

CONSTRUCTIO.

Datus fit arcus ABC cujus subtensa AC [Fig. 34]. Dividatur arcus bifariam in B et duplæ subtensæ AB ponatur æqualis AF. Duclæque BE perpendiculari in AB, ponatur duplæ AE æqualis AG. Et fit GH tertia pars GF, et divisa HC in quinque

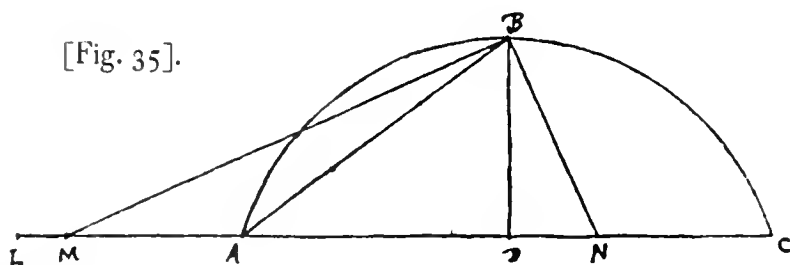


æquales fit earum una FK. Et erit AF [iſez AK] æqualis arcui ABC, minimo excedens.

Ratio constructionis. AG fit $\frac{2cc}{a}$. AF est $2c$. Ergo FG, $\frac{2cc}{a} - 2c$. Et GH $\propto \frac{2}{3} \frac{cc}{a} - \frac{2}{3}c$. Qua ablata ab GA, $\frac{2cc}{a}$ fit HA $\propto \frac{4}{3} \frac{cc}{a} + \frac{2}{3}c$. Et CH $\propto \frac{4}{3} \frac{cc}{a} + \frac{2}{3}c - 2a$.

Et hujus $\frac{1}{5}$ nempe FK $\frac{\frac{4}{3} \frac{cc}{a} + \frac{2}{3}c - 2a}{5}$ qua addita ad AF $\propto 2c$, fit AK $\propto 2c + \frac{\frac{4}{3} \frac{cc}{a} + \frac{2}{3}c - 2a}{5}$.

Constructio omnium accuratissima, et elegantissima ex approximatione veteri, $\frac{10cc - 10aa}{6c + 9a} + a$, noviter inventa ¹³⁾. Sit datus arcus portionis ABC, cujus basis



¹³⁾ C'est la rectification approchée de l'arc de cercle de la p. 275 du T. VI dont nous avons parlé au début du présent Avertissement.

AC diameter BD [Fig. 35]. In producta basi accipiatur AL æqualis $\frac{2}{3}$ subtenfæ AB. Et minuatur DL parte sui decima LM. Ductaque recta MC, fit ei perpendicularis BN. Erit AN arcui AB æqualis, et dupla AN arcui ABC.

$$\text{Ratio constructionis quod } \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a} \propto \frac{cc - aa}{\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3}c + \frac{2}{10}a}.$$

Est autem AD $\propto a$, AB $\propto c$, ideoque BD $\propto \sqrt{cc - aa}$. Unde
 ut MD ad BD ita BD DN
 $\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3}c + \frac{2}{10}a \text{ — } \sqrt{cc - aa} \text{ — } \sqrt{cc - aa} / \frac{cc - aa}{\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3}c + \frac{2}{10}a}$ cui additur
 AD $\propto a$.

Hæc constructio etsi in parvis arcubus parum excellat præcedentem, in magnis tamen arcubus multo præstantior est, nam etsi arcus ABC sit semicirculi, tamen dupla longitudo AN non excedet arcum ABC $\frac{1}{1400}$ sui ipsius cum eo casu in priori constructione AK excedat arcum ABC amplius quam $\frac{1}{370}$ suæ longitudinis.

Quod si vero ABC sit triens circumferentiæ, jam in posteriori constructione, longitudo dupla AN non excedet arcum ABC $\frac{1}{13000}$ sui parte. At si ABC sit circumferentiæ quadrans, non erit excessus $\frac{1}{90000}$ duplæ AN.

Rursus si ABC sit $\frac{1}{8}$ circumferentiæ, non erit excessus $\frac{1}{380000}$ duplæ AN.

Differentia inter subtenfam et sinum est ad differentiam inter arcum et sinum ut sexcupla subtenfa cum noncuplo sinu ad decuplum summæ sinus et subtenfæ.

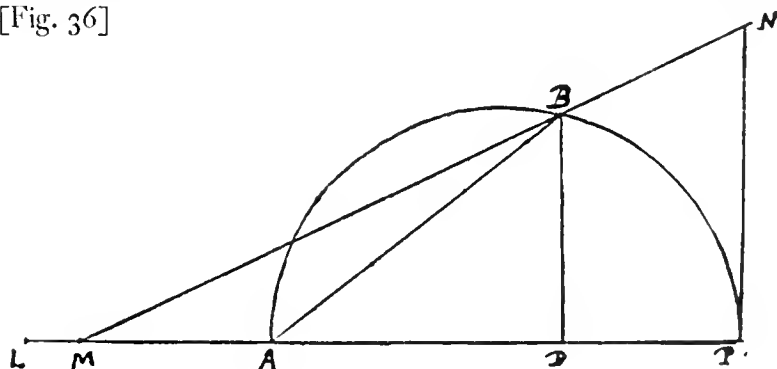
Vel

Dato arcu circuli quadrante non majori, si fiat ut sexcupla subtenfa cum noncuplo sinu, ad summam sinus subtenfæque ita eorundem differentia ad aliam, ejus decupla addita sinui efficiet longitudinem arcus.

Vel sic optime.

Omnis circuli portionis, semicirculo non majoris, arcus æqualis est basi portionis et lineæ quæ sit ad diametrum portionis ut idem diameter ad novem decimas compo

[Fig. 36]



fitæ ex quadrante basis cum triente lateris trianguli maximi intra portionem inscripti.

Potest et eadem constructio variari hoc modo.

Sit datus arcus BP [Fig. 36] pars semicircumferentiæ ABP, dimidia minor. Ducatur BD perpendicularis diametro AP. Et jungatur AB, ejusque duabus tertijs sumatur æqualis AL in producta diametro PA, totaque LD diminuatur parte sui decima LM, et jungatur MB et producat occurratque tangenti circumferentiam ad P, in puncto N. Erit PN æqualis arcui PB.



APPENDICE V

À LA PIÈCE VI DE LA P. 259

(INSUFFISANCE DE LA DÉMONSTRATION DE GREGORY

DE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE, 1668).

Ce n'est pas seulement à la quadrature du cercle que se rapportaient les publications de Gregory, c'est aussi à celle de l'hyperbole. Or, dans sa critique du 2 juillet 1668, mentionnée au début de notre Appendice I, Huygens ne dit rien de l'hyperbole. Dans le projet d'une réplique qui constitue notre Appendice II il se contentait également de dire (premier alinéa) qu'il demeure encore incertain si le cercle et le carré de son diamètre ne sont pas commensurables, c'est à dire s'ils ne sont pas entre eux en raison de nombre à nombre (le mot „nombre” étant pris dans le sens de nombre entier ou fourd; comparez la p. 188 qui précède). Mais dans sa réplique imprimée il ajoute (T. VI, p. 273, l. 7—9): et de même en ce qui est d'une portion déterminée de l'hyperbole, et de sa figure rectiligne inscrite. Et à la p. 274: je trouve que cette approximation ¹⁾ n'est pas vraie dans le cercle, quoiqu'elle le soit dans l'hyperbole; et que comme dans celle-ci il prend la plus grande des quatre moyennes arithmétiques, il faut prendre la plus petite pour l'approximation du cercle ¹⁾.

C'est aux p. 54—55 et 60 du Manuscrit D que Huygens considère la quadrature approchée de l'hyperbole, la comparant avec celle du cercle. P. 54 du Manuscrit (on trouve d'ailleurs les mêmes „termini minor et major” du cercle déjà à la p. 311 qui précède ²⁾):

¹⁾ A la p. 43 du Manuscrit D Huygens écrit, après un long calcul numérique, en parlant des 4 proportionnelles arithmétiques intercalées par Gregory entre un „terminus major” et un „terminus minor” (il s'agissait de trouver un nouveau „terminus” plus rapproché — „terminus major” plus petit dans le cas du cercle —, voyez sur cette question l'alinéa „D'après Huygens etc.” de la p. 312 de l'Appendice III qui précède): non ergo maxima sed minima 4 mediarum arithmetice proportionalium inter inventos terminos Gregorio sumenda erat, in Circulo et Ellipsi faltem (dans la „Vera circuli et hyperbolæ quadratura” de Gregory il est aussi question de l'ellipse).

²⁾ Il est vrai que le c et le a du présent Appendice ne sont pas les mêmes que le c et le a de l'Appendice III, mais ils leur sont proportionnels (nous parlons toujours du cercle) dans le rapport de la corde au rayon; c'est pourquoi l'on trouve ici, avec les nouveaux c et a , formellement les mêmes „termini” pour le secteur divisé par la demi-corde que dans l'Appendice III pour l'arc.

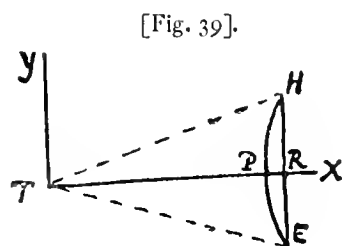
$$\begin{array}{lcl}
\frac{cc}{a} - a \left[\text{multipl. par. } \frac{HE}{2} = \right] \triangle HLE & a - \frac{cc}{a} \left[\text{multipl. par } \frac{HE}{2} = \right] \triangle HLE \\
\hline
\text{[multipl.]} \frac{\frac{2}{3} \frac{cc}{a} - \frac{2}{3} a \left[\text{m. par. } \frac{HE}{2} > \right] \cap HPE}{\frac{2}{3}} & \frac{\frac{2}{3} a - \frac{2}{3} \frac{cc}{a} \left[\text{m. par } \frac{HE}{2} ? \right] \cap HPE}{\frac{2}{3}} \\
\text{ceci en vertu du Th. IV. Prop. IV de „De Circuli magnitudine inventa”.} & \text{d'après le Th. XXIV de la „Vera circuli et hyperbolæ quadratura” de Gregory 4)} \\
a \left[\text{m. par } \frac{HE}{2} = \right] \triangle THE & a \left[\text{m. par } \frac{HE}{2} = \right] \triangle THE \\
\hline
\text{[addition]} \frac{\frac{2}{3} \frac{cc}{a} + \frac{1}{3} a \left[\text{m. par } \frac{HE}{2} > \right] \nabla THPE}{\frac{2}{3}} & \text{ex } \frac{\frac{2}{3} \frac{cc}{a} + \frac{1}{3} a \left[\text{m. par } \frac{HE}{2} ? \right] \triangle HTEP}{\frac{2}{3}} \\
\text{major terminus} & \text{minor terminus}
\end{array}$$

Ici aussi il y a chez Huygens erreur dans le cas de l'hyperbole. Il s'agit, comme dans le cas du cercle, d'un „terminus major” 5).

4) Comparez la note 6 qui suit.

5) C'est ce qu'on peut démontrer directement comme suit. Soit l'équation de l'hyperbole HPE

[Fig. 39] en coordonnées rectangulaires $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$. Le segment HPER est $2 \int_c^x y dx$. On a



[Fig. 39].

$$\triangle THPE = xy - 2 \int_c^x y dx. \text{ Il faut prouver}$$

$$xy - 2 \int_c^x y dx < y \left(\frac{2}{3} \frac{c^2}{x} + \frac{1}{3} x \right)$$

$$\text{c. à. d. } (x^2 - c^2)y < 3x \int_c^x y dx \text{ pour toute valeur}$$

de x supérieure à c .

Pour $x = c$, les deux membres s'annulent. Il suffit donc de faire voir que les accroissements du premier membre sont toujours inférieurs aux accroissements correspondants du deuxième, c. à. d. que (après réduction)

$$x(x^2 - c^2) dy < y(2x^2 - c^2) dx$$

$$\text{ou } x(x^2 - c^2) dy < (2x^2 - c^2) \frac{c^2 y^2}{q^2 x} dy$$

$$\text{ou } c^2 < x^2, \text{ ce qui est vrai.}$$

L'expression $\frac{2}{3} \frac{cc}{a} + \frac{1}{3} a$ est donc un „terminus major”. C. Q. F. D.

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a \text{ major terminus Gregorij } ^6) \\ & \frac{2}{3}\frac{cc}{a} + \frac{1}{3}a \text{ minor terminus Gregorij } ^7) \\ & [\text{foustraction}] \end{aligned}$$

Comme nous l'avons dit plus haut la première expression correspond au „terminus minor” et la deuxième au „terminus major”. On voit tout de suite que la deuxième est supérieure à la première puisque $\frac{2}{3}\frac{c^2}{a} + \frac{1}{3}a - (\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a) = \frac{2}{3a}(a-c)^2$.

⁶⁾ Comme nous l'avons dit à la p. 311, les deux expressions font, dans le cas du cercle, à la fois des „termini Hugonii” et des „termini Gregorii”; où toutefois Huygens a la priorité. Ici Huygens parle de l'hyperbole, de sorte que l'expression „termini Gregorii” semble préférable.

⁷⁾ Huygens écrit à la même p. 54:

$$\begin{array}{rcccl} \text{TV} & c + \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}c & \frac{2}{3}\text{RTP} & \triangle \text{HPE} & \bigcap \text{HPE} & \bigcap \text{HPE} \\ \text{TV} & \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}c & \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c & a - c & \sqrt{\frac{\frac{2}{3}aa - \frac{2}{3}cc}{\frac{2}{3}c + \frac{2}{3}a}} & \left| \frac{10aa - 10cc}{6c + 9a} \right. \\ & & & & & \text{ex } a \\ & & & & & a - \frac{10aa - 10cc}{6c + 9a} \end{array}$$

minor terminus meus in hyperb. $\triangle \text{THPE}$ (lequel peut aussi s'écrire

$$\frac{\frac{10}{3}c^2 + 2ac - \frac{1}{3}a^2}{2c + 3a}).$$

Comparez sur ce calcul la note 3 qui précède. Seulement Huygens prend ici pour V le centre de gravité d'un segment de *parabole* au lieu du segment *hyperbolique* considéré, comme il le faisait aussi en d'autres occasions (voyez les p. 432 et 454 du T. XIV). Il n'obtient donc pas la valeur exacte de la surface du segment hyperbolique HPE, mais la valeur approchée $\frac{10}{2} \left(\frac{10a^2 - 10c^2}{6c + 9a} \right)$, d'où se tire pour le $\triangle \text{THPE}$ la valeur approchée

$\frac{\text{HE}}{2} \cdot \frac{\frac{10}{3}c^2 + 2ac - \frac{1}{3}a^2}{2c + 3a}$. Pour reconnaître s'il s'agit d'un „terminus major” ou bien d'un „terminus minor”, il peut sembler qu'il faille savoir d'ailleurs si le centre de gravité du segment hyperbolique se trouve, oui ou non, plus près de la base que celui du segment parabolique également symétrique de même base et de même hauteur. En réalité cela n'est nullement nécessaire: on voit que la formule pour $\triangle \text{THPE}$ s'annule non seulement pour $\text{HE} = 0$ (segment évanouissant), ce qui est évident a priori, mais aussi pour $a = c(3 + \sqrt{19})$, où le $\triangle \text{THPE}$ a, comme toujours, une valeur positive; nous avons donc affaire à un „terminus minor”.

$$\frac{4}{3}c - \frac{2}{3}\frac{cc}{a} - \frac{2}{3}a \text{ diff. term. Greg.}$$

Différence négative.

$$\begin{array}{l} \text{[mult.]} \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{15}c - \frac{8}{15}\frac{cc}{a} - \frac{8}{15}a} \quad \frac{4}{3} \text{ diff.} \\ \frac{2}{3}\frac{cc}{a} + \frac{1}{3}a \quad \text{minor term.} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{[mult.]} \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{15}c - \frac{8}{15}\frac{cc}{a} - \frac{8}{15}a} \quad \frac{4}{3} \text{ diff.} \\ \frac{2}{3}\frac{cc}{a} + \frac{1}{3}a \quad \text{minor term.} \end{array}} \right\} \text{a. [c. à d. addendo]}$$

C'est au contraire un „terminus major”. L'addition ne donne donc pas, comme Huygens le pense, le terminus minor $+\frac{1}{3}$ (t. major — t. minor), mais le t. minor $+\frac{1}{3}$ de cette différence.

$$\frac{1}{15}c + \frac{2}{15}\frac{cc}{a} - \frac{3}{15}a \text{ approximatio Gregorij } \triangle \text{ THPE [c'est donc là}$$

l'approximation que Huygens appelle „approximatio Gregorij” et dont il disait dans les paroles citées plus haut qu'elle est vraie . . . dans l'hyperbole] quæ erit minor terminus quippe minor etiam meo termino hic invento [voyez la note 7], ut constabit simili demonstratione ac pag. 4 [nos p. 312—316, démonstration se terminant par les mots: Et cum mea sit major vero et minor quam ipsius, erit et ipsius major vero] observando quod hic a major quam c [de sorte que $(c-a)^3$ est négatif]. On voit en effet que la „demonstratio” est „similis”

puisque l'approximation trouvée par Huygens (note 7) $\frac{\frac{1}{3}c^2 + 2ac - \frac{1}{3}a^2}{2c + 3a}$ a exactement la même forme pour l'hyperbole que pour le cercle avec cette différence que cette expression constitue un „terminus major” pour le cas du cercle, mais un „terminus minor” pour celui de l'hyperbole.

Il importe peu que c et a soient ici, tant pour la formule $\frac{1}{15}c + \frac{2}{15}\frac{cc}{a} - \frac{3}{15}a$ que pour la formule $\frac{\frac{1}{3}c^2 + 2ac - \frac{1}{3}a^2}{2c + 3a}$, d'autres grandeurs que dans les formules identiques de la p. 312 (comparez la note 2 de la p. 323). L'„approximatio Gregorii” est donc en effet, comme Huygens le dit, un „terminus minor”.

La valeur $\frac{10(a^2 - c^2)}{6c + 9a}$, elle, est donc supérieure à la vraie valeur du segment hyperbolique,

de sorte qu'on peut conclure ici en passant (ce que Huygens ne fait pas) que le centre de gravité du segment hyperbolique est plus près de la base que celui du segment parabolique. Nous avons admis tacitement que s'il en est ainsi pour les centres de gravité de deux segments symétriques de même base et de même hauteur, il en est aussi de même pour toute autre paire de pareils segments (l'un hyperbolique, l'autre parabolique) de même base et de même hauteur, ce qui peut être justifié par des considérations géométriques.

APPENDICE I

À LA PIÈCE VIII DE LA P. 265 (PROBLEMA ALHASENI)

1672.

25 Maj. 1672.

Problema Alhaseni. Dato circulo cujus centrum A radius AD, et punctis duobus B, C. Invenio punctum H in circumferentia circuli dati, unde ductæ HB, HC faciant ad circumferentiam angulos æquales.

Etc. C'est, peut-on dire, la Pièce que nous avons publiée dans le T. VII, p. 187—189 (pièce 1891). Comme on le voit dans ce Tome, elle fut envoyée de Paris par Huygens à Oldenburg dans une lettre du 1 juillet 1672. Les f. 136 et suiv. des Chartæ mathematicæ, auxquelles nous empruntons le présent Appendice, nous font connaître la date de la composition. Voyez aussi sur la pièce 1891 le premier alinéa de l'Appendice II qui suit.

Dans la lettre Huygens a copié presque mot à mot la Pièce du 25 mai, mais il a omis la „ratio constructionis” ou plutôt il ne l'a indiquée que dans trois lignes. Voici d'après la Pièce originale cette

Ratio Constructionis (où il faut consulter les deux figures de la planche vis-à-vis de la p. 187 du T. VII). Ducantur $P\gamma$, $Q\zeta$ perpendiculares in AM. Est ergo ut BA ad PA, hoc est, ut qu. BA $\propto aa + bb$ ad qu. IA $\propto dd$, ita MA $\propto a$ ad $A\gamma \propto \frac{add}{aa + bb}$, cui æqualem posuimus p . Ergo $A\gamma \propto p$. Sed ut AL ad AM ita CA ad AB, et ita PA ad AQ, (est enim $\square BAP \propto \square CAQ$, quia utrumque æquale qu.° AD radij). Ut autem PA ad AQ ita $A\gamma$ ad $A\zeta$. Ergo ut AL $\propto c$ ad AM $\propto a$ ita $A\gamma \propto p$ ad $A\zeta \propto \frac{ap}{c}$. Quia autem R dividit bifariam rectam PQ, etiam o bifariam secabit $\gamma\zeta$. Quamobrem AO erit $\propto \frac{1}{2} A\gamma + \frac{1}{2} A\zeta$, hoc est $\propto \frac{1}{2} p + \frac{1}{2} \frac{ap}{c}$, cui æqualem posuimus s . Ergo AO $\propto s$. Et OF $\propto x - s$.

Porro ut AL $\propto c$ ad LC $\propto n$ ita est $A\gamma \propto p$ ad γP , quæ est $\frac{pn}{c}$. Item ut PA ad AQ hoc est ut CA ad AB, hoc est ut CL $\propto n$ ad MB $\propto b$ ita $P\gamma \propto \frac{pn}{c}$ ad $Q\zeta$, quæ ergo erit $\frac{bp}{c}$. Sed propter PQ bifectam in R, facile apparet esse OR $\propto \frac{1}{2}$ differentiæ inter $Q\zeta$ et $P\gamma$. Ergo OR erit $\frac{1}{2} \frac{pb}{c} - \frac{1}{2} \frac{pn}{c}$, cui æquale posuimus q . Ergo OR five FV $\propto q$. Et VH $\propto y - q$. Sed erat OF five RV $\propto x - s$. Ergo $\square RVH \propto xy -$

$qx - sy + sq$. Sed idem \square RVII ex constructione æquale est \square^c AOR hoc est sq , nam AO est s et OR $\propto q$. Ergo $xy - qx - sy + sq \propto sq$, et ablatis æqualibus fit $xy \propto qx + sy$ ut in æquatione superius inventa. [Ergo] constat recte constructum esse problema.

Quod autem hyperbolæ per puncta P, Q transeunt sic constabit. Si enim in æquatione superiori $\frac{pbx - pux + pcy + pay}{2c} \propto xy$, fuerit $x \propto p \propto A\gamma$, fiet

$\frac{bp - np + cy + ay}{2c} \propto y$ et $\frac{bp - np}{a - c} \propto -y$. Ergo $a - c$ ad $b - n$ ut p ad $-y$. Sed

$a - c$ est ad $b - n$ ut a ad b , quia a ad b ut c ad n . Ergo a ad b ut p ad $-y$. Sed ut a ad b , hoc est, ut AM ad MB ita p sive $A\gamma$ ad γP . Ergo $\gamma P \propto -y$ quand [sic] $A\gamma \propto x$. Unde liquet hyperbolam transire per punctum P. Itaque et per Q transibit hyperbola opposita quia PR \propto RQ ex constructione. Estque R centrum oppositarum sectionum.

Ensuite Huygens considère quelques cas particuliers. Il biffa plus tard ces remarques au crayon, ne les jugeant sans doute pas fort importantes.

Voyez sur les solutions concurrentes de René de Sluse et de Huygens du problème d'Alhazen dans les années 1671 et 1672 les p. 218 et 219 (note 128) de l'Avertissement qui précède.

APPENDICE II

À LA PIÈCE VIII DE LA P. 265 (PROBLEMA ALHAZENI)

1673.

Chartæ mathematicæ f. 147: De problemate Alhafeni . . . Il y a une plus belle solution et démonstration que toutes celles cy dans mon livre d'adversaria marqué D, pres de la fin, ou dans un in 4°. Consultez aussi sur ce sujet notre note 30 à la p. 497 du T. X: en disant que la solution de la pièce 1891 — c. à. d. de la Pièce publiée dans le T. VII dont il est question dans l'Appendice précédent — est „la plus simple et la plus élégante” nous avons tenu compte du fait, mentionné dans cette note 30, que la solution de la pièce 1891 et celle de l' „in 4°” c. à. d. du Manuscrit 11, ne sont pas entièrement dissemblables.

Les p. 301, 384, 393, 418 du Manuscrit D contiennent en effet des figures se rapportant à la solution du Manuscrit 11. Ces dernières pages du Manuscrit D datent de 1673; le texte du Manuscrit 11 peut être de beaucoup plus tard. Les Chartæ mathematicæ contiennent d'ailleurs aussi (outre plusieurs autres feuilles se rapportant au problème d'Alhazen) une double feuille séparée (f. 143—144) qui porte la date du 2 septembre 1673 et donne la même solution; une de ses figures a été utilisée dans la note 3 de la p. 570 du T. X. Le texte du Manuscrit 11 a apparemment été copié en partie de celui de la double feuille 143—144. Nous avons déjà dit vers la fin de la p. 271 qui précède que c'est ici la construction préférée par Huygens. Comme la p. 570 citée le fait voir, Huygens envoya, ou du moins se proposait en novembre 1693 d'envoyer cette solution en France, où elle ne fut toutefois pas publiée. Voyez encore sur ce sujet notre remarque à la p. 271 qui précède.

Voici le texte du Manuscrit 11 (p. 1—6):

*Problema Alhafeni ad inveniendum in superficie speculi
sphaerici punctum reflexionis.*

Extat hoc problema in Alhafeni Arabis libris, quos de rebus opticis conscripsit, unde idem transcripsit, ut cætera fere omnia, Vitellio ¹⁾. Est autem solutio ac demonstratio Alhafeni longa admodum ac tediola, ipsumque problema difficile visum est geometris plerisque nec a quoquam postea brevius constructum quod sciam. Cæterum analyticæ artis opera non uno modo illud resolvimus, quorum tandem hic quem tradimus, visus est omnium optimus brevissimusque.

Sit ergo propositum dato circulo cujus centrum A, punctisque B, C, invenire in

¹⁾ Voyez sur les ouvrages d'optique d'Alhazen et de Vitellio les p. 6 et 9 du T. I et 5 du T. XIII.

circumferentia punctum H [Fig. 40] ut ductæ BH, HC occurrant circumferentiæ ad

angulos æquales, five ut æquales sint
anguli AHB, AHC.

Sit factum, et ducatur HP ut sit
 angulus HPA æqualis BHA. Item
 ducatur HQ, ut angulus HQA sit
 æqualis CHA. Est ergo et angulus
 HQA æqualis HPA. Erunt vero
 similia triangula BHA, HPA, cum
 et angulum A commune habeant.
 Itemque similia erunt triangula
 CHA, HQA. Proportionales igitur
 BA, AH, AP; item CA, AH, AQ.
 cumque duæ priores proportiona-
 lium utrobique datæ sint, dabitur et
 tertia. Datæ igitur AP, AQ. Vocetur jam AQ, a ; AP, b . Ductâque HO
 parallêlâ AC, et HI parallêlâ AB,
 sit $AI \propto x$: $IH \propto y$.

Erunt autem similia triangula HOP, HIQ, cum æquales habeant angulos ad O et I, itemque ad P et Q. Itaque ut HO ad OP ita HI ad IQ. Unde rectangulum HO, IQ, sive rectangulum AIQ æquale rectangulo HI, OP, sive rectangulo AOP. Est autem $AI \propto x$; $AQ \propto a$. Ideoque $QI \propto x - a$. Et rectang. AIQ $\propto xx - ax$. Est etiam AO sive IH $\propto y$; AP $\propto b$; unde OP $\propto y - b$, ac proinde rectang. AOP $\propto yy - by$. Itaque $xx - ax \propto yy - by$. Unde patet, secundum regulas artis, punctum H esse ad hyperbolen; cujus latus transversum rectumque æqualia, siquidem in æquatione inveniuntur xx et yy nulla proportionem affecta. Erit autem *constructio* hujusmodi.

Applicato quadrato radij ad singulas AB, AC, fiant AP, AQ, super rectis AB, AC accipiendæ; junctâque PQ dividatur ea æqualiter in puncto N²). per quod ducatur recta DN parallela AV, quæ angulum BAC æqualiter partitur. Ipsam vero ND ad N, recta alia ad rectos angulos fecet, occurrens lineis AB, AC in Met S. Jam, asymptotis DN, NS, descriptæ intelligantur hyperbolæ oppositæ per puncta P, Q transeuntes; quarum altera etiam per centrum A transibit. Hæ secabunt circumferentiam in punctis H, h quæsitis ad quæ nimirum ductæ BH, HC propositum efficient.

²⁾ Ce point N correspond au point Z de la Fig. 19 de la p. 270 qui précède. L'hyperbole de cette Fig. 19 est la même que celle considérée dans la présente Pièce.

Demonstratio. Ducantur enim PR, QF rectæ NS perpendiculares. Quia ergo PN æqualis NQ ex constructione erit et PR æqualis QF. Similia autem sunt triangula PRM, QFS, propter æquales angulos M et S ex constructione. Ergo MR æqualis SF. Quare et MS æqualis RF. Sed MS dupla est VS: et RF dupla NF, propter æquales PN, NQ. Itaque et VS æqualis NF; ideoque et VN æqualis SF. Est autem sicut SF ad SQ, five ut SN ad SD ita VN ad AD. Ergo AD æqualis SQ, ideoque punctum A est in sectione opposita ipsi QH sectioni, hoc est in eadem in qua et punctum P, per 16 lib. 2 Conicorum ³⁾).

Jam ducantur HO parallela AQ et HI parallela AP, occurrens sectioni in Z. Item jungantur AH, HP, HQ, et per N ducatur recta TNE parallela AQ; ea dividet AP æqualiter, quia PN æqualis NQ. Est ergo AP ordinatim applicata ad sectionis diametrum TNE. Quod si ducatur ipsi AP parallela QK, etiam hæc diametro TNE ordinatim applicata erit, et ab ea proinde æqualiter dividetur in E. cumque QE sit æqualis AT, erit et tota QK æqualis AP. Quare si ducatur PK, ea erit parallela TE diametro. Conveniat autem cum recta HI in X. Cum igitur HXZ ad diametrum TE ordinatim sit applicata, quippe parallela AP ex constructione, sitque oppositarum sectionum latus rectum transversum æquale, ex prop. 22. lib. 3. Conicorum ⁴⁾) rectangulum P XK æquale esse rectangulo HXZ, ac proinde PX ad XH, hoc est HO ad OP, ut XZ ad XK, hoc est ut HI ad IQ. Est enim XZ æqualis HI, quoniam IX et ZH utraque bisecantur à recta TE. Sunt ergo similia triangula HOP, HIQ, cum anguli ad O et I æquales sint. Quare etiam æquales anguli HPO, HQI: ac proinde et HPA, HQA. Atqui angulus HPA æqualis est BHA, quia similia sunt triangula BHA, HPA, propter proportionales BA, AH, AP ex constructione, angulumque utrique triangulo communem ad A. Similiterque angulus HQA æqualis CHA quia similia sunt triangula CAH, HAAQ propter proportionales CA, AH, AQ. Ergo etiam æquales erunt anguli BHA, CHA. quod erat demonstrandum.

Conveniunt autem tum constructio tum demonstratio, iisdem verbis expressæ, omnibus casibus, five extra five intra circulum puncta B, C data sint, five alterum extra alterum intra.

³⁾ Apollonii Conica, Lib. II, Prop. XVI (d'après le texte latin de Heiberg): „Si in oppositis recta ducitur utramque rectam secans, quæ angulum angulis sectiones continentibus deinceps positum comprehendunt, cum utraque opposita in uno solo puncto concurret, et rectæ ex ea a sectionibus ad asymptotas abscissæ æquales erunt”.

⁴⁾ Apollonii Conica, Lib. III, Prop. XXII: Si sectiones oppositas duæ rectæ parallelæ contingunt, et ducuntur rectæ quædam secantes et inter se et sectiones, altera contingentem parallelam, altera rectæ puncta contactus coniungenti parallelam, erit, ut latus transversum figuræ rectæ puncta contactus coniungenti applicatæ ad rectum, ita rectangulum comprehensum rectis inter sectiones punctumque concursus positum ad rectangulum comprehensum rectis inter sectionem punctumque concursus positum”.

APPENDICE

À LA PIÈCE XII DE LA P. 286

(SUR LES ÉQUATIONS SOLIDES, 1680).

[1682]

Nous avons annoncé à la p. 106 du T. XII la publication dans un Tome ultérieur, de la Pièce empruntée au Manuscrit 11 qui constitue la partie B (à laquelle se rattache la partie C) du présent Appendice; auparavant (T. XII, p. 103—106) nous avons publié les constructions antérieures de Huygens de deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données; en même temps que de la présente Pièce nous y faisons mention de ce qui a été appelé ici la Pièce XII, savoir la communication de 1680 de Huygens à l'Académie.

C'est par exception — voyez la p. 207 de l'Avertissement qui précède et la note 1 qui suit — que nous publions comme Appendice à l'une des communications à l'Académie sur des sujets de mathématique, une pièce de Huygens datant (quoique peu) d'après son départ définitif de Paris.

On peut voir aux pages citées du T. XII que ce fut par la solution exposée par Slusius dans la deuxième édition, datant de 1668, de son „Mesolabum” — mot emprunté à Eratosthène parlant du problème deliaque (duplication du cube) et proposant un instrument pour le résoudre par la recherche de deux moyennes proportionnelles — que Huygens fut amené à s'occuper de nouveau du problème. Nous faisons précéder la Pièce du Manuscrit 11 par une page (notre partie A) du Manuscrit F, où Huygens raconte lui-même ce qui l'amena à mettre par écrit le présent article, se rapportant non seulement (partie B) au problème des deux moyennes proportionnelles, mais plus généralement (comme le „Mesolabum” de Slusius) à des „solida problemata”.

A¹). Cum Rev. Franc. Slusius ad me misisset Construcciones Problematis Deliaci quas typis vulgaverat ²), nec explicasset qua via ad eas pervenisset; ego, id investigans, hanc rationem tunc inveni quæ in sequentibus exponetur, quamque deinde cum fuorum inventorum originem ille edidisset dissimilem esse comperi. Sed eam tunc neglexi quod eandem quidem sed non meliores Deliaci Problematis construcciones

¹) Manuscrit F, p. 134. La p. 112 porte la date du 16 avril 1682. Aux p. 131 et 135 on trouve des calculs sur les passages de Mercure devant le soleil respectivement de janvier 1682 et du 31 août 1682. Il paraît donc fort probable que la présente page date de 1682 et la Pièce du Manuscrit 11 pareillement.

²) En 1657 (T. II, p. 36) Slusius avait envoyé à Huygens des constructions de ce genre déjà avant de les avoir publiées. Le „Mesolabum” parut pour la première fois en 1659; Slusius l'envoya à Huygens en juillet (T. II, p. 437). En septembre 1668 (T. VI, p. 262) Huygens reçut également la deuxième édition. Voyez en outre la p. 105 du T. XII.

proderet. Jam vero post annos aliquot in Apolloniano problemate ³⁾ eandem rationem expertus, ubi a puncto dato in datam conifsectionem perpendicularis duci imperatur, quod ille ut solidum construit eoque ab alijs reprehendi meruit, inveni solutionem problematis ejus circuli ope ac folius quæ data est sectionis conicæ, quod in parabola quidem jam olim præstiteram ⁴⁾, sed in hyperbola et ellipsi multo plus erat negotij, cum autem longiuscula in his esset constructio mea eoque dubitarem an non melior quæpiam invenienda restaret, operæ pretium non duxi adversarijs eam describere. Postquam vero gallus quidam geometra ⁵⁾ Slusiana methodo usus, multo operosiores longioresque solutionem ejusdem problematis edidisset, tunc demum alicujus pretij mea esse mihi visa est, simulque intellexi methodum qua eam inveneram anteponendam Slusianæ methodo ad solida pleraque problemata, cum et compendiosior sit nec tantis quærendi ambagibus obnoxia ⁶⁾.

Inventa solutione per circulum et conifsectionem similem datæ, habetur simul solutio per circulum et ipsam sectionem datam, quod d. Slusius in Mesolabo videtur animadvertisse. Inventis enim Ellipsis similis quæ describenda non est latere transversa, item circuli, qui illam interfecando problema solvit, diametro; et positione centri ad Ellipsis illius latus transversum. opus tantum est omnia hæc augere vel minuire proportionaliter, secundum rationem dicti lateris transversi ad latus transversum ellipsis datæ, peractaque constructione qualis inveniebatur cum Ellipsi simili faciendâ, prodibit non quidem linea quæsita sed ejusmodi quæ reducta proportionem priori contrariâ, quæsitam exhibeat.

³⁾ Voyez la note 6 de la p. 342 qui suit.

⁴⁾ Voyez les p. 81—82 du T. XII, datant de 1653, ainsi que la p. 422 du T. XIV et la Pièce bien rédigée des p. 533—534 du T. I.

Dans la Préface de „La Construction des équations analytiques” par M. de la Hire de l’Ac. R. d. Sciences, qui constitue la troisième partie de ses „Nouveaux éléments” de 1679, l’auteur écrit: „Avec ma méthode j’ai construit les plus beaux Problèmes qui aient été proposés jusques à présent, entre lesquels est celui de la Perpendiculaire d’un point donné, menée à une Ellipse ou à une Hyperbole: car pour la Parabole, il y a long-temps que Monsieur Huygens l’a publiée, en ne se servant d’autre section conique que de celle qui est proposée; *ce que j’ai mis il a déjà du temps dans les Registres de l’Académie des Sciences* [nous soulignons].

⁵⁾ Il s’agit de Ph. de la Hire; voyez sur sa publication de 1679, outre la note précédente, l’Avertissement qui précède (p. 220). Dans la Préface citée dans la note précédente de la Hire parle aussi de Slusius traitant, après Descartes, de „la construction des Equations”. Il ajoute: „Et comme je faisais voir à Monsieur Hugens de Zulichem les raisons que j’avais de reprendre ainsi Monsieur Descartes, il m’a communiqué un Manuscrit de Monsieur de Fermat, d’une manière de construction des Equations, dans laquelle il le reprend aussi sur le même sujet”. Etc.

Dans les Manuscrits nous n’avons trouvé qu’un seul endroit où Huygens cite un ouvrage de de la Hire en appelant ce mathématicien par son nom: c’est à la p. 143 du Manuscrit F datant sans doute de 1682 (la p. 135 est datée 31 août 1682). Huygens y cite la „p. 448” ce qui s’applique aux „Nouveaux éléments”.

⁶⁾ Voyez cependant la fin du présent Appendice.

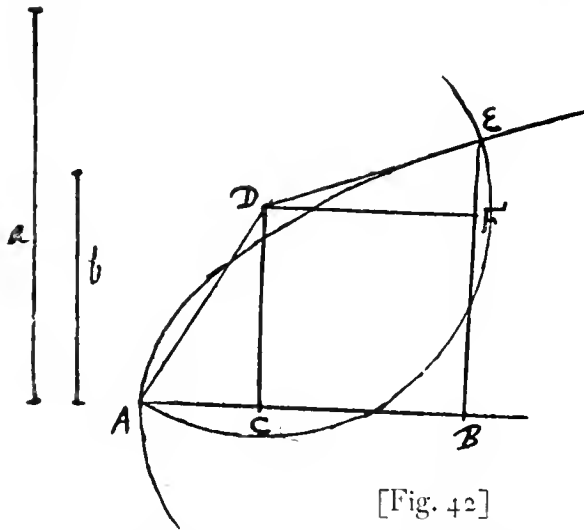
**B.C. CONSTRUCTIO PROBLEMATUM SOLIDORUM PER
RESOLUTIONEM ÆQUATIONIS IN DUOS LOCOS.**

B¹⁾. § 1. Sit data æquatio $abb \propto x^3$, quæ est ad inveniendas duas medias proportionales inter datas lineas a et b . Est enim hic x mediarum altera, proxima datæ b

Primum utramque æquationis partem duco in x , fit $x^4 \propto abbx$, tum divido per bb , fit $\frac{x^4}{bb} \propto ax$. Jam utrimque addo $-xx + \frac{1}{4}bb$, fit $\frac{x^4}{bb} - xx + \frac{1}{4}bb \propto ax - xx + \frac{1}{4}bb$, ut nempe ea pars ubi est $\frac{x^4}{bb}$ fiat quadratum; ex altera parte vero accedat $-xx$, quod cur fiat jam parebit. Aequetur enim utraque pars æquationis quadrato yy , posita y linea incognita cui x sit ad rectos angulos. fit igitur

$$\begin{array}{rcl} xy \propto \frac{x^4}{bb} - xx + \frac{1}{4}bb & \propto & ax - xx + \frac{1}{4}bb \propto yy \\ \hline y \propto \frac{xx}{b} - \frac{1}{2}b & & ax + \frac{1}{4}bb - yy \propto xx \\ \hline by \propto xx - \frac{1}{2}bb & & \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb} - yy \propto x \\ \hline \sqrt{by + \frac{1}{2}bb} \propto x \end{array}$$

Altera harum æquationum significat locum ad parabolam. Cujus parabolæ latus rectum est b . Altera significat locum ad circuli circumferentiam, cujus radius



$\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb}$. Hæc oritur igitur constructio problematis, per parabolam et circuli circumferentiam, quæ est hujusmodi.

Sint datæ extremæ a , b . In recta AB [Fig. 42] accipiat $AC \propto \frac{1}{2}b$, cui ponatur ad angulos rectos $CD \propto \frac{1}{2}a$, junctâque AD, fit hæc radius circumferentiæ describendæ centro D. Intel ligatur etiam descripta parabola cujus axis AB, vertex A, latus rectum æquale b . Hæc circumferentiam fecit in E puncto, unde cadat in axem AB per-

¹⁾ Manuscrit 11, p. 7—15. Voyez sur la date la partie A qui précède.

pendicularis EB. Erit mediarum quæſitarum altera EB, proxima nimirum datæ b ; altera BA.

Si enim CB vocetur y ; BE, x ; erit $AB \propto \frac{1}{2}b + y$ cum AC fit $\frac{1}{2}b$. Rectangulum vero ex AB et latere recto b , erit $\frac{1}{2}bb + by$, æquale propter parabolam quadrato ex EB, nempe xx . Rursus cum quadratum ex AD five ex DE fit $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb$, quadratum vero DF, perpendicularis in EB, fit yy , erit EF quadratum $\propto \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - yy$, unde EF + FB, five EB hoc est $x \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - yy}$. Hinc autem, relegendo æquationis superioris vestigia, apparet fieri $ax - xx + \frac{1}{4}bb \propto yy$. Item ex $\frac{1}{2}bb + by \propto xx$, quod supra, relegendo fimiliter vestigia alterius æquationis, apparet fieri

$$yy \propto \frac{x^4}{bb} - xx + \frac{1}{4}bb.$$

Ergo jam

$$\frac{x^4}{bb} - xx + \frac{1}{4}bb \propto ax - xx + \frac{1}{4}bb$$

et deletis communibus

$$\frac{x^4}{bb} \propto ax$$

$x^3 \propto bba$, quæ cum sit æquatio ab initio proposita, constat eam recte constructam fuisse, et esse continuè proportionales $b, x, \frac{xx}{b}, a$. Pater etiam BA esse alterum proportionalem $\frac{xx}{b}$, cum, ex proprietate parabolæ, fit latus rectum b , ad applicatam BE, five x , ut hæc ad BA five $\frac{xx}{b}$.

Est autem constructio hæc eadem, quæ Cartesij ²⁾.

B. § 2. Data eadem æquatione $x^3 \propto abb$, atque inde, ut ante, $\frac{x^4}{bb} \propto ax$, si utrimque addatur $+ xx + \frac{1}{4}bb$, et pars utraque æquationis æquetur vv quadrato incognitæ v , quam pono perpendicularem in x , fiet hinc quidem $vv \propto \frac{x^4}{bb} + xx + \frac{1}{4}bb$, hoc est, extracta radice, $v \propto \frac{xx}{b} + \frac{1}{2}b$, five $bv \propto xx + \frac{1}{2}bb$ quod significat locum ad para-

²⁾ „L'invention de deux moyennes proportionnelles" dans le „Livre Troisième" de „La Géométrie" de 1637.

bolam, cujus latus rectum b . Ex altera vero parte fiet $vv \propto ax + xx + \frac{1}{4}bb$, qui est locus ad hyperbolen æqualium laterum, cum habeatur $+xx$, nullâ proportionem affectum, desit autem xv . cujus hyperbolæ latus transversum est $aa - bb$ [lisez $\sqrt{aa - bb}$]. Hinc igitur datur constructio problematis per intersectionem parabolæ et hyperbolæ æquilateræ.

Sed hujusmodi constructio merito rejicitur, cum constet una conic sectione et circuli circumferentia rem confici³⁾. Nec tamen frustra est illa resolutio in parabolam et hyperbolen æqualium laterum, ut jam ostendemus; id quo in hac methodo præcipuum est ac pulcherrimum.

Ex eo enim quod paulo ante invenimus problema construi intersectione parabolæ cujus latus rectum b , et circuli circumferentiæ: nunc vero idem rursus construi ostendimus intersectione ejusdem parabolæ, cujus latus rectum b , et hyperbolæ æquilateræ. Hinc inquam colligere licet, intersectionem utramque in idem parabolæ punctum casuram, ac proinde in idem hoc punctum etiam cadere intersectionem hyperbolæ æquilateræ et circumferentiæ circuli. Ita ut jam harum tantum duarum intersectione ad constructionem opus habeamus, omittâ parabola.

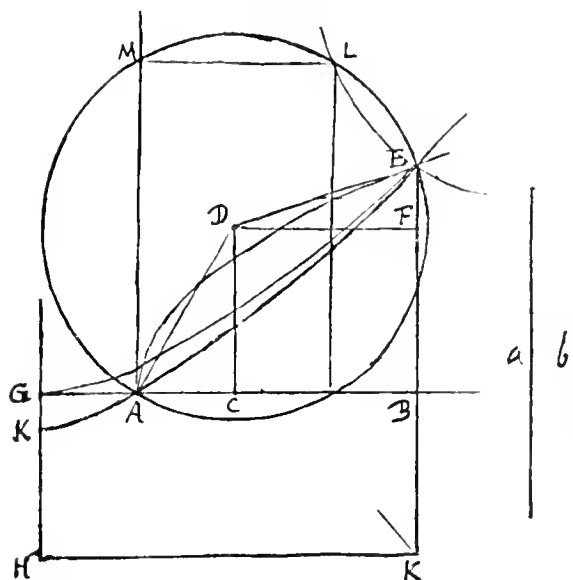
Scimus enim, in superiori constructione, posita CB in axe parabolæ $\propto y$, et BE $\propto x$ quæ sit ipsi CB ad angulos rectos, esse quidem hanc ordinatim ad axem applicatam. Rursus vero in posteriori constructione scimus, positâ v in ejusdem parabolæ axe, esse itidem lineam quæsitam x in eadem parabola ordinatim applicatam, ac proinde eandem ipsi BE ante inventæ. Itaque si parabola intelligatur AE latus rectum habens b , cumque eâ sigillatim utraque constructio perficiatur, tam quæ intersectione circumferentiæ circuli opus habebat, quam quæ hyperbolen æqualium laterum requirit, necesse est hoc modo intersectionem circumferentiæ et hyperbolæ æquilateræ ostendere punctum E, unde ducto in AB perpendiculari EB, sit quæsitæ x æqualis. idque ita ut parabolam describere opus non sit. Construetur igitur problema intersectione hyperbolæ æquilateræ et circumferentiæ circuli hoc modo [Fig. 43].

Circulus quidem eodem modo ac superius describatur AE. Porro producta BA ad G, ut sit AG æqualis AC, hoc est $\frac{1}{2}b$, factaque GH perpendiculari æquali $\frac{1}{2}a$, et quadrato HK æquali differentiæ quadratorum HG, GA, centro H, axe HG, vertice K fit descripta hyperbole æqualium laterum KAE, quæ secet circumferentiam AE in E, et sit EB perpendicularis in EB, hæc ipsa EB erit linea x quæsitæ.

³⁾ Voyez la note 6 de la p. 342.

Si enim CB [Fig. 43] ut ante vocetur y , BE, x . fit propter circulum, ut supra,

[Fig. 43].



et quadrando partem utranque fit

Erat autem, propter circulum,

Ergo $\frac{x^4}{bb} - xx + \frac{1}{4}bb \propto ax - xx + \frac{1}{4}bb$

hoc est $\frac{x^4}{bh} \propto ax$

hoc est $x^3 \propto abb$

quod erat demonstrandum.

B § 3. Facilius alia hyperbole circa afymptotos invenietur quæ cum eodem rursus circulo problema contruat. posita enim æquatione $x^3 \propto abb$, fiet $xx \propto \frac{abb}{x}$. jam si

utraque pars æquetur xb , posita x incognita, sicut ex altera parte $xv \propto xb$. quæ est æquatio ad parabolam, cujus, ut in superioribus, latus rectum est b . Ex altera vero $\frac{abb}{x} \propto bv$, hoc est $ab \propto xv$, quæ est æquatio ad hyperbolam ad asymptotos, et qui-

dem æqualium laterum si v et x angulo recto jungi intelligantur, quod semper in his fieri volumus. Posita autem parabola AE , cujus ut antea latus rectum b , facile apparet quomodo collocanda sit hyperbola de qua hic agitur. Quia enim æquatio parabolæ est

$xy \propto ax - xx + \frac{1}{4}bb$. Rurfus si GB
 seu KH vocetur v , erit summa quadra-
 torum KH, HK, $vv + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. cui
 summae æquale est, propter hyperbolen
 æquilateram, quadratum ex KE. unde

$$KE \propto \sqrt{vv + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}, \text{ et BE five}$$

$$x \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{vv + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}.$$

Hoc est, $vv \propto ax + xx + \frac{1}{4}bb$: five
(quia v , hoc est GB, est $y + b$)

$$yy + 2by + bb \propto ax + xx + \frac{1}{4}bb,$$

hoc est $yy \propto ax + xx - 2by - \frac{3}{4}bb$.

Erat autem prius

$yy \propto ax - xx + \frac{1}{4}bb$. Ergo jam

$$ax + xx - 2by - \frac{3}{4}bb \propto ax - xx + \frac{1}{4}bb$$

unde $2ax \propto 2by + bb$

hoc est $ax \propto by + \frac{1}{2}bb$

hoc est $\frac{xx}{b} - \frac{1}{2}b \propto y$

$$\frac{x^4}{bb} - xx + \frac{1}{4}bb \propto yy.$$

$$yy \propto ax - xx + \frac{1}{4}bb.$$

$xx \propto vb$, oportet AB vocari v , ut rectangulum vb æquetur quadrato BE, quod est xx . Quia porro æquatio hyperbolæ est $ab \propto xv$, hoc est $ab \propto$ rectang. AB, BE, apparet asymptotos esse AB, AM angulum rectum ad A constituentes, factoque rectangulo AL ex lateribus a, b , hyperbolam per L punctum describendam, quæ circumferentiam AE in puncto E sæpe dicto sectura sit. Facilisque est demonstratio.

Nam cum sit, propter circulum, $xy \propto ax - xx + \frac{1}{4}bb$, posita ut supra CB $\propto y$, et BE $\propto x$. Cumque hic sit $ab \propto xv$ propter hyperbolam, sed v seu BA sit æqualis $y + \frac{1}{2}b$. Erit ergo $ab \propto xy + \frac{1}{2}bx$, hoc est $y \propto \frac{ab}{x} - \frac{1}{2}b$. Unde

$$xy \propto \frac{aabb}{xx} - \frac{abb}{x} + \frac{1}{4}bb.$$

Itaque et

$$ax - xx + \frac{1}{4}bb \propto \frac{aabb}{xx} - \frac{abb}{x} + \frac{1}{4}bb$$

hoc est

$$ax^3 - x^4 \propto aabb - abbx$$

et utrinque dividendò per $a - x$, fit $x^3 \propto abb$, ut oportebat.

B § 4. Posita rursus æquatione eadem $x^3 \propto abb$, five $x^4 \propto abbx$, five $\frac{x^4}{bb} \propto ax$,

si utrinque addatur $-\frac{cxx}{b} + \frac{1}{4}cc$, et utraque pars æquationis æquetur vv fiet

$$vv \propto \frac{x^4}{bb} - \frac{cxx}{b} + \frac{1}{4}cc \propto ax - \frac{cxx}{b} + \frac{1}{4}cc \propto vv$$

$$v \propto \frac{xx}{b} - \frac{1}{2}c$$

$$\frac{bax + \frac{1}{4}bcc - bvv}{c} \propto xx$$

$$bv + \frac{1}{2}bc \propto xx$$

$$\frac{1}{2}\frac{ab}{c} \propto \sqrt{\frac{1}{4}\frac{aabb}{cc} + \frac{1}{4}bc - \frac{b}{c}vv} \propto x$$

Unde hinc quidem æquatio quæ locum ad parabolam designat cujus latus rectum b . Inde vero æquatio quæ significat locum ad Ellipsin datæ cuius similem, cujus nempe latus rectum ad transversum ut c ad b , nam c pro arbitrio sumi potest. Dimidium vero

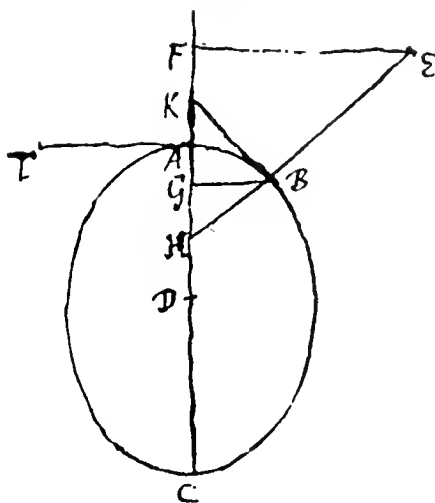
lateris transversi ellipseos est $\sqrt{\frac{1}{4}\frac{aabb}{cc} + \frac{1}{4}bc}$ et linea x parallela lateri transverso.

Et quoniam in æquatione ad parabolam, latus rectum parabolæ est b , idem nempe quod in æquatione superiori ad circuli circumferentiam, hinc oritur problematis constructio, seu inventio duarum mediarum inter duas datas, per circulum et ellipsin similem datæ, estque eadem prorsus quæ in propos. 1 Slusij in Mesolabo. Unde et altera, propositione ipsius ultimâ, per circulum et ellipsin quamlibet datam facile obtinetur. cum semper data constructione per circulum et ellipsin vel hyperbolen similem datæ, facile absque alio calculo inde deducatur constructio per circulum et ellipsin vel hyperbolen datam, quod videtur Slusius non advertisse.

Hoc vero in sequenti problemate Apolloniano manifestum fiet ubi ex dato puncto ad datam conicam sectionem lineam rectam perpendicularem ducemus, ipsius datæ sectionis et circuli intersectione, quum Apollonius hyperbolæ descriptione utatur, eoque a geometris reprehendi meruerit ⁴⁾. Adnoto vero priusquam eo progrediar, potuisse eadem facilitate constructionem duarum mediarum per circulum et hyperbolam datam similem dari, si utrinque addidisset $\frac{c^2 x}{b} + \frac{1}{4}cc$. Indeque etiam per circulum et hyperbolam datam.

C⁵⁾. § 1. *Data Ellipsi, ducere ex puncto intra vel extra eam dato, lineam rectam quæ occurrat ipsi ad angulos rectos.*

[Fig. 44].



Sit Ellipsis [Fig. 44] cujus axis major idemque latus transversum AC, latus rectum AT, centrum D. deturque punctum E unde oportet ducere rectam EB quæ ellipsi occurrat ad angulos rectos in B puncto.

Ponatur factum, occurratque productum EB axi AC in H. Tangens vero in puncto B ideoque recta ad BE, nempe BK, conveniat cum axe in K. Et ducantur ad axem perpendiculares EF, BG. Sit axis AC $\propto a$, latus rectum AT $\propto b$, DF $\propto c$, FE $\propto d$, quaesita DG $\propto x$.

Erit ut a ad b ita rectang. CGA, hoc est $\frac{1}{4}aa - xx$, ad quadratum GB, quod erit $\frac{1}{4}baa - bxx$. Sicut autem DG, x ad DA,

$\frac{1}{2}a$, ita hæc ad DK, $\frac{\frac{1}{4}aa}{x}$, propter tangentem

⁴⁾ Voyez la note 6 de la p. 342.

⁵⁾ Manuscrit 11, p. 16—41. Voyez sur la date la note 1 de la p. 130. C'est à la p. 122 du Manuscrit F que commencent les calculs qui servirent à Huygens pour composer la partie C du présent Appendice. On y trouve respectivement aux p. 122 et 127 des figures fort ressemblantes aux Fig. 44 et 45 du texte. De même les Fig. 46 et 48 se retrouvent respectivement aux p. 139 et 156 du Manuscrit F.

BK. Et à DK auferendo DG, x , fiet KG, $\frac{1}{4}\frac{aa}{x} - x$ five $\frac{\frac{1}{4}aa - xx}{x}$. Ut vero KG ad GB, ita haec ad GH, quæ erit $\frac{bx}{a}$, cui si addatur GF, $c - x$, fiet HF $\frac{bx}{a} + c - x$.

Quod si GB vocetur z , erit ut GH, $\frac{bx}{a}$ ad GB, z ita HF, $\frac{bx}{a} + c - x$ ad FE, d .

Ideoque $\frac{dbx}{a} \propto \frac{bxz}{a} + cz - xz$, quæ æquatio docet locum puncti B esse hyperbolen, atque hinc constructio brevissima quæ est apud Apollonium, sed vitiosa⁶⁾. Quare nos aliam meliorem jam investigabimus in qua non hyperbolâ sed tantum circuli circumferentiâ opus erit.

Est nimirum ut quadr. GH, $\frac{bbxx}{aa}$ ad quadr. GB, $\frac{\frac{1}{4}baa - bxx}{a}$, ita quadr. HF, quod (posito $a - b \propto h$) est $\frac{aacc - 2achx + hhxx}{aa}$, ad quadr. FE, da . Unde æquatio; quæ, si reducatur, et scribatur g pro $\frac{ac}{h}$ et ee pro $\frac{abdd}{hh}$, erit

$$x^4 - 2gx^3 + ggxx + \frac{1}{2}aagx - \frac{1}{4}aagg \propto 0 \\ + ee \\ - \frac{1}{4}aa$$

Jam ad tollendum terminum sub x^3 , si fiat $x - \frac{1}{2}g \propto y$, vel $\frac{1}{2}g - x \propto y$, quando apparet x minorem fore quam $\frac{1}{2}g$, hoc est $\frac{1}{2}g - y \propto x$; habebitur æquatio

$$y^4 - \frac{1}{2}ggyy - \frac{1}{4}aagy + \frac{1}{16}g^4 \propto 0 \\ - \frac{1}{4}aa - eeg + \frac{1}{4}eegg \\ + ee - \frac{1}{16}aagg$$

vel, posito abbreviandi causa $\frac{1}{2}gg + \frac{1}{4}aa - ee \propto pp$,

$$\text{et } \frac{1}{4}aag + eeg \propto ppq,$$

$$\text{et } \frac{1}{16}g^4 + \frac{1}{4}eegg - \frac{1}{16}aagg \propto \frac{1}{4}ppgr$$

$$\text{erit } y^4 - ppyy - ppqy \pm \frac{1}{4}ppgr \propto 0$$

$$\text{vel } y^4 + ppyy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \propto 0$$

Quod si ad tollendum terminum sub x^3 posuisssem $x - \frac{1}{2}g \propto y$ ut faciendum est secundum regulam; quo nempe fiat radix y vera, hoc est ut ab extrema linea $\frac{1}{2}g$ accipienda sit y in partem eandem quo vergit DG, x : fuisset æquatio

$$y^4 - ppyy + ppqy \pm ppgr \propto 0$$

$$\text{vel } y^4 + ppyy + ppqy + \frac{1}{4}ppgr \propto 0.$$

⁶⁾ Voyez les notes 5 et 6 de la p. 82 du T. XII.

Nempe tantum terminus $ppqy$ habuisset signum $+$ cum prius habuerit signum $-$, quod etiam cognoscere licet ex Cartesij Regula, quæ jubet mutari signa locorum parium (qualis hic sub y , cum y^3 non inveniatur) ut radices veræ fiant falsæ et contra. Falsæ enim et hic sunt radices prius veræ y , cum ponimus $\frac{1}{2}g - x \propto y$, quoniam jam $\frac{1}{2}g$ major intelligitur quam x , ideoque y in partem negatam accipienda, hoc est in contrariam ejus quo vergit DG. ponendum autem $\frac{1}{2}g - x \propto y$ quando animadvertimus $\frac{1}{2}g$ majorem fore quam x .

Quod autem utrobique, si habeatur $+ppyy$, fiat etiam $+\frac{1}{4}ppgr$, facile ostenditur. Etenim, si habeatur $+ppyy$, hoc est si ee majus quam $\frac{1}{2}gg + \frac{1}{4}aa$, fiet etiam $\frac{1}{4}gg + \frac{1}{4}ee$ majus quam $\frac{1}{4}aa$, ideoque $+\frac{1}{4}ppgr$. at si habeatur $-ppyy$ poterit esse vel $+\frac{1}{4}ppgr$, vel $-\frac{1}{4}ppgr$.

C § 2. *Ad divisionem porro in duos locos.*

Siquidem fit $y^4 - ppyy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \propto 0$,
hoc est $y^4 \propto ppyy + ppqy - \frac{1}{4}ppgr$,
addatur utrinque $-2ppyy + p^4$, et dividatur per tt ;posito $\frac{tt}{pp} \propto \frac{a}{b}$; fietque
$$\frac{y^4 - 2ppyy + p^4}{tt} \propto \frac{-ppyy + p^4 + ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt}$$

quæ pars utraque æquationis ponatur æqualis quadrato vv incognitæ quæ sit ipsi y perpendicularis; eritque ex altera parte

$$\frac{y^4 - 2ppyy + p^4}{tt} \propto vv$$

et
$$\frac{yy - pp}{t} \propto v$$

sive
$$yy \propto tv + pp$$

quæ æquatio designat locum ad parabolam cujus latus rectum t .

Vel etiam $\frac{yy + pp}{t} \propto v$, unde $yy \propto pp - tv$.

Ex altera vero parte erit

$$\frac{-ppyy + ppqy + p^4 - \frac{1}{4}ppgr}{tt} \propto vv$$

unde
$$qy + pp - \frac{1}{4}gr - \frac{ttv}{pp} \propto yy$$

$$\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + pp - \frac{1}{4}gr - \frac{ttv}{pp}} \propto y$$

qui est locus ad ellipfin similem datæ. nam quia ut pp ad tt ita est axis minor, cui per-

pendicularis y , ad latus rectum sibi conveniens; erit contra axis major ad latus rectum sicut tt ad pp , hoc est ut a ad b . Est autem axis major hujus ellipsis

$$\sqrt{qq + 4pp - gr}.$$

Quod si vero in æquatione fuisset $+ppyy$, ac proinde $y^4 \propto -ppyy + ppqy - \frac{1}{4}ppgr$ tantummodo utrinque divisissim per tt , ponendo ut ante $\frac{tt}{pp} \propto \frac{a}{b}$; fuissetque

$$\frac{y^4}{tt} \propto \frac{-ppyy + ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt}.$$

Et æquando rursus utraque æquationis partes quadrato vv , habuissim hinc $vv \propto \frac{y^4}{tt}$ hoc est $v \propto \frac{yy}{t}$ vel $tv \propto yy$ qui locus est ad parabolam cujus latus rectum t .

Ex altera parte vero habuissim $\frac{-ppyy + ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt} \propto vv$

hoc est

$$qy - \frac{1}{4}gr - \frac{ttvv}{pp} \propto yy$$

et

$$\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}gr - \frac{ttvv}{pp}} \propto y$$

qui similiter locus est ad ellipsin similem datæ.

C § 3. Habemus jam constructionem problematis per ellipsin similem datæ et per parabolam. Nunc porro alia quaerenda est per parabolam eandem et circulum, qua inventa, habebimus etiam constructionem per ellipsin similem datæ et per circulum, atque inde per ellipsin ipsam quæ data est, et per circulum.

Repetita igitur æquatione superiori

$$\begin{aligned} \text{unde} \quad & \frac{y^4 - ppyy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr}{y^4 - ppyy} \propto \frac{ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{ppqy - \frac{1}{4}ppgr} \end{aligned}$$

$$\text{dividatur per } tt, \text{ fit} \quad \frac{y^4 - ppyy}{tt} \propto \frac{ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt}$$

Subtrahatur utrinque yy five $\frac{t yy}{tt}$. Ergo

$$\frac{y^4 - ppyy - t yy}{tt} \propto \frac{t yy + ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt}.$$

Jam, ut ab altera parte fiat quadratum, addendum insuper $\frac{1}{4}$ quadrati ex $\frac{pp + tt}{t}$ quod vocetur s , itaque addito utrinque ss fiet

$$\frac{y^4}{tt} - \frac{s yy}{t} + \frac{1}{4}ss \propto -yy + \frac{ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt} + \frac{1}{4}ss.$$

Et æquata parte utraque æquationis quadrato incognitæ z , habebitur

$$\begin{aligned} z z &\propto \frac{y^4}{t t} - \frac{s y y}{t} + \frac{1}{4} s s \propto -y y + \frac{p p q y - \frac{1}{2} p p g r}{t t} + \frac{1}{4} s s \propto z z \\ z &\propto \frac{y y}{t} - \frac{1}{2} s \text{ vel } -\frac{y y}{t} + \frac{1}{2} s \quad \frac{p p q y - \frac{1}{2} p p g r}{t t} + \frac{1}{4} s s - z z \propto y y \\ \text{vel} \quad t z + \frac{1}{2} t s &\propto y y \quad \text{vel } \frac{b q y}{a} - \frac{\frac{1}{2} b g r}{a} + \frac{1}{4} s s - z z \propto y y \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{b q}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{b b q q}{a a} - \frac{1}{4} \frac{b g r}{a} + \frac{1}{4} s s - z z} \propto y. \end{aligned}$$

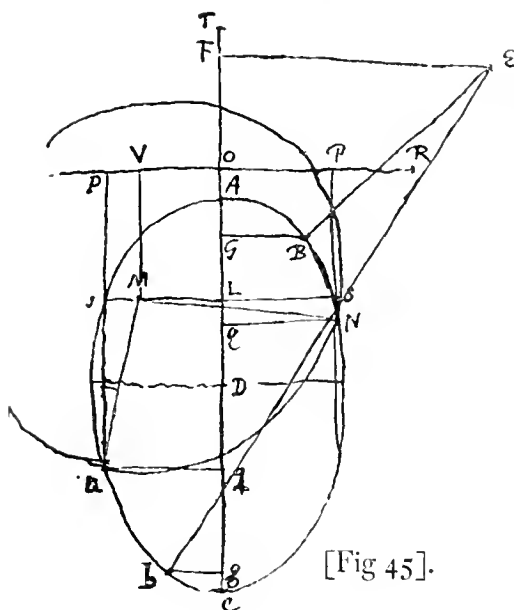
Hinc nimirum æquatio ad parabolam cujus latus rectum t . Inde æquatio ad circuli circumferentiam. Unde datur constructio problematis per hujus parabolæ et circumferentiæ intersectionem. Et quia etiam antea constructio inventa est per eandem parabolam et ellipsin similem datæ, ubi y similiter quoque ad axem applicata erat ut hic, sequitur jam constructionem haberi per ellipsin datæ similem et per circuli circumferentiam postremo inventam.

Oportet autem, sicut in præcedentibus diximus, ad constructionem hanc; positis parabolæ axe et vertice, cujus latus rectum t , quod æquale $\sqrt{\frac{p p a}{b}}$ quia posuimus $\frac{t t}{p p} \propto \frac{a}{b}$; oportet inquam velut si utramque cum parabola hac constructionem propo-

sitam habeamus, tam quæ ellipsin quam quæ circum requirit, definire calculo lineas rectas quibus ad eas suis locis constituendas opus est, quales æquationes inventæ præscribunt. Ita enim cum ad eandem parabolam tam ellipsis quam circuli positus cognoscetur, etiam utriusque horum inter se positus innotescet.

Ut autem per ellipsin datam et circum res absolvatur, opus est tantum ut proportionaliter augeantur vel minuantur lineæ quæ circuli radium et positionem ipsius ad axem ellipsis similis definiunt, secundum rationem qua ellipsis datæ axis superat vel minor est axe ellipsis similis. ac deinde inventa radix reducenda rursus proportionem contrariam ad obtinendam radicem y .

Nempe in constructione per parabolam et ellipsin similem datæ, cujus vicem nunc referat ipsa ellipsis ANC [Fig. 45], apparet per-



[Fig. 45].

pendicularem à centro ellipsis D in axem parabolæ (quem referat OP) ductam debere interciperi portionem axis illius ad verticem RO æqualem $\frac{pp}{t}$, propter æquationem ad parabolam $yy \propto tv + pp$ vel $yy \propto pp - tv$. Ipsam vero perpendicularem OD, quæ est in axe ellipsis, effe $\frac{1}{2}q$.

Rursus in constructione per parabolam eandem et circulum apparet perpendicularem à centro circuli M in axem parabolæ interciperi partem VR axis ejus ad verticem, æqualem $\frac{1}{2}s$, propter æquationem ad parabolam $yy \propto \frac{1}{2}ts \pm tz$. Ipsam vero perpendicularem MV effe $\frac{1}{2}\frac{bq}{a}$.

Itaque differentia duarum $\frac{1}{2}q$ et $\frac{1}{2}\frac{bq}{a}$, hoc est duarum DO, MV, erit pars axis DL, à centro ellipsis, quam intercipit perpendicularis a centro circuli in ipsum axemeducta. adeoque DL erit $\frac{1}{2}\frac{hq}{a}$ quia $h \propto a - b$. Ipsa vero perpendicularis LM erit differentia duarum $\frac{1}{2}s$ et $\frac{pp}{t}$, hoc est duarum RO, RV. Ideoque LM $\propto \frac{1}{2}\frac{ht}{a}$ quia $h \propto a - b$ et $s \propto t + \frac{pp}{t}$ et $tt \propto \frac{ppa}{b}$. Radius vero circuli erit $\sqrt{\frac{1}{4}\frac{bbqq}{a} - \frac{1}{4}\frac{bgr}{a} + \frac{1}{4}ss}$ ut patet ex æquatione.

In hac autem ellipsi simili perpendiculares ab intersectionibus N in OP ductæ essent radices veræ y . Jam vero ut constructio fiat per ellipsin ipsam quæ data est, oportet facere sicut axis major ellipsis similis, qui erat $\sqrt{qq - gr + 4pp}$ (vocetur autem l) ad a , axem ellipsis datæ, ita DL $\propto \frac{1}{2}\frac{hq}{a}$ ad $\frac{1}{2}\frac{hq}{l}$ quæ erit vera DL qua utendum in ellipsi data. Item ut l ad a ita LM $\propto \frac{1}{2}\frac{ht}{a}$ ad $\frac{1}{2}\frac{ht}{l}$, quæ erit vera LM in data ellipsi adhibenda. Ac denique ut l ad a ita radius circuli inventus ad

$$\frac{a}{l} \sqrt{\frac{1}{4}\frac{bbqq}{aa} - \frac{1}{4}\frac{bgr}{a} + \frac{1}{4}ss},$$

radius circuli quo utendum in ellipsi data.

Itaque in ellipsi data [Fig. 45] accipiatur in axe a centro D recta DL æqualis $\frac{1}{2}\frac{hq}{l}$. fitque axi perpendicularis LM æqualis $\frac{1}{2}\frac{ht}{l}$. Erit M centrum circuli, radius vero æqualis $\frac{a}{l} \sqrt{\frac{1}{4}\frac{bbqq}{aa} - \frac{1}{4}\frac{bgr}{a} + \frac{1}{4}ss}$.

Ab intersectione autem circuli hujus et ellipsis quæ sit in puncto N, ducenda perpendicularis NP in rectam OP, axi normalem et abscindentem DO $\propto \frac{1}{2}\frac{aq}{l}$ à D versus

L. quia diximus centrum ellipsis similis ab axe parabolæ distare $\frac{1}{2}q$; quæ reducta, sicut reliquæ lineæ, secundum proportionem l ad a , facit $\frac{1}{2}aq$. refert enim sic rursus recta

AP axem parabolæ. ad quem ducta perpendicularis NP erit $\frac{ay}{l}$. quam reducendo rur-

sus secundum proportionem contrariam a ad l , habebitur y ; et ponendo $DT \propto \frac{1}{2}g$ et $TG \propto y$, unde $DG \propto \frac{1}{2}g - y$, erit $DG \propto x$ quæsitæ; quare axi perpendicularis GB quæ ellipsi occurrat, ostendet punctum B, ad quod ab E puncto dato ducendo rectam EB, occurrat ipsi ellipsi ad angulos rectos. Potest autem contingere intersecctio ellipsis et circuli in punctis quatuor, unde ductis perpendicularibus in OP, ijsque reductis similiter fient singulæ y quæ ablatae ab $\frac{1}{2}g$, ut accipiantur à T versus D, dabunt totidem radices x , quæ ostendent puncta ellipsis ad quæ ipsi ad angulos rectos ducantur à puncto E.

C § 4. Et hæc quidem rationem methodi perspicue explicant. Si vero breviter solutionem problematis tradere velimus, ponenda sunt tantum quæ pag. 16 et 17 continentur⁷⁾, vel etiam quæ paginis 18, 19, 20, 21⁸⁾. Dein ita pergendum.

Quodsi $y^4 - pp yy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \propto 0$, ponatur $t \propto \sqrt{\frac{ppa}{b}}$, $s \propto \frac{pp}{t} + t$, $l \propto \sqrt{qq - gr + pp}$ [lisez $\sqrt{qq - gr + 4pp}$], $h \propto a - b$, sicut jam ante positum fuit. Tum a centro ellipsis datæ D ponatur in axe ejus, versus F, recta DL $\propto \frac{1}{2}hq$; et erigatur ad axem perpendicularis LM $\propto \frac{1}{2}ht$, statuenda in partem contrariam ejus ubi E punctum. Deinde centro M radio MN $\propto \frac{a}{l} \sqrt{\frac{1}{4} \frac{bbqq}{aa} - \frac{1}{4} \frac{bgr}{a} + \frac{1}{4}ss}$ circumferentia describatur, et a punctis N, ubi illa ellipsi occurrat, ducantur NP perpendiculares in OP, quæ axem secant ad rectos angulos, abscinditque DO $\propto \frac{1}{2}aq$, idque

versus F. Singulæ NP vocentur m et ut a ad l ita sit m ad aliam quæ vocetur y , et fiat $DG \propto \frac{1}{2}g - y$, sumpta $\frac{1}{2}g$ a D versus F. Denique ducta perpendiculari ad axem rectâ GB, quæ occurrat ellipsi in B, jungatur EB: hæc occurret ellipsi ad angulos rectos.

Si ponatur axis ellipsis AC seu $a \propto 1$; latus rectum $b \propto \frac{1}{2}$; DF sive $c \propto 1$; FE seu $d \propto \sqrt{\frac{1}{2}}$, fit æquatio $y^4 - \frac{5}{4}yy - \frac{5}{2}y + \frac{7}{4} \propto 0$. In cujus constructione signa + et - ita sese habebunt ut in ea quam construere docuimus, quia ipsius æquationis signa

⁷⁾ C. à. d. le § 1 de C (p. 341) jusqu'au dernier alinéa de la p. 342 (non compris).

⁸⁾ C. à. d. du dernier alinéa de la p. 342 au dernier alinéa de la p. 345 (non compris).

respondent signis æquationis $y^4 - pp\dot{y}y - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \propto 0$. Fiant autem hinc $h \propto \frac{1}{2}$, $g \propto 2$, $pp \propto \frac{5}{4}$, $tt \propto \frac{5}{2}$, $q \propto 2$, $gr \propto \frac{28}{5}$, $ss \propto \frac{45}{8}$, $l \propto \sqrt{\frac{17}{5}}$, $DO \propto \sqrt{\frac{5}{17}}$, $DT \propto 1$, $DL \propto \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{17}}$, $LM \propto \frac{5}{4} \sqrt{\frac{17}{5}}$. Radius $NM \propto \frac{3}{4} \sqrt{\frac{17}{5}}$ five $\frac{3}{4}$ axis minoris. Sicut autem a ad l , hoc est sicut 1 ad $\sqrt{\frac{17}{5}}$, ita est NP ad $\sqrt{\frac{17}{5}}$ NP five y . Unde DG five $\frac{1}{2}g - y$ erit $1 - \sqrt{\frac{17}{5}}$ NP . Quod si ab altera parte centri ponatur $Dg \propto \sqrt{\frac{17}{5}}$ $np - 1$ (est autem np perpendicularis ab altera ellipsis et circuli intersectione, ducta in OP) fitque axi perpendicularis gb . Erit b alterum in ellipsi punctum, ad quod ducta Eb occurrat ipsi ad angulos rectos.

Ad demonstrationem, fit NQ perpendicularis ad axem ellipsis. Item fit MS perpendicularis in NP . ut autem a ad l ita fit NQ ad v . Ergo $NQ \propto \frac{av}{l}$. Quia autem ut a ad l , ita est NP , five m ad y , erit m five $NP \propto \frac{ay}{l}$.

Jam vero, propter ellipsin, rectangulum CQA , hoc est quadratum DA minus quadrato DQ , est ad quadr. QN , ut axis ellipsis ad latus rectum, hoc est ut a ad b . Sed quadratum DA est $\frac{1}{4}aa$: quadr. DQ , five ab $DO - NP$, est $\frac{\frac{1}{4}aaqq + aaqy - aay^2}{l}$, item quadr. QN , five nm , est $\frac{aavv}{ll}$. Hinc igitur, ex proportionem ista, datur æquatio

$$\frac{1}{4}bll - \frac{1}{4}bqq + bqy - byy \propto avv.$$

Et restituto $qq - gr + 4pp$ in locum ll fit $\frac{bqy - \frac{1}{4}bgr + bpp - byy}{a} \propto vv$.

Jam porro ut a ad l ita fit MS ad aliam z . Ergo $MS \propto \frac{az}{l}$. Est autem, propter circulum, quadr. MN æquale quadratis MS et SN . Sed quadr. radij MN est $\frac{\frac{1}{4}bbqq - \frac{1}{4}abgr + \frac{1}{4}aass}{ll}$ ex constructione, quadratum vero MS est $\frac{aaz\dot{z}}{ll}$. Et quadr. SN $\frac{aayy - abqy + \frac{1}{4}bbqq}{ll}$ quia $SN \propto NP$ minus PS five OL , hoc est $\frac{ay}{l} - \frac{1}{2}\frac{bq}{l}$. quod enim $OL \propto \frac{1}{2}bq$ patet quia DL est $\frac{1}{2}\frac{hq}{l}$ hoc est $\frac{1}{2}\frac{aq}{l} - \frac{1}{2}\frac{bq}{l}$; DO vero $\frac{1}{2}\frac{aq}{l}$.

Fit igitur æquatio

$$\frac{\frac{1}{4}bbqq - \frac{1}{4}abgr + \frac{1}{4}aass}{ll} \propto \frac{aaz\dot{z} + aayy - abqy + \frac{1}{4}bbqq}{ll}$$

quæ reducta facit $\frac{bqy - ayy - \frac{1}{4}bgr}{a} + \frac{1}{4}ss \propto z\dot{z}$.

Sed quoniam LM erat $\propto \frac{1}{2}\frac{ht}{l}$, LS vero five $NQ \propto \frac{av}{l}$, erit $MS \propto \frac{\frac{1}{2}ht + av}{l}$.

Est autem $\frac{\frac{1}{2}ht}{l} \propto \frac{\frac{1}{2}as}{l} - \frac{app}{lt}$ ut facile est ostendere, quia $h \propto a - b$, et $s \propto t + \frac{pp}{t}$,
et $\frac{pp}{t} \propto \frac{bt}{a}$. Ergo fit $MS \propto \frac{\frac{1}{2}ast - app + tav}{lt}$. Sed erat $MS \propto \frac{az}{l}$. Ergo hæc

æqualia; unde fit $z \propto \frac{1}{2}s - \frac{pp}{t} + v$. Ideoque $zz \propto \frac{1}{4}ss - \frac{spp}{t} + \frac{p^4}{tt} + sv$
 $\frac{2ppv}{t} + vv$. Sed erat inventum $zz \propto \frac{bqy - ayy - \frac{1}{4}bgr}{a} + \frac{1}{4}ss$. Unde, substituto in
alterutra harum æquationum eo cui æquatur zz in altera, invenitur

$$\frac{bqy - \frac{1}{4}bgr - ayy}{a} - \frac{p^4}{tt} + \frac{spp}{t} - sv + \frac{2ppv}{t} \propto vv.$$

ubi si pro $\frac{p^4}{tt}$ substituat $-\frac{bpp}{a}$, quia $\frac{pp}{tt} \propto \frac{b}{a}$, cum positum fuerit $t \propto \sqrt{\frac{ppa}{b}}$,

atque etiam pro s reponatur ipsi æquale $\frac{pp + tt}{t}$, fiet

$$\frac{bqy - \frac{1}{4}bgr - ayy - bpp}{a} + \frac{p^4 + pptt}{tt} - \frac{ppv + tv}{t} + \frac{2ppv}{t} \propto vv$$

ac proinde $\propto \frac{bqy - \frac{1}{4}bgr - byy - bpp}{a}$, quod superius ipsi vv æquale

ale invenimus. quæ æquatio ubi reducta fuerit, repositumque $\frac{pp}{tt}$ in locum $\frac{b}{a}$, fit

$$tpp - p^4 + tppv - t^3v - ttyy + ppyy \propto 0$$

Et dividendo per $tt - pp$ fit $pp - tv - yy \propto 0$

five $\frac{pp - yy}{t} \propto v$.

Et quadrando utrinque erit $\frac{p^4 - 2pyy + y^4}{tt} \propto vv$,

hoc est $\propto \frac{bqy - \frac{1}{4}bgr - byy + bpp}{a}$

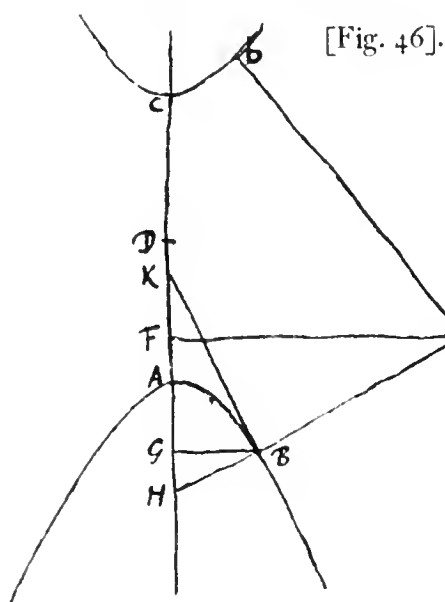
ubi si porro restituantur $\frac{pp}{tt}$ in locum $\frac{b}{a}$, invenietur

$$y^4 - ppyy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \propto 0.$$

Et hinc quidem facile reliqua demonstratio absolvitur per superioris analyseos regressum. Etenim in hac æquatione repositis pro pp , et ppq , et $\frac{1}{4}ppgr$, ijs quæ per hæc superius designavimus, fiet æquatio superior illa $y^4 - \frac{1}{2}ggyy$ &c. $\propto 0$. Et rursus posito $y \propto \frac{1}{2}g - x$, habebitur æquatio prima $x^4 - 2gx^3$ &c. $\propto 0$. Unde constat recte se habere constructionem. Et hæc quidem una omnia puncta B in ellipsi invenire docet, in demonstratione autem non nulla sed exigua erit diversitas.

Si in æquatione $\infty 0$ habeatur $-\frac{1}{4}ppgr$, hoc tantum in constructione mutandum, ut termini in quibus gr contraria signa accipiant ijs quæ nunc fuere. Sed si in æquatione y^4 &c. $\infty 0$ fuerit $+ppyy$; quo casu diximus etiam semper inveniri $+\frac{1}{4}ppgr$; fiet $l \infty \sqrt{\frac{1}{4}qq - gr}$, de cætero autem nihil omnino in constructione priori mutandum. Tunc enim LM quidem statuenda $\infty \frac{1}{2} \frac{as}{lt}$; sed s invenitur æqualis $t - \frac{pp}{t}$, unde LM, sicut ante, fit $\frac{1}{2} \frac{at}{l} - \frac{1}{2} \frac{app}{l}$.

C § 5. *Problema idem in Hyperbola vel sectionibus oppositis.* Sint sectiones oppositæ AB, Cb [Fig. 46], axis idemque latus transversum AC, centrum D. Punctum



datum E unde oporteat ducere EB quæ occurrat hyperbolæ ad angulos rectos.

Præparatione eadem adhibita quæ fuit in Ellipsi, sint etiam nomina lineis similiter imposita; ut sit $AC \infty a$; latus rectum ∞b ; $DF \infty c$; $FE \infty d$; $DG \infty x$.

Jam erit rursus ut quadr. GH. ad quadr. GB ita qu. FH ad qu. FE. Invenientur autem qu. $GH \infty \frac{bbxx}{aa}$, qu.

$GB \infty \frac{bxx - \frac{1}{4}aab}{a}$. Qu. FH, posito $a + b \infty h$, erit $\frac{hhxx - 2achx + aacc}{aa}$,

qu. verò FE est dd . Itaque hinc æquatio orietur, quâ reductâ, et posito $x - \frac{1}{2}g \infty y$ (fiet autem $y \infty \frac{ac}{h}$) adaufferendum secundum terminum, fiet tandem æquatio

$$y^4 - \frac{1}{4}ggyy + \frac{1}{4}aagy + \frac{1}{16}g^4 \infty 0, \text{ ubi } ee \text{ ponitur } \infty \frac{abdd}{hh}.$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}aa & -eeg & -\frac{1}{4}eegg \\ & -ee & & -\frac{1}{16}aagg \end{aligned}$$

$$\text{Et posito brevitatis causa } \begin{cases} \frac{1}{2}gg + \frac{1}{4}aa + ee \infty pp \\ \frac{1}{4}aag - eeg \infty ppq \\ \frac{1}{16}g^4 - \frac{1}{4}eegg - \frac{1}{16}aagg \infty \frac{1}{4}p^2gr \end{cases}$$

$$\text{erit } y^4 - ppyy \& ppqy \& \frac{1}{4}ppgr \infty 0$$

$$\text{hoc est } y^4 \infty ppyy \& ppqy \& \frac{1}{4}ppgr.$$

Dividatur per tt indeterminatum; et utraque pars æquetur quadrato incognitæ v . Fit

$$vv \propto \frac{y^4}{tt} \propto \frac{ppyy \delta ppqy \delta \frac{1}{4}ppgr}{tt} \propto vv$$

$$\text{et} \quad et \propto yy \quad \text{et} \quad 2qy \delta \frac{1}{4}gr + \frac{uvv}{pp} \propto yy.$$

Altera æquatio ad parabolam cujus latus rectum t ; altera ad hyperbolam similem datæ si ponatur $\frac{tt}{pp} \propto \frac{a}{b}$. cujus hyperbolæ axis erit $\sqrt{qq \delta gr}$, quod appelletur l . apparet autem fieri $t \propto \sqrt{\frac{app}{b}}$.

Porro ut æquationes ad circumferentiam circuli, et ad parabolam eandem habeantur, posito rursus $y^4 \propto ppyy \delta ppqy \delta \frac{1}{4}ppgr$, auferatur utrinque $ppyy + tyy$ et dividatur per tt ; fietque $\frac{y^4 - ppyy - tyy}{tt} \propto \frac{- tyy \delta ppqy \delta \frac{1}{4}ppgr}{tt}$.

Jam ut ab altera parte, ubi est y^4 , fiat quadratum, addendum insuper $\frac{1}{4}$ quadrati ex $\frac{pp + tt}{t}$ quod vocetur s . Itaque addito utrimque $\frac{1}{4}ss$, et æquata parte utrâque quadrato incognitæ z , fiet

$$zz \propto \frac{y^4}{tt} - \frac{sy}{t} + \frac{1}{4}ss \propto -yy + \frac{\delta p^2 qy \delta \frac{1}{4}ppgr}{tt} + \frac{1}{4}s^2 \propto zz$$

$$z \propto \frac{yy}{t} - \frac{1}{2}s \quad \delta \frac{p^2 qy}{tt} \delta \frac{\frac{1}{4}p^2 gr}{tt} + \frac{1}{4}ss - zz \propto yy$$

$$tz + \frac{1}{2}ts \propto yy$$

$$\text{vel } z \propto \frac{1}{2}s - \frac{yy}{t} \text{ unde } yy \propto \frac{1}{2}ts - tz$$

$$\delta \frac{1}{2} \frac{bq}{a} \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{4}bbqq}{aa} \delta \frac{\frac{1}{4}bgr}{a} + \frac{1}{4}ss} - zz \propto y.$$

Altera æquatio ad parabolam cujus latus rectum t ; altera ad circuli circumferentiam cujus radius $\sqrt{\frac{1}{4} \frac{bbqq}{aa} \delta \frac{1}{4} \frac{bgr}{a} + \frac{1}{4}ss}$.

Quia autem in hyperbola simili inventus est axis $\sqrt{qq \delta gr}$; patet, si habeatur $\sqrt{qq + gr}$, vel si fuerit $\sqrt{qq - gr}$, dummodo qq sit majus quam gr , ad constructionem facere hyperbolam similem datæ, ideoque et datam. Erit autem hic $+ gr$, si in æquatione $\propto 0$ fuerit $+ \frac{1}{4}ppgr$, hoc est si $\frac{1}{4}gg$ majus quam $\frac{1}{4}aa + ee$.

Quomodo autem hyperbola data adhibeatur, etiam cum hic invenitur qq minus quam gr , postea ostendetur. In casibus vero jam dictis constructionem cum data hyperbola discemus, sicut in ellipsi, ex constructione cum hyperbola simili quam hic ipsa data referat. Ponatur æquatio $y^4 - ppyy + ppqy + \frac{1}{4}ppgr \propto 0$. Si OP recta referat

matam, velut TG; quæ vero NP sunt à parte contraria, etiam a puncto T in contrariam partem accipiendæ, ut Tg. Et excitatis (in hyperbola nimirum data) perpendicularibus GB, gb, invenientur omnia puncta B ad quæ ductæ a dato puncto E sint hyperbolæ perpendiculares, quæ quidem quatuor esse possunt at lineæ notatæ 1, 2, 3, 4.

Jam porro ut Hyperbola data uti possimus et circulo ad eandem y inveniendas, reductio proportionalis faciendæ. Nempe augendus vel minuendus radius circuli, itemque rectæ quæ centrum ipsius definiunt, respectu centri D hyperbolæ datæ, secundum proportionem l ad a , ponendo l pro $\sqrt{qq - gr}$, quod æquale erat axi hyperbolæ similis datæ. Ergo DL quæ erat $\frac{1}{2} \frac{hq}{a}$, jam erit $\frac{1}{2} \frac{hq}{l}$, accipiendæ in partem contrariam puncti

F, quia in æquatione prima est $+ppqy$. Item LM, quæ erat $\frac{1}{2} h \frac{t}{a}$, erit $\frac{1}{2} h \frac{t}{l}$. Et radius

circuli fiet $\frac{a}{l} \sqrt{\frac{1}{4} \frac{p^4 qq}{t^4} + \frac{1}{4} \frac{ppgr}{tt} + \frac{1}{4} ss}$. DO vero, quam abscindit recta OP, cum

fuerit $\frac{1}{2} q$, erit jam $\frac{1}{2} \frac{aq}{l}$. Radices vero NP, hinc inventæ erunt $\frac{ay}{l}$, quæ reductæ con-

traria proportionem a ad l , dabunt radices veras y five TG statuendas, ut diximus, à puncto T. Et hæc constructio tantum adhibenda. Nam priorem ideo proposui ut inventionis ratio perspiceretur. Sicut autem constructio hæc quadrat illi quam in ellipsi dedimus ita et demonstratio eadem via procedit, nec fere nisi signis $+$ et $-$ differet. quamobrem hic omittetur.

Porro ut etiam casum illum de quo diximus, expediamus, ubi æquatio ad hyper-

bolam est $2qy - \frac{1}{4}gr + \frac{ttv}{pp} \propto yy$. ac proinde $y \propto \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}gr + \frac{ttv}{pp}}$

(minus autem qq quam gr). Sciendum hic designari locum ad hyperbolam in qua recta y ad axem ordinatim applicatur, cujusque latus rectum ad transversum ut tt ad

pp ut facile est ostendere. Latus transversum verò, five axis, fit $\sqrt{\frac{ppgr - ppqq}{tt}}$

qui nunc vocabitur l . Ut vero hæc hyperbola similis fiat hyperbolæ datæ, oportet tantum ponere tt ad pp sicut b ad a ; cum priori casu fuerit tt ad pp ut a ad b . unde

tantum quantitas lineæ t mutatur quæ fiet $\propto \sqrt{\frac{bpp}{a}}$. In æquatione autem ad cir-

culi circumferentiam, observando item quod tt ad pp ut b ad a , invenietur $y \propto \sqrt{\frac{1}{4} \frac{aq}{b}}$

$\pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{aaqq}{bb} + \frac{1}{4} \frac{agr}{b} + \frac{1}{4} ss} \approx \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{aaqq}{bb} + \frac{1}{4} \frac{agr}{b} + \frac{1}{4} ss}$

qui adhibendus cum hyperbola simili datæ.

Æquationes ad parabolam sunt eadem quæ priore casu.

In constructione autem per hyperbolam et parabolam imaginariam, observandum

hic axem parabolæ parallelum esse axi hyperbolæ, quia eadem y ad utriusque axem ordinatim applicatur. Denique reductio omnium facienda ut prius secundum rationem l ad a .

Posita exempli gratia æquatione $y^4 - ppvy + ppqr - \frac{1}{4}ppgy \propto 0$ fiunt æquationes ad parabolam et ad hyperbolam similem datæ

$$vt \propto yy, \text{ et } \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}gr + \frac{ttvv}{pp}} \propto y.$$

Æquationes autem ad parabolam et ad circumferentiam

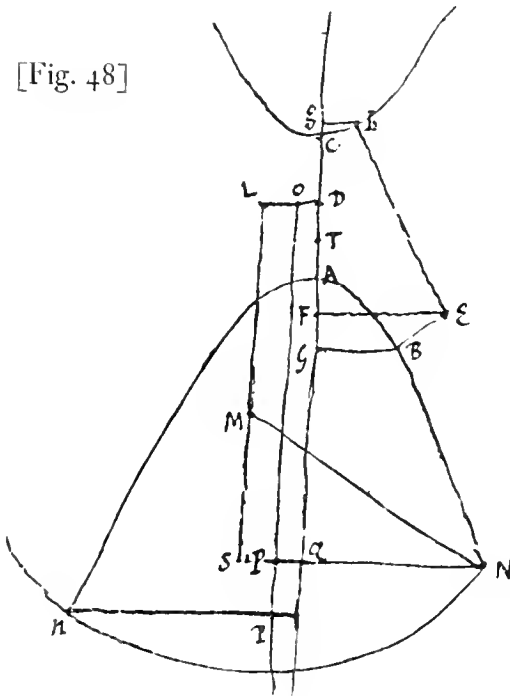
$$\frac{1}{2}ts \pm tz \propto yy, \text{ et } -\frac{1}{2}\frac{aq}{b} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{aaqq}{bb} + \frac{1}{4}\frac{agr}{b} + \frac{1}{4}ss - zz} \propto y.$$

Eritque l , sicut dictum fuit, $\propto \sqrt{\frac{agr - aqq}{b}}$. Item $s \propto \frac{pp + tt}{t}$, hoc est $\frac{ta}{b} + t$,

quia hic $\frac{pp}{tt} \propto \frac{a}{b}$. Sed $\frac{ta}{b} + t$ est $\propto \frac{th}{b}$, quia $h \propto a + b$. Ergo s jam erit $\propto \frac{th}{b}$, t ve-

ro $\propto \sqrt{\frac{bpp}{a}}$. Ex his igitur constructio oritur hujusmodi.

[Fig. 48]



A centro hyperbolæ D [Fig. 48] erigatur axi perpendicularis $DL \propto \frac{1}{2}\frac{ahq}{lb}$. idque in partem contrariam ejus ubi punctum E, quoniam in æquatione prima habetur $+ppgy$. Deinde fit LM, axi parallela, æqualis $\frac{1}{2}\frac{ahq}{lb}$, accipienda in partem ubi est punctum F. Centro autem M, radio $MN \propto \frac{1}{2}\frac{a}{l}$

$\sqrt{\frac{aaqq}{bb} + \frac{agr}{b} + ss}$ describatur circumferentia et à punctis N, ubi hæc occurrit hyperbolæ, cadant perpendiculares NP in rectam OP, axi parallelam, posita $DO \propto \frac{1}{2}\frac{aq}{l}$. Sicut autem a ad l ita sint singulæ NP, quæ vocentur m , ad alias $\frac{lm}{a}$ quæ dicantur

y . Ac denique posita in axe $DT \propto \frac{1}{2}g$, in partem ubi est E punctum, accipiantur ipsi

$\frac{lm}{a}$ æquales in axe TG, idque ita ut quæ ortæ sunt à perpendicularibus NP ad partes puncti E positæ, cadant à T versus F, reliquæ vero in partem contrariam. Jamque axi perpendiculares rectæ GB ostendent in hyperbolis oppositis puncta B, ad quæ, ductæ ex puncto E, occurrant ipsis ad rectos angulos. Si ponatur axis AC seu $a \propto 2$; latus rectum $\propto 1$, DF five $c \propto \frac{3}{2}$, FE five $d \propto \frac{3}{2}$, fiunt $h \propto 3$, $g \propto 1$, $pp \propto 2$, $q \propto \frac{1}{4}$, $gr \propto \frac{5}{8}$. unde æquatio

$$y^4 - 2yy + \frac{1}{2}y - \frac{5}{16} \propto 0,$$

in qua signa + et - conveniunt ijs quæ paulo ante posuimus. Porro hic fit $t \propto 1$, $s \propto 3$, $l \propto \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$. Unde $DL \propto \sqrt{\frac{1}{2}}$, $LM \propto 4 \sqrt{\frac{1}{2}}$. Radius MN $\propto 2 \sqrt{\frac{1}{3}}$, DO $\propto \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{2}}$, DT $\propto \frac{1}{2}$

C § 6. *Demonstratio Constructionis.* Concurrant LM et NP in S, CA, NP in Q.

Et ut a ad l ita fit DQ ad aliam quæ dicatur v . eritque $DQ \propto \frac{av}{l}$. Quia autem ut a ad l ita fecimus m ad y , erit m five NP $\propto \frac{ay}{l}$.

Jam vero, propter hyperbolen, rectangulum CQA hoc est quadratum DQ minus quadrato DA, erit ad quadr. NQ, ut axis hyperbolæ ad latus rectum, hoc est ut a ad b . Atqui quadr. DQ est $\frac{aavv}{ll}$, quadratum vero DA $\propto \frac{1}{4}aa$. Quadratum denique NQ,

hoc est ab NP minus DO, hoc est ab $\frac{ay}{l} - \frac{1}{2}\frac{aq}{l}$, est $\frac{aayy - aaqy + \frac{1}{4}aaqq}{ll}$. Ergo ut hoc ad $\frac{aavv}{ll} - \frac{1}{4}aa$ ita b ad a . unde æquatio existit, per quam invenitur

$$vv \propto ayy - aqy + \frac{1}{4}aaq + \frac{1}{4}bll,$$

et restituto $\frac{agr - aqq}{b}$ pro ll , fit $vv \propto \frac{aayy - aqy + \frac{1}{4}agr}{b}$.

Jam porro ut a ad l ita MS ad aliam, quæ dicatur z : Ergo MS $\propto \frac{az}{l}$. Est autem, propter Circulum, quadratum MN æquale quadratis ab MS et SN. Sed quadr. MN est $\frac{1}{4}\frac{a^4qq}{llbb} + \frac{1}{4}\frac{a^3gr}{llb} + \frac{1}{4}\frac{aass}{ll}$ ex constructione; quadratum MS $\propto \frac{aaz^2}{ll}$, quadratum

vero SN, five ab NQ + QS, est $\frac{aayy}{ll} + \frac{a^3qy}{llb} + \frac{1}{4}\frac{a^4qq}{llbb}$. Nam si ad NQ, quæ erat $\frac{ay - \frac{1}{2}aq}{l}$, addatur QS five DL $\propto \frac{1}{2}\frac{ahq}{lb}$; hoc est $\frac{\frac{1}{2}aaq + \frac{1}{2}abq}{lb}$, quia $h \propto a + b$;

fiet NS $\propto \frac{ay}{l} + \frac{1}{2}\frac{aaq}{lb}$. Ergo hinc rursus æquatio existit, quæ reducta relinquit $zz \propto \frac{1}{4}\frac{agr}{b} + \frac{1}{4}ss - \frac{aqy}{b} - yy$.

Quia vero erat $LM \propto \frac{\frac{1}{2}ah}{lb}$ ex constructione, hoc est $\frac{1}{2} \frac{as}{l}$, quia s erat $\propto \frac{th}{b}$; DQ vero five LS $\propto \frac{ay}{l}$, erit MS $\propto az - \frac{1}{2}as$. Erat autem MS $\propto \frac{az}{l}$. Ergo hæc inter se æqualia, unde $z \propto v - \frac{1}{2}s$; et $az \propto vv - vs + \frac{1}{4}ss$. Sed erat $az \propto \frac{1}{4} \frac{agr}{b} + \frac{1}{4}ss - \frac{aqy}{b} - yy$. Ergo hinc alia æquatio, ex qua fit $vv \propto \frac{\frac{1}{4}agr - aqy}{b} - yy + vs$. Sed invenimus antea $vv \propto \frac{ayy - aqy + \frac{1}{4}agr}{b}$. Ergo alia rursus hinc æquatio. Ex qua invenitur $\frac{ayy}{b} \propto vs - yy$, hoc est $tv \propto yy$, quia $s \propto \frac{ht}{b}$ et $h \propto a + b$. Itaque est $v \propto \frac{yy}{t}$. Et proinde $vv \propto \frac{y^+}{tt}$. Sed erat $vv \propto \frac{ayy - aqy + \frac{1}{4}agr}{b}$; five, restituto $\frac{pp}{tt}$ pro $\frac{a}{b}$,

$$vv \propto \frac{ppyy - ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{tt}.$$

Ergo hoc æquale $\frac{y^+}{tt}$, unde denique

$$y^+ - ppyy + ppqy - \frac{1}{4}ppgr \propto 0.$$

Quæ cum sit æquatio eadem quæ ex problematis analysi reperta erat, apparet recte se habere constructionem.

C § 7. *Aliter utroque casu.* Sit rursus eadem quæ supra æquatio

$$\frac{y^+ - ppyy \propto ppqy \propto \frac{1}{4}ppgr}{y^+ - ppyy \propto ppqy \propto \frac{1}{4}ppgr},$$

et addita utrinque tt et dividendo per pp fit

$$\frac{y^+ - ppyy}{pp} \propto \frac{tt \propto ppqy \propto \frac{1}{4}ppgr}{pp}.$$

Ut autem ab altera parte fiat quadratum ubi est y^+ , addendum insuper $\frac{1}{4}$ quadrati ex $\frac{tt - pp}{p}$ quod vocetur s , itaque addito utrinque $\frac{1}{4}ss$ et æquata parte æquationis utraque quadrato incognitæ v , fiet

$$\frac{vv \propto \frac{y^+}{pp} \propto \frac{yy}{p} + \frac{1}{4}ss}{v \propto \frac{yy}{p} \propto \frac{1}{2}s \text{ vel } \propto \frac{1}{2}s \propto \frac{yy}{p}} \propto \frac{tt \propto ppqy \propto \frac{1}{4}ppgr}{pp} + \frac{1}{4}ss \propto vv$$

$$\propto \frac{1}{4}gr + \frac{1}{4}ss \propto qy + \frac{tt}{pp} \propto vv$$

$$p^2 \propto \frac{1}{2} ps \propto yy \quad \propto \frac{1}{4} ppgr - \frac{1}{4} pps \propto ppqy + \frac{pp^2}{tt} \propto yy$$

$$\propto \frac{1}{2} \frac{ppq}{tt} \pm \sqrt{\frac{p^4}{t^4} qq + \frac{\propto ppgr - \frac{1}{4} pps}{tt}} \propto y.$$

Quarum altera æquatio ad parabolam cujus latus rectum p , altera ad hyperbolam cujus latus rectum ad transversum ut tt ad pp quæque proinde similis erit datae, ponendo $\frac{pp}{tt} \propto \frac{a}{b}$, habebitque latus transversum $t \propto \sqrt{\frac{p^4}{t^4} qq + \frac{\propto ppgr - \frac{1}{4} pps}{tt}}$, nempe si in quantitibus hac radice comprehensis signa $+$ prævaleant signis $-$. Et tunc quidem linea y parallela intelligitur axi hyperbolæ.

Sed si prævaleant in radice signa $-$, tunc locus designat hyperbolam cujus latus rectum ad transversum ut pp ad tt , quæ, proinde, ut similis fiat hyperbolæ datae, ponendum $\frac{pp}{tt} \propto \frac{b}{a}$. Ejus vero latus transversum five axis erit $\sqrt{\frac{p^4}{t^4} qq - \frac{\propto ppgr - \frac{1}{4} pps}{tt}}$ $\propto gr + ss$; et recta y ad axem ordinatim applicata. Porro ad inveniendum locum ad circuli circumferentiam; cum sit ut prius

$y^4 - pp yy \propto \propto ppqy \propto \frac{1}{4} ppgr$;
auferatur utrimque $pp yy$, et divisio fiat per pp , eritque

$$\frac{y^4 - 2pp yy}{pp} \propto - \frac{pp yy \propto ppqy \propto \frac{1}{4} ppgr}{pp}.$$

Insuper, ad formandum ab altera parte quadratum, addatur utrimque pp , et pars utraque æquetur quadrato incognitæ z . fietque

$$zz \propto \frac{y^4 - 2pp yy + pp}{pp} \propto - yy \propto qy \propto \frac{1}{4} gr + pp \propto zz$$

$$z \propto \frac{yy}{p} - p \text{ vel } z \propto p - \frac{yy}{p} \propto qy \propto \frac{1}{4} gr + pp - zz \propto yy$$

$$pz + pp \propto yy \text{ vel } pz - pz \propto yy \propto \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq \propto \frac{1}{4} gr + pp - zz} \propto y.$$

Quarum æquationum altera ad parabolam, cujus rursus latus rectum p . Altera ad circumferentiam cujus radius $\sqrt{\frac{1}{4} qqr \propto \frac{1}{4} gr + pp}$. Notandumque nullam hic utroque casu esse differentiam, nempe in definiendo circuli radio, quia scilicet $+$ hic non habetur.

Ut constructionis ratio utroque casu appareat, ponatur inventa æquatio

$$y^4 - pp yy + pp qy + \frac{1}{4} ppgr \propto 0,$$

et effe $\frac{p^4 qq}{t^4} + \frac{ppgr - pps}{tt}$ quantitatem affirmatam, et a majus quam b . Fient igitur æquationes ad parabolam et hyperbolam similem

$$\frac{1}{2} ps \propto p^2 \propto yy; \text{ et } \frac{1}{2} \frac{aq}{b} \propto \sqrt{\frac{1}{4} \frac{aaqq}{bb} + \frac{1}{4} \frac{agr}{b} - \frac{1}{4} \frac{ass}{b} + \frac{a^2 c^2}{b}} \propto y.$$

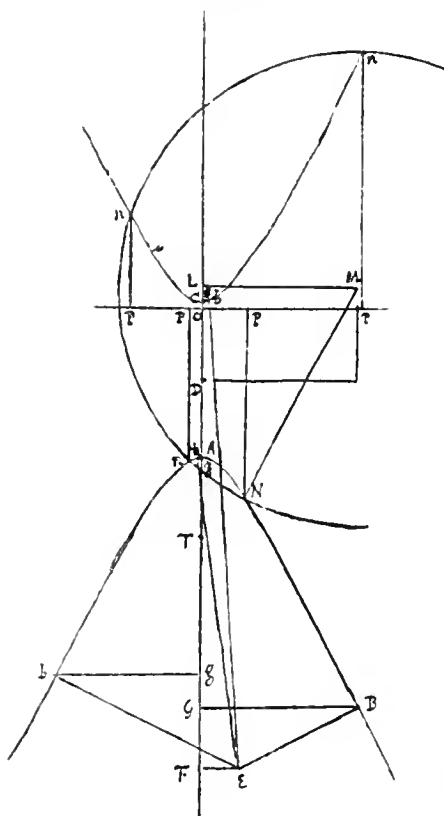
Aequationes vero ad parabolam et ad circumferentiam

$$pp \propto pz \propto yv; \text{ et } -\frac{1}{2}q \propto \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}gr + pp} - z \propto y.$$

$$\text{Item } l \text{ erit } \propto \sqrt{\frac{aaqq}{bb} + \frac{agr}{b} - \frac{ass}{b}} \text{ et } s \propto p - \frac{bp}{a}.$$

Hinc igitur primi casus constructio fiet hujusmodi. Ponatur DL [Fig. 49] in axe

[Fig. 49].



in partem contrariam puncti F, quoniam in æquatione prima habetur + ppqy; fitque

$$DL \propto \frac{\frac{1}{2}ahq}{lb}.$$

$$\text{Porro fit LM axi perpendicu} \\ \text{laris } \propto \frac{\frac{1}{2}ap}{l}.$$

Jam centro M radio

$$MN \propto \frac{a}{l} \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}gr + pp}$$

describatur circumferentia. Et a punctis quibus ea hyperbolæ vel sectionibus oppositis datis occurrit, cadant perpendiculares in rectam OP, quæ ponatur axi ad angulos rectos,

$$\text{sumptâ DO } \propto \frac{\frac{1}{2}aaq}{lb}, \text{ quæ perpendiculares}$$

NP singulæ vocentur m . Atque ut a ad l ita fit m ad aliam $\frac{ml}{a}$, ac denique sumto in axe intervallo DT versus F, quod fit $\frac{1}{2}g$, accipiantur

$$TG \text{ æquales singulis } \frac{ml}{a}, \text{ idque ita ut quæ TG}$$

sunt à perpendicularibus NP a parte puncti F positæ, cadant ultra punctum T à centro D; reliquæ vero in partem contrariam. Jamque axi perpendiculares GB ostendent puncta B, ad quæ ductæ ex puncto E occurrant hyperbolæ ad angulos rectos.

Note ajoutée plus tard.

2 Oct. 1687. Inveni easdem constructiones hæc inveniri methodo Slusij; quæ est in Mesolabo ejus pag. 92. si suppleantur in hac methodo quæ ibi ad marginem annotavi. Et ex constructione per ellipsin aut hyperbolen datæ similem, deducatur constructio per ellipsin aut hyperbolen datam, uti hic fecimus, quod Slusius non videtur animadvertisse semper fieri posse absque novo calculo. Itaque ipsius methodum huic nostræ præfero, magis intricatæ.

Cette remarque ajoutée en 1687 au texte du Manuscrit 11 s'accorde avec ce que l'on trouve à la p. 291 du Manuscrit F, datant également de 1687 (la p. 285 est datée août 1687 et la p. 311 3 déc. 1687):

Aequationes meae problematis Apolloniani reductae ad locos secundum methodum Slutij pag. 92 Mesolabi.

Cum habetur $-ppyy$.

$y^4 - ppqy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \propto 0$ $yy \propto nz$
addatur hinc $2ppyy$ inde $2ppnz$ quae aequalia. Et in eo suppleo hic methodum Slutij.

$$mnz + ppqy - ppqy \propto 2ppnz - \frac{1}{4}ppgr$$

$$AB \propto z \text{ [Fig. 50]}$$

$$ppyy \propto ppqy + 2ppnz - \frac{1}{4}ppgr - mnz$$

$$\frac{EF}{p} = \frac{EG}{n-z} = \frac{BC}{\frac{pp}{n} \left| \frac{nz}{p} - p \right.}$$

$$yy \propto qy - \frac{1}{4}gr + 2nz - \frac{mnz}{pp}$$

$$y \propto \frac{1}{2}q \propto \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}gr + 2nz - \frac{mnz}{pp}}$$

$$\frac{nz}{p} - p$$

qu.

$$y \propto \frac{1}{2}q \propto \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}gr + pp - pp + 2nz - \frac{mnz}{pp}}$$

$$\frac{mnz}{pp} - 2nz + pp.$$

Ellipsis

$$mnz - ppnz \propto ppqy - \frac{1}{4}ppgr$$

$$z - \frac{ppz}{n} - nz \propto \frac{ppqy - \frac{1}{4}ppgr}{mn} - yy$$

$$\text{Sit } \frac{pp}{n} + n \propto m.$$

$$yy \propto \frac{ppqy}{nn} - \frac{\frac{1}{4}ppgr}{nn} + mz - z \quad \text{Circumferentia.}$$

$$y \propto \frac{\frac{1}{2}ppq}{nn} \propto \sqrt{\frac{p^4qq}{n^4} - \frac{1}{4}\frac{ppgr}{nn} + \frac{1}{4}mm - \frac{1}{4}mm + mz - z}$$

quadr.

Cum habetur $+ppyy$

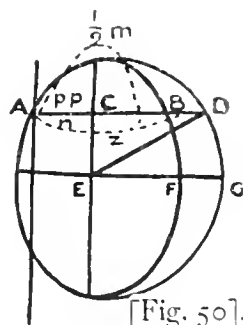
$$y^4 + ppqy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \propto 0$$

$$mnz + ppqy - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \propto 0$$

$$yy \propto qy - \frac{1}{4}gr - \frac{mnz}{pp}$$

$$y \propto \frac{1}{2}q \propto \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}gr - \frac{mnz}{pp}} \text{ ad Ellipsin similem datae.}$$

Et restituendo $ppnz$ pro $ppyy$ fit aequatio ad parabolam



$$mmz + ppnz - ppqy + \frac{1}{4}ppgr \propto 0.$$

Et auferendo aequalia $nz \propto yy$ fit $zz + \frac{ppz}{n} - nz \propto \frac{ppqy}{m} - \frac{1}{4}ppgr - yy.$

Sit $n = \frac{pp}{m} \propto m.$ $yy \propto \frac{ppqy}{m} - \frac{1}{4}\frac{ppgr}{m} + mz - zz$ locus ad circumferentiam

$$y \propto \frac{\frac{1}{2}ppq}{m} \times \sqrt{\frac{p^4qq}{n^4} - \frac{1}{4}\frac{ppgr}{m} + \frac{1}{4}mm - \frac{1}{4}mm + mz - zz}$$

quadr.

Ex his intellexi meam methodum construendi problema Apollonij de perpendiculari ex dato puncto in hyperbolam vel ellipsin ducenda eodem redire quo Slufij illa pag. 92 Mefolabi, quæ non opus habet tantis ambagibus. Sed in ea supplendum quod ibi ad marginem notavi.

APPENDICE

À LA PIÈCE XIII DE LA P. 288

(THÉORÈME SUR LES POINTS D'INTERSECTION DES CONIQUES
DONT LES AXES SONT PARALLÈLES OU À ANGLES DROITS, 1680)

Mars 1680.

A. En cherchant les points d'intersection d'une ellipse et d'une parabole ayant son axe parallèle à l'un des axes de l'ellipse ¹⁾, Huygens obtint un jour une équation du quatrième degré en y où le terme en y^3 faisait défaut (comparez la note 2 de la p. 288 qui précède). Il faillit tout de suite la portée de cette découverte:

... in æquatione non habebitur nisi y^4 , yy et y non autem y^3 . Ergo ductis perpendicularibus in axem parabolæ a punctis intersectionum, erunt summæ ex utraque parte æquales.

Si circulus parabolam secet in quatuor punctis, vel parabola alia cujus axis axem prioris secet ad angulos rectos, vel ellipsis vel hyperbole aut oppositæ sectiones quarum axis vel parallelus sit vel ad rectos angulos axi parabolæ, a punctis intersectionis autem demittantur perpendiculares in axem parabolæ, summæ perpendicularium ab utraque parte axis inter se æquales erunt.

Ce théorème avait été énoncé pour le cas de la circonférence de cercle et de la parabole par F. van Schooten dans ses „Commentarii in Librum III Renati Cartesii”, comme nous l'avons indiqué, aussi à la p. 219 qui précède.

Ita quatuor puncta intersectionum [savoir ceux de la conique et de la parabole considérées] erunt in circuli circumferentia. Nam circumferentia per tria illorum punctorum descripta necessario parabolam in quarto etiam secabit, ut summæ perpendicularium fiant æquales.

Si conicæ sectio in quatuor punctis secet, sunt autem axes utriusque paralleli vel sibi mutuo ad angulos rectos, quatuor puncta intersectionum erunt in circuli circumferentia.

En rédigeant la Pièce en français ²⁾ — rédaction dont une grande partie s'accorde avec celle des

¹⁾ Manuscrit E, p. 232, portant la date 22 Mart. 1680.

²⁾ Manuscrit E, p. 236—238.

qui est une æquation quarrequarrée qui estant reduite manque de second terme, puisqu'il n'y aura point de y^3 ³⁾).

Et de quelque maniere que la parabole soit couppee par une section conique dont l'axe soit parallele ou a angles droits a celui de la parabole il est aisé de voir qu'il n'y pourra avoir dans la premiere equation que yy , y et xx et x . Et x estant tousjours $\propto \frac{yy}{d}$, il ne peut ijvenir en substituant cette quantité au lieu de x , que yy et y^4 , et non y^3 .

Or ce second terme manquant a l'equation il est certain que les valeurs de la racine y affirmatives seront ensemble egales aux valeurs negatives de la mesme y . C'est a dire les perpendiculaires DE d'un costé de l'axe CB egales aux perpendiculaires DE de l'autre costé. Car si ces perpendiculaires de l'un costé sont appellées l et m , de l'autre $-n$ et $-p$. . . ou plutôt, pour reproduire exactement le texte, $\div n$ et $\div p$. En d'autres endroits aussi on rencontre parfois chez Huygens, au lieu du signe $-$, le signe \div qui a peut-être été inventé par Albert Girard. On ne trouve toutefois ce signe, au lieu du signe $-$, qu'une seule fois dans l'„Invention nouvelle en l'algèbre” de Girard de 1629 (citée à plusieurs reprises par van Schooten dans ses „Commentarii” et ailleurs et sur laquelle on peut consulter aussi la note 120 de la p. 217 qui précède). C'est dans cette brochure que se trouvent les théorèmes sur les relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique à une inconnue; mais nous n'osons pas conclure de l'emploi du signe \div que Huygens l'avait sous les yeux en ce moment.

donc puisque $y \propto l$ et $y \propto m$, et $y \propto -n$ ⁴⁾ et $y \propto -p$ ⁴⁾ il l'enfuit que

$y - l \propto 0$ Et le produit de ces quatre quantitez fera une æquation quarrée
 $y - m \propto 0$ quarrée, dont chaque terme sera necessairement egal a chaque terme
 $y + n \propto 0$ de l'equation quarrée quarrée qui a este trouvée auparavant. Mais
 $y + p \propto 0$ dans cette premiere le terme sous y^3 estoit $\propto 0$. donc dans l'autre
 equation le terme sous y^3 qui est $+ny^3 + py^3 - my^3 - ly^3$ doit aussi estre $\propto 0$, et par
 consequent $n + p$ egal à $m + l$.

Et la mesme chose devroit estre si trois de ces racines estoient avec le signe contraire de la quatrieme, c'est a dire si trois perpendiculaires tomboient d'un costé et une seule de l'autre ⁵⁾).

Dans le Manuscrit E il n'est pas encore question de la deuxième Proposition (ou deuxième lemme) de la Pièce XIII, et Apollonios n'y est pas cité.

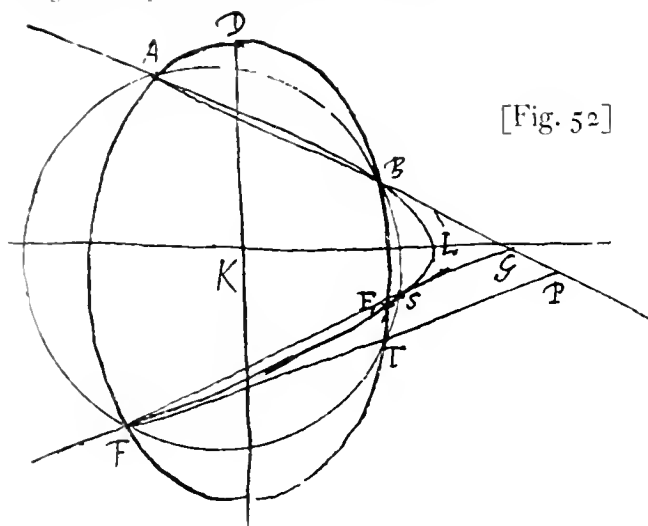
³⁾ Ceci correspond au calcul de la p. 232 du Manuscrit qui n'est que de trois ou quatre lignes.

⁴⁾ Ici Huygens a réellement le signe $-$, comme partout ailleurs dans cette Pièce.

⁵⁾ Notons encore qu'à la p. 235 du Manuscrit Huygens arrive par des calculs sur les intersections de coniques à la conclusion suivante: Non potest æquatio cubica construi per hyperbolam datam et per parabolam, absque immutatione proportionali radicis.

Comparez l'alinéa *Inventa solutione* etc. de l'Appendice précédent (postérieur en date), alinéa qui se trouve à la p. 335.

B. Ailleurs (*Chartæ mathematicæ*, f. 163) Huygens donne — évidemment un peu plus tard — une démonstration du même théorème sans faire usage de géométrie analytique. Elle a déjà été publiée en 1921 par F. Schuh, avec notre „Pièce XIII”, sous le titre „Deux démonstrations dues à Huygens de son théorème concernant les quatre points d'intersection de deux coniques à axes parallèles” dans le T. I de la revue „Christiaan Huygens” (réd. F. Schuh, Noordhoff, Groningen). Schuh y parle, comme nous l'avons aussi fait plus haut, de l'influence de de la Hire. Voici cette démonstration géométrique des *Chartæ mathematicæ*:



[Fig. 52]

Si deux sections coniques ADB, ALF [Fig. 52], s'entrecroisent en 4 points, A, B, E, F, et que leur axes DK, LK soient parallèles, ou à angles droits, les 4 points d'intersection seront dans un cercle.

Car ayant décrit par les 3 points F, A, B un cercle, si ce cercle ne passe pas par le 4^e point E; il coupera donc les 2 sections en deux points différents. En marge: Mais on prouvera que cela est impossible. Donc il les

coupera au point E qui est leur intersection.

En marge: Posons que le cercle coupe la section ALF au point S, et la section ADB au point T.

Ayant mené les droites AB, FS, posons qu'elles se rencontrent en quelque point G. Et que FT rencontre la même AB en P.

Puisque donc, à cause du cercle les rectangles AGB, FGS sont égaux, il s'en suit par la 17.3. des Conica⁶⁾ que les droites AG, FG sont également inclinées sur l'axe LK de la section ALF. Et par la même proposition puisque les rectangles APB, FPT

⁶⁾ La 17.^{ième} proposition du Livre III des Conica d'Apollonios est ainsi conçue (texte latin de l'édition de Heiberg): „Si duæ rectæ coni sectionem vel ambitum circuli contingentes concurrunt, et in sectione duo quælibet puncta sumuntur, ab hisque in sectione contingentibus parallelæ ducuntur rectæ et inter se et lineam secantes, erunt. ut quadrata contingentium inter se, ita rectangula comprehensa rectis eodem modo sumptis”. Dans la publication de F. Schuh de 1921 le théorème est énoncé plus clairement comme suit (nous prenons les lettres de la Fig. 52): „Si par un point G quelconque on mène deux sécantes GBA, GEF à une conique et qu'on mène des tangentes parallèles à GBA, GEF dont M, N soient les points de contact, on aura

$$\frac{GB \cdot GA}{GE \cdot GF} = \frac{CM^2}{CN^2}, \text{ C étant le point de rencontre des deux tangentes}.”$$

sont égaux à cause du cercle, les droites AP , FP seront également inclinées sur la même LK , parce qu'elle est perpendiculaire ou parallèle à l'axe DK de la section ADB . Donc puisque AG , AP est la même ligne droite, il s'ensuit que FG , FP sont aussi une même droite; parce qu'autrement elles seroient différemment inclinées sur LK . Les points S , T , sont donc dans une même droite menée du point F . Et il s'ensuit que ces mêmes points S , T sont coïncidents en un, puisqu'ils sont dans une même circonférence décrite par le point F . Car autrement il faudroit que la droite menée du point F rencontrât la circonférence en deux autres points que F .

Que si l'on dit que les droites AB , FS peuvent être parallèles, je dis que si elles sont parallèles, la droite qui joint leur points du milieu sera le diamètre du cercle, et sera perpendiculaire à ces deux droites AB , FS . Mais la même ligne de jonction sera aussi l'axe de la section ALF parce qu'elle est son diamètre à cause du parallélisme des AB , FS , et qu'elle est à angles droits aux appliquées. Donc les lignes AB , FS seront perpendiculaires à l'axe de la section ALF . Et cela étant je dis que la ligne FT sera aussi parallèle à AB , car posons qu'elles concourent; elles seront donc également inclinées sur l'axe de la section $ADTF$ par la proposition de Apollonios ⁶). Mais AB étoit perpendiculaire à l'axe de la section ALF , donc aussi FT , ce qui est absurde puisqu'on les a dit concourir ensemble. Donc si AB est parallèle à FS elle est aussi parallèle à FT , et ainsi FS , FT une même ligne. l'on montrera de même que si FT est parallèle à AB , aussi FS sera parallèle à AB . Donc si FS concourt avec AB , aussi FT concourra avec AB . Mais toutes les 2, FS , FT seront également inclinées à l'axe de la section ALF , avec AB , donc toutes deux concourent avec AB vers le même côté.

Lorsque le deuxième membre de l'équation, comme le premier, est égal à 1, de sorte que $CM=CN$, le point C se trouve nécessairement sur l'axe de la parabole (ou, dans le cas de l'ellipse ou de l'hyperbole, sur l'un des deux axes) et les deux tangentes, et par conséquent aussi les deux sécantes, font avec cet axe des angles égaux.

LES TROIS GRANDS PROBLÈMES
DE L'ANTIQUITÉ.



Avertissement.

Dans l'Avertissement précédent ¹⁾ nous n'avons voué que quelques mots au problème ancien de la quadrature du cercle dont l'impossibilité n'a pas été rigoureusement démontrée au dix-septième siècle ²⁾. Quant aux deux autres grands problèmes, celui de la trisection de l'angle dont Huygens s'était beaucoup occupé jadis ³⁾ et celui de la recherche de la duplication du cube, autrement dit de deux moyennes proportionnelles entre deux grandeurs données (problème déliaque), ils conduisaient tous les deux à des équations du troisième degré; il a été question du problème déliaque et de la résolution graphique des équations qui s'y rattache, outre dans quelques Tomes précédents, dans plusieurs pages du présent Tome ⁴⁾.

Comme on peut le voir au Manuscrit D, la dispute avec Gregory amena Huygens à poursuivre la recherche de solutions approchées pour la quadrature du cercle. Nous publions ici séparément (Pièce II) quelques pages de ce Manuscrit qui auraient pu figurer parmi les Appendices ⁵⁾ à la Pièce VI dans lesquels on trouve également certaines approximations nouvelles. Ces pages se rattachent au traité „De Circuli Magnitudine inventa” de 1654.

¹⁾ Voyez la p. 213 ou nous renvoyons le lecteur à cet Avertissement-ci.

²⁾ Consultez notamment sur l'„insuffisance de la démonstration de Gregory de l'impossibilité de la quadrature du cercle” l'article de 1914 de F. Schuh cité à la p. 259 qui précède.

³⁾ Voyez le T. XII.

⁴⁾ P. 13, 220, 286—287, 334 et suiv.

⁵⁾ P. 303—327.

Il est bien connu que déjà dans l'antiquité la recherche de la quadrature du cercle conduisit Archimède à celles de la quadrature de la parabole et de la spirale qui porte son nom. Dans le „De Circuli Magnitudine inventa” Huygens a constamment présentes à son esprit des propositions exprimant des égalités pour la parabole et donnant lieu par analogie à des théorèmes exprimant des inégalités pour le cercle ou sa circonférence. D'une façon générale on peut dire que dans l'esprit de Huygens comme dans celui de plusieurs de ses contemporains les quadratures d'autres surfaces planes et aussi les rectifications de certaines lignes courbes planes ⁶⁾, constituaient des préparations, des ἀπαγωγὰς — voyez p. e. ce mot (si souvent employé par Slusius) dans un passage de Wallis cité plus haut ⁷⁾ — pour la quadrature espérée du cercle.

Huygens, on l'a vu plus haut ⁸⁾, admet les nombres entiers, les nombres fractionnaires et les nombres sourds ou irrationnels quoiqu'en vérité ces derniers ne soient pas exprimables par des nombres déterminés de *chiffres* mais seulement par des *lignes* (on considère évidemment généralement des lignes *droites*). Dans l'esprit de Huygens la question de la possibilité de la rectification de la circonférence de cercle revient donc à celles-ci: 1. une ligne peut-elle avoir une longueur telle, par rapport à l'unité donnée de longueur, qu'elle ne soit exprimable ni par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire, ni par un nombre sourd? 2. dans l'affirmative, en est-il ainsi, ou n'en est-il pas ainsi, de la circonférence de cercle par rapport à son rayon?

La première question peut être formulée plus brièvement (quoique moins clairement) comme suit: existe-t-il un nombre correspondant à une longueur quelconque? Question à laquelle nous pourrions tout-de-suite (en nous considérant comme des gens du dix-septième siècle) donner une réponse négative, si nous n'avions pas adopté avec Huygens et tant d'autres la convention peut-être assez illogique de parler de „nombres sourds”.

Depuis des temps fort reculés sans doute les penseurs ont fait une distinction entre la quantité discrète et la quantité continue (voyez p. e. sur ce sujet la note 3 de la p.

⁶⁾ Il en a été question à la p. 216.

⁷⁾ Note 104 de la p. 215.

⁸⁾ Voyez la p. 188 qui précède. Nous ne parlons pas ici des logarithmes auxquels il donne aussi le nom de nombres. Pour lui les logarithmes ne sont au fond, nous semble-t-il, que des nombres entiers: voyez les p. 215—216 et 264 qui précèdent. D'ailleurs ils portaient officiellement, depuis Neper, le nom de *logarithmes*; leur refuser le nom de nombres eût donc fait l'effet d'un purisme quelque peu bizarre.

11 qui précède). Depuis l'introduction par Ménéchme ⁹⁾ de courbes donnant par intersection deux longueurs (deux coordonnées, peut-on dire) représentant les deux moyennes proportionnelles entre deux quantités pouvant être, semble-t-il, non seulement des *longueurs*, mais aussi des *nombre*s, il pouvait sembler désirable d'attribuer une valeur numérique à une longueur quelconque, malgré l'impossibilité de dire exactement ce qu'il faut entendre par une telle valeur numérique. Nous avons dit plus haut ¹⁰⁾ qu'Aristote ne craint pas d'appliquer le mot ἀριθμός à une quantité qui varie d'une manière continue. Il est vrai que cet ἀριθμός τῆς κινήσεως, le *temps* qui s'est „écoulé” depuis un instant déterminé, n'est pas une longueur *spatiale*. Toutefois, après ce premier pas, d'autres — nous songeons surtout à Barrow (note 19 qui suit) — pouvaient avoir l'audace de parler aussi de nombres correspondant à des longueurs *spatiales* quelconques. D'ailleurs, vers le commencement du dix-septième siècle, plus précisément en 1585, Simon Stevin dans „le Premier Livre d'Arithmétique” avait déjà dit clairement, sans citer Aristote, que „nombre n'est point quantité discontinue... à une continue grandeur correspond le continue nombre qu'on lui attribue... le nombre est quelque chose telle en grandeur, comme l'humidité en l'eau...” ¹¹⁾. Ceci mériterait, ajoute l'édition de 1634 de Girard, „un traité particulier”, mais „ce ne fera pas icy son lieu” ¹²⁾. Nous ne trouvons pas que Stevin ait jamais tâché de justifier

⁹⁾ Voyez la p. 287 qui précède.

¹⁰⁾ Note 27 de la p. 181.

¹¹⁾ „L'Arithmétique de Simon Stevin de Bruges: Contenant les computations des nombres Arithmétiques ou vulgaires: Aussi l'Algebre, avec les quatre premiers livres d'Algebre de Diophante d'Alexandrie, maintenant premierement traduits en François...” A Leyde, de l'imprimerie de Christophle Plantin, MDLXXXV. Nous citons les p. 4—5.

¹²⁾ „Oeuvres mathématiques de S. Stevin” publiées par Albert Girard en 1634 (Leyde, B. & A. Elsevier). Les paroles citées de Stevin, ainsi que la remarque ajoutée par Girard, s'y trouvent à la p. 2.

Stevin dit un mot sur le début de son „Arithmétique” dans son „Primus liber Geographiæ” („Hypomnemata mathematica” de 1608, p. 11 du dit livre, appartenant à la „6 definitio” qui a trait à l'„eruditum seculum”): „Alterum indicium *erudi* [lisez: *eruditi*] *seculi*, est admirabilis numerorum peritia, quæ veteribus illis, & priscis viris fuit cognita... Illustr. *Iosephus Scaliger* aliquando nobis ostendit • punctum ab ipsis [Arabibus] dici, nostri quæ o vicem fungi. congruens cum eo quod non ita pridem 2 definitione Arithmetici nostræ Gallicæ de eodem disseruimus”. En effet dans l'Explication de la dite Definition II („Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de chascune chose”) Stevin avait dit que les nombres ne commencent pas par 1, comme on l'admet généralement, mais par 0 („0, commencement du nombre”). Ensuite il énonce en

ses affirmations: dans sa thèse c'est le bon sens, l'intuition, qui a la parole et non pas la logique. Le noeud gordien n'est pas défait, il est tranché par un coup d'épée ¹³).

Huygens n'a jamais avancé pareil axiome. Il est vrai que chez lui, comme chez tant d'autres, lorsqu'il se sert de l'expression „quantitas” ¹⁴), on peut parfois être en doute s'il entend parler exclusivement d'une longueur ou bien peut-être aussi d'une quantité numérique ¹⁵); ce qui certes ne suffit nullement pour le considérer comme un partisan de la thèse de Stevin ¹⁶). Nous avons déjà dit ¹⁷) qu'il déclare expressément ne pas être satisfait de certains raisonnements, ou de certaines définitions, lui paraissant médiocrement logiques, de Wallis. Nous croyons donc aussi pouvoir admettre qu'il est en désaccord avec ce mathématicien là où celui-ci, traitant dans son „Arithmetica universalis” de 1655 ¹⁸) de la „quantitas continua” ou „magnitudo” d'une part, de la „quantitas discreta” ou „numerus” de l'autre, pense bien faire en effaçant plus ou moins cette distinction ¹⁹). Notons que dans l'„Arithmetica infinitorum”, datant également de 1655 ¹⁸), Wallis dit ²⁰) être convaincu „rationem illam

grands caractères la thèse „que nombre n'est point quantité discontinue”, qui fait encore partie de la dite Explication.

Stevin dit donc avoir publié cette thèse antérieurement à son entretien avec Scaliger, ce qui nous dispense de demander si ce que Scaliger lui avait communiqué correspondait bien certainement à la deuxième définition de l'„Arithmetique”, et aussi de poser la question si Stevin savait que les Arabes ont largement profité des lumières des philosophes grecs. En énonçant sa thèse, Stevin semble ne pas avoir conscience d'une autorité quelconque qui l'aurait amené à parler ainsi.

¹³) Il est à remarquer que beaucoup d'auteurs modernes introduisent bien moins brusquement ce parallélisme du nombre et de la longueur. Voyez p.e. le beau „Cours d'analyse” de M. C. Jordan (Paris, Gauthier—Villars, 1893), où l'auteur commence par traiter des propriétés des nombres discrets et nous propose ensuite la „ligne continue” décrite par un point mathématique se mouvant d'une manière continue — p. 90: „Une ligne étant définie comme le lieu des positions successives d'un point mobile . . .”; comparez sur ce sujet la p. 191 qui précède — après quoi il admet, sans qu'il soit question d'„hypothèse” ou d'„axiome”, la continuité des valeurs numériques correspondant aux longueurs.

¹⁴) P.e. l. 6 et 10 de la p. 233 qui précède.

¹⁵) Voyez aussi à la p. 73 du T. XVI (l. 6) l'expression „numeri lineæve”.

¹⁶) Qu'il ne cite pas.

¹⁷) P. 13 et 213.

¹⁸) Ouvrage cité à la p. 258 qui précède.

¹⁹) I. Barrow, dans ses „Lectiones Mathematicæ” de 1664 (Leçt. III, début) — p. 47 de „The Mathematical Works of Isaac Barrow, D.D.” ed. W. Whewell, Cambridge, Univ. Press, 1860 — dit de même: „Etenim evicto numerum (illum saltem quem Mathematicus contemplatur) a quantitate, quam vocant, continuâ nil quicquam reverâ differre, sed ei tantum exprimendæ declarandæque confictum esse, nec Arithmeticam proinde ac Geometriam circa diversam mate-

quæ quærebatur [le rapport de la longueur de la circonférence du cercle à son diamètre] ejusmodi effe ut quæ nec veris numeris, nec quidem radicibus furdis (vulgo dictis) effe explicabilis... alium aliquem notationis modum quam qui adhuc receptus est introducendum putavi, quo *numerus ille impossibilis* [nous fougnerons] indicetur".

Wallis fait allusion à son célèbre théorème exprimant le „numerus impossibilis”

par la fraction $\frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \dots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots}$ ²¹⁾ (à laquelle se rapporte aussi la courbe suspecte aux yeux de Huygens ²²⁾ dont il fut question à la p. 234 qui précède) fraction dont Huygens dit admirer la découverte „utique si vera est”, ce qui lui semble probable ²³⁾.

On conçoit que Wallis, par cette découverte, croyait avoir *démontré* ²⁴⁾ ce qui à

riam versari, sed communes uni subjecto proprietates utramque pari quasi passu demonstrare, plurima liquebit inde maximaque in rem Matheseos publicam commoda derivari... hæc admissa numerorum et magnitudinum coalitione, locuples utrique disciplinæ [Geometriæ et Arithmetiæ] succrescet accessio, lautum accedet incrementum”.

Dans les „Lectiones Mathematicæ” Barrow cite Aristote fort souvent (e. a. des passages sur le temps et le mouvement). Aux p. 30 et 34 il observe qu’Aristote applique l’expression $\pi\alpha\sigma\iota\nu$ tant aux nombres qu’aux grandeurs („magnitudinis et multitudinis commune genus constituit”), tandis qu’auparavant on disait $\pi\alpha\sigma\iota\nu$ pour les quantités discrètes et $\pi\epsilon\lambda\iota\epsilon\iota\nu$ pour le continu (comparez la note 3 de la p. 11 qui précède).

Ni Wallis ni Barrow ne citent les paroles si claires de Stevin. Barrow doit cependant, nous semble-t-il, les avoir connues puisqu’il dit à la p. 59 de l’édition citée, en parlant des „numeri surdi” ou „irrationales”: „Atqui satis ostendunt hi numeri, quos proinde non incongrue *Geometricos* appellat Stevinus [voyez l’„Argument” et la def. XXXI du 1. livre de l’„Arithmetique”], numerum a magnitudine nihil differre reipsâ; quos certe nec ipsâ mente purem abstrahi posse ab omni magnitudine”. En lisant cette phrase, le lecteur n’apprend pas que Stevin avait *généralement* avancé dans son „Arithmetique” ce que Barrow exprime par les mots „numerum a magnitudine nihil differre reipsâ”.

Nous saisissons cette occasion pour mentionner aussi en passant les „Lectiones geometricæ” de 1669 de Barrow: dans l’Appendicula de la Lectio XI il s’inspire de la cyclométrie de Huygens; voyez les notes 3 de la p. 1 et 3 de la p. 38 du T. VII. Huygens (T. VII, p. 43, 1670) n’exprime aucune opinion sur cette Appendicula.

²⁰⁾ P. 359 du T. I de 1695 des „Opera Omnia”.

²¹⁾ Ici il ne s’agit pas précisément du rapport de la longueur de la circonférence au diamètre (notre nombre π), mais de celui de la surface du carré circonscrit à celui du cercle ($\frac{4}{\pi}$).

²²⁾ 1652—1653, lettres à van Schooten (T. I).

²³⁾ P. 459 de notre T. I (lettre de Huygens à Wallis de juillet 1656). Wallis en 1652 n’avait pas expliqué à Huygens la genèse de sa courbe dont d’ailleurs il ne voyait pas suffisamment lui-même les propriétés.

²⁴⁾ Lettre de Wallis à Brouncker de novembre 1668 (notre T. VI, p. 289): „the work is done already, the thing itself being proved long since in my *Arithmetica Infinitorum*”, etc.

son avis comme à celui de Huygens n'était pas démontré dans un ouvrage postérieur par Gregory, que le „*numerus impossibilis*” n'est pas un nombre dans le sens que Huygens attribuait à ce mot ²⁵⁾).

Huygens, lui, n'a jamais accordé — voyez la Pièce IV qui suit — qu'il fût prouvé que ce „*numerus*” dit „*impossibilis*” ne peut pas être un nombre dans le sens restreint dont il vient d'être question ²⁶⁾. Ne réussissant pas à trouver ce nombre il a dû se contenter d'obtenir par des artifices géométriques des valeurs approchées qui peu à peu perdaient leur intérêt. La Pièce II qui suit représente un effort de ce genre dont le résultat n'a pas été publié par lui ²⁷⁾.

Lorsqu'il avait été démontré par Leibniz que le „*numerus impossibilis*” — nous parlons toujours de notre nombre π (notation du dix-huitième siècle) — peut être exprimé par la somme algébrique d'une infinité de fractions numériques, Huygens put espérer (Pièce III) que le problème de la quadrature du cercle se montrerait résolvable par la sommation effective des termes de cette série.

Le traité d'algèbre de 1685 de Wallis fit connaître à Huygens les approximations de Newton déduites de développements en séries que Newton compare avec celles de Huygens („*De Circuli Magnitudine inventa*” de 1654). Wallis cite deux lettres de 1676 de Newton à Oldenburg, dont ce dernier envoya des copies tant à Leibniz, auquel elles étaient destinées en premier lieu, qu'à lui. Wallis les avait reçues en juillet 1677 peu avant la mort d'Oldenburg (septembre 1677). On voit par la Pièce IV qui suit que Huygens n'en reçut pas de copies et qu'il apprit seulement à les connaître (ou plutôt à connaître les grands extraits de ces lettres qui se trouvent dans le livre de Wallis) en 1685 ou 1686. Il s'agit des lettres de Newton à Oldenburg du 13 juin et du 24 octobre 1676, quoique — soit dit en passant — Wallis en deux endroits donne à cette dernière lettre la date du 24 août 1676 ²⁸⁾. C'est aux formules de Wallis et de Brouncker que se rattache (même Pièce) le développement par Huygens du „nombre π ” en une fraction continue.

²⁵⁾ Comparez sur ce sens les l. 11—13 de la p. 283 du T. VI.

²⁶⁾ Nous l'avons dit aussi aux p. 39—40 du T. XVIII.

²⁷⁾ Il s'agit ici d'une approximation obtenue à l'aide de la considération de centres de gravité, sujet auquel se rapporte la Deuxième Partie de l'article de F. Schuh mentionné à la p. 259 qui précède. Consultez surtout les §§ 167—169 qui se rapportent à ce que nous appelons ici la Pièce II. Schuh y discute le procédé de Huygens d'une façon détaillée.

²⁸⁾ Voyez la note 6 de la p. 391 qui suit. La dernière lettre d'Oldenburg à Huygens (T. VIII, p. 8) est de février 1676.

En 1691, ou plutôt déjà en 1689, Huygens revint dans le Manuscrit G (notre Pièce V) sur la „Progressio Leibnitsij ad Circuli Quadraturam” (Pièce III), l'étendant „ad sectores quovis, quod ille nescio an animadverterit”²⁹⁾. En d'autres termes il démontra, géométriquement, la série $\text{arc tg } t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \text{ etc.}$ ³⁰⁾ pour des arcs quelconques inférieurs à 45° (ou $= 45^\circ$).

Les considérations géométriques sont de 1689; elles se rattachent à des considérations géométriques de 1674. La série qui en résulte est de 1691. Tandis que celle de Leibnitz (trouvée d'abord d'une autre façon) est le développement de $\text{arc tg } 1$ (notation moderne), Huygens propose de prendre plutôt $\text{arc tg } \frac{1}{3}$ ce qu'il appelle la „progressio optima ad quadrandum circulum”.

Le développement en série de l'arc tangente était connu depuis plusieurs années à diverses personnes: James Gregory³¹⁾ en avait fait part à John Collins en 1670, mais sans en donner aucune démonstration. En novembre 1690³²⁾ Leibniz écrit à Huygens que dans l'ouvrage qu'il avait „composé autrefois sur la quadrature Arithmétique”³³⁾ il avait démontré une proposition générale pour les secteurs des coniques qui, pour le cercle, revient à la formule $\text{arc tg } t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} \text{ etc.}$ Huygens n'a peut-être pas eu cette formule sous les yeux avant ce temps³⁴⁾. Le bout de phrase cité plus

²⁹⁾ Fin de la Pièce V.

³⁰⁾ Sans se servir de l'expression courte „arc tg t ” encore inconnue.

³¹⁾ Mort en 1675. Gregory écrit $a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} \text{ etc.}$ Chez Huygens le rayon $r = 1$. On sait que la tangente t au dix-septième siècle est une longueur, non pas un rapport de deux longueurs.

³²⁾ T. IX, p. 534.

³³⁾ Voyez la Pièce III qui suit.

³⁴⁾ Aux p. 178 et 179 des „Acta Eruditorum” de 1691 Leibniz écrit (dans son article „Quadratura Arithmetica communis Sectionum Conicarum quæ centrum habent, indeque ducta Trigonometria Canonica ad quantamcunque in numeris exactitudinem à Tabularum necessitate liberata: cum usu speciali ad lineam Rhomborum nauticam, aptatumque illi planisphærium”): „Jam anno 1675 compositum habebam Opusculum Quadraturæ Arithmeticae amicis ab illo tempore lectum... in Opusculo nostro inedito nec ipsi [Hugeno] visum [nous soulignons], inter alias propositiones... etc.” Il est vrai qu'en 1679 (T. VIII, p. 219) Leibniz écrit à Huygens des „choses qui appartiennent à l'Académie et particulièrement ma Quadrature Arithmétique dont j'ay laissé même le M.S. à Paris”. Mais dans sa réponse de novembre 1679 (T. VIII, p. 244) Huygens parle de „cette Quadrature Arithmétique” comme d'une chose qui lui est inconnue. En 1682 (T. VIII, p. 403) P. van Gent écrit à Huygens, si nous le comprenons bien, que Tschirnhaus, chargé de rapporter le manuscrit en Allemagne, l'aurait perdu en route. S'il en a été ainsi, on n'a pas manqué de le retrouver, puisqu'on le possède encore à Hanovre.

haut „ad fectores quofvis [fecteurs de cercle], quod nescio an ille [Leibniz] animadverterit” est écrit *en marge* à la suite d’une considération géométrique de 1689 d’où Huygens peut déduire la formule générale de l’arc tangente. Nous ignorons si cette remarque écrite en marge date de 1689 ou de 1691. Il en est de même d’une autre remarque sur le même sujet, également écrite en marge (fin du § 3 de la Pièce V), où Huygens renvoie à la page ultérieure, datant de 1691, du Manuscrit G où se trouve la série $\text{arc } \text{tg } t = \text{etc.}$ Il est évident que ce renvoi ne peut en tout cas pas être antérieur à 1691. Nous inclinons à croire que les *deux* remarques marginales datent de cette année. Dans ce cas le „nescio an animadverterit” ne se rapporte pas à un doute sur la connaissance de Leibniz de la formule générale (nous parlons toujours du cercle), mais au fait que Leibniz peut ne pas avoir su qu’elle peut être démontrée de la façon que Huygens indique.

La démonstration de Huygens revient à ceci. Il savait depuis 1674 qu’une certaine aire comprise entre trois droites et la courbe à équation $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ (la „versiera”, comme on dira plus tard) est égale à un cercle de rayon $\frac{1}{2}a$ et peut d’autre part s’exprimer par $a^2 (\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \text{ etc.})$, d’où résulte la formule de Leibniz. En 1689 il découvre qu’en calculant une aire moins étendue également limitée par trois droites et par la versiera on obtient la surface d’un *secteur* du même cercle. Or, cette aire peut aussi être exprimée par une série analogue à la précédente. D’où résulte la formule générale qu’il aurait pu déduire en 1689 mais qu’il n’a peut-être déduite en effet qu’en 1691.

Huygens dit que sa „progressio optima” est „simplicior ac commodior” que la „progressio Newtoniana”. Il s’agit sans doute de la formule de Newton de la p. 392

qui suit: $\text{arc AB [Fig. 57]} = d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} \text{ etc.}$, où d est le diamètre du

cercle considéré et x la flèche AD de la Fig. 57³⁵⁾; formule dont Huygens peut avoir causé avec Fatio de Duillier lorsque celui-ci le visita en février 1691 — voyez la p. 396 qui suit — puisque Fatio lui écrit en décembre 1691³⁵⁾, en citant l’„Algebra de Mr. Wallis”, en avoir trouvé la démonstration³⁶⁾.

³⁵⁾ T. X, p. 215 et note 6 de cette page.

³⁶⁾ Cette formule de Newton se trouve aux p. 297 et 324 du T. I de „I. Newtoni Opera” éd. S. Horsley, 1779 („Excerptum IV ex epistolâ Newtoni ad Oldenburgum primâ. De Problematis per Series Infinitas Resolvendis”).

Nous n'avons pas de Pièce de 1666 ou postérieure à cette année qui traite spécialement de la trisection de l'angle.

Au sujet du problème déliaque (Pièce VII) on pourrait se demander, en ayant égard à la première partie du présent Tome, si Huygens ne l'a pas parfois considéré dans un rapport étroit avec l'interpolation de tons dans l'échelle musicale. Il faut répondre à cette question qu'il s'est borné à chercher des solutions géométriques, naturellement en faisant usage d'algèbre. Dans l'antiquité aussi, malgré le rapport étroit existant selon plusieurs entre la mathématique et la musique — on peut consulter l'ouvrage de Théon de Smyrne, cité plus haut ³⁷⁾ — ce problème, si nous nous en tenons aux textes, paraît avoir été considéré comme essentiellement de nature géométrique. Huygens n'a recours aux logarithmes que lorsque le nombre de termes à interpoler, soit en musique, soit dans d'autres cas pratiques (voyez la p. 294 qui précède), devient plus grand.

³⁷⁾ P. 5, 10, 11, 177 et 180. Soit dit en passant, nous ne citons dans ce Tome que l'édition fragmentaire de Boulliau, la seule qui existât au dix-septième siècle.

LES TROIS GRANDS PROBLÈMES DE L'ANTIQUITÉ.

- I. HUYGENS ET HOBBS (1666).
 - II. UNE QUADRATURE APPROCHÉE DU CERCLE (1668).
 - III. LE DÉVELOPPEMENT DU „NUMERUS IMPOSSIBILIS” (π) EN SÉRIE PAR LEIBNIZ (1674).
 - IV. DU LIVRE DE WALLIS, HISTORIA ALGEBRAE ANGLICÈ ¹⁾. DÉVELOPPEMENT DU „NUMERUS IMPOSSIBILIS” (π) EN UNE FRACTION CONTINUE (1686 ou 1687).
 - V. PROGRESSIO OPTIMA AD QUADRANDUM CIRCULUM AC NON TANTUM LEIBNITIANA MULTO CITIUS APPROPINQUANS SED ET NEWTONIANAM POST SE RELINQUENS, SIMPLICIORQUE EA AC COMMODIOR¹⁾ (1691 ET 1689).
 - VI. HUYGENS ET HUBERTUS HUYGHENS (1692).
 - VII. INVESTIGATIO DUARUM MEDIARUM ¹⁾.
-

¹⁾ C'est ainsi que Huygens lui-même intitule cette Pièce.

I.

HUYGENS ET HOBBS.

1666.

À la p. 13 qui précède (Pièce III: la composition ou addition des rapports) nous avons fait ressortir que Huygens est de l'avis de Hobbes, et non pas de celui de Wallis, dans la question de savoir s'il faut considérer les „quantitates rationum” comme des *nombre*s entiers ou fractionnaires.

Que personne n'en tire la conclusion que Huygens faisait grand cas de Hobbes mathématicien. Sa „Censura” de 1662, citée à la p. 13, du livre de Hobbes de la même année traitant e.a. de la duplication du cube et de la quadrature du cercle ¹⁾ fait bien voir que les démonstrations vicieuses de Hobbes qui croyait être en état de résoudre ces fameux problèmes ne lui semblaient nullement intéressantes.

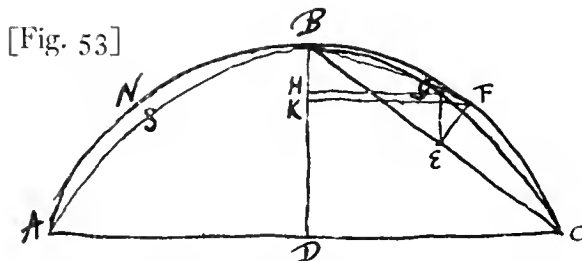
En 1666 Hobbes publia un traité „De principiis et ratiocinatione geometrarum, ubi ostenditur incertitudinem falsitatemque non minorem inesse scriptis eorum, quam scriptis Physicorum & Ethicorum, Contra factum professorum geometriæ” qui contient e.a. un chapitre XXI „De Magnitudine Circuli Hugeniana”, où il fait au traité de Huygens de 1654 des objections qui ne tiennent pas debout; Huygens y est dit „deceptus”, „falso usus principio hoc, punetum esse nihil”, ce que Huygens avance „confirmat id quod refutare voluit” etc. Déjà en 1662 Huygens écrivait (T. IV, p. 274): Je crains fort que la chose ne soit désespérée, et luy au nombre des incurables.

¹⁾ „Problemata Physica una cum Magnitudine Circuli”, London.

²⁾ Voyez aussi sur Wallis et Hobbes la p. 258 qui précède. Nous y avons cité un écrit de 1657 de Wallis; en effet, Hobbes avait déjà traité de la duplication du cube dans son „De corpore” de 1655 et ailleurs. En 1660 Hobbes publia son „Examinatio et emendatio mathematicæ hodiernæ, qualis explicatur in libris Johannis Wallisii Geometriæ Professoris Saviliani in Academia Oxoniensi, distributa in sex dialogos”. C'est le premier de ces dialogues que nous avons cité à la p. 13. La „Quadratura circuli, cubatio sphæræ, duplicatio cubi” de Hobbes parut en 1669. Le deuxième volume (de 1670?) des Oeuvres de Hobbes (le premier est intitulé: „Thomæ Hobbes Malmesburiensis Opera philosophica quæ latinè scripsit omnia”, etc. I. Blaeu, Amsterdam, 1668, le second — exemplaire de la Bibliothèque de l'Université de Leiden — n'a aucun titre, et n'est pas daté) contient cette „Quadratura circuli etc. una cum responsione ad objectiones geometriæ professoris Saviliani Oxoniæ editas anno 1669”. En effet, Wallis avait publié le 3 juin de cette année à Oxford la brochure: „Thomæ Hobbes quadratura circuli ... etc. ... confutata” qui commence par les mots: „Accepi per Veredarium hesternæ nocte, Hobbii Schediasma novum, solitis refertum nugis”. Hobbes revenait toujours à la charge et Wallis ne cessa qu'en 1671 de lui répondre. Voyez encore sur ce sujet les p. 1 et 93 (note 21) du T. VII.

UNE QUADRATURE APPROCHÉE DU CERCLE ¹⁾.

Octobre 1668.



Prop. 1.

ABC [Fig. 53] portio circuli.
ASBGC parabola portio eandem
basin et eundem verticem habens.
BC bifariam secta in E. EF per-
pendicularis BC. EG parallela
BD. Duæ FK, GH parallelæ DC.
Dico BK maiorem esse quam BH.

Jungatur BF. Ergo BK ad BD ut qu. BF ad qu. BC. Sed qu. BF magis est quam $\frac{1}{4}$ qu. BC. Ergo et BK major quam $\frac{1}{4}$ BD. Sed BH, propter parabolam est æqualis $\frac{1}{4}$ BD. Ergo BK major quam BH. quod erat demonstrandum.

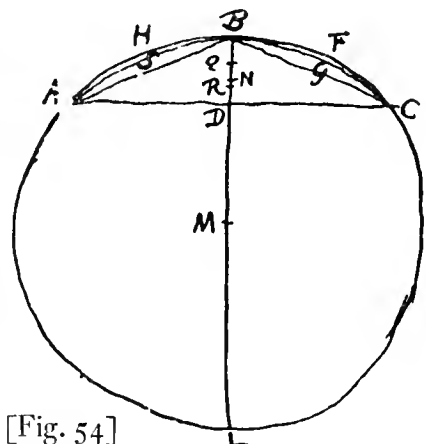
Prop. 2.

Isdem positis dico residuorum ANBS, BFCC centrum gravitatis minus abesse à puncto D quam punctum H.

Cum enim portionis parabolicae BECG centrum gravitatis sit in diametro ejus GE, centrum vero gravitatis portionis circularis BECF sit in diametro ejus EF. necesse est centrum gravitatis residui BGCF esse ad eam partem rectae EF quae versus C. Sed non potest esse extra ambitum BECF. Ergo erit intra ambitum EFC, ac proinde minus distabit a basi DC quam punctum F. Ac proinde minus utique quam punctum G vel H. Quare et recta residuorum BFCG, BNAS centra gravitatis conjungens secabit diametrum BD inter H et D. quod erat demonstrandum.

Prop. 3.

ABC [Fig. 54] circuli portio, cujus diameter BD. circuli centrum M, diameter BL²⁾. DR \propto BD. Per 18 nostr. de Circ. Magn.³⁾ si fiat



¹⁾ La Pièce est empruntée aux p. 61-64 du Manusc. D.
Les pages 63 et 65 portent resp. les dates 9 et 16 Oct.

2) Nous omettons les mots qui suivent dans le Manusc.:
 Sit $MD \propto MB \propto b$ [sic]. Les lignes suivantes
 du texte font voir que Huygens a pris $MD = a$ et
 $MB = c$.

³⁾ Theor. XV. Prop. XVIII, p. 167 du T. XII.

ut	MR	ad	$\frac{2}{3}$ DL	ita	BD	ad aliam, ea erit	altitudo trianguli majoris portione circ. ABC.
	$\frac{3}{5}a + \frac{2}{5}c$	—	$\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c$	—	$c - a$	$\left\{ \frac{100c - 10aa}{9a + 6c} \right.$	altitudo trianguli æqualis parabolæ ASBGC.
	$3a + 2c$	—	$\frac{10}{3}a + \frac{10}{3}c$			$\left\{ \frac{4}{3}c - \frac{4}{3}a \right.$	majus altitudine trianguli æqualis residuo inter portiones parabolæ et circuli.
	$9a + 9c$	—	$10a + 10c$			Rel. $\frac{2 \text{ qu. } c - a}{9a + 6c}$	

Jam quia $\frac{100c - 10aa}{9a + 6c}$ majorem rationem habet ad $\frac{4}{3}c - \frac{4}{3}a$ quam portio circuli

ABC ad portionem parabolæ ASBGC: per conversionem rationis habebit $\frac{100c - 10aa}{9a + 6c}$

ad $\frac{2 \text{ qu. } c - a}{9a + 6c}$ minorem rationem quam portio circuli ABC ad residuam BGC Γ ,

BSAH. Sit BQ $\propto \frac{1}{3}$ BD. Ergo quia RD $\propto \frac{2}{3}$ BD, ablatis utrisque BQ et RD, quæ faciunt $\frac{1}{3}$ BD, ab BD, relinquitur QR $\propto \frac{2}{3}$ BD, five $\frac{2}{3}c - \frac{2}{3}a$. Est autem Q altius quam centrum gravitatis residuorum BFCG: R vero centrum gravitatis parabolæ ASBGC. Ergo QR major quam distantia inter centra gravitatis parabolæ et dictorum

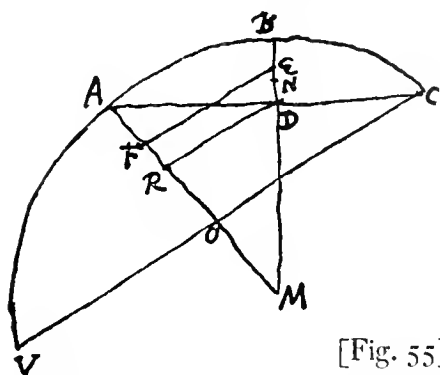
residuorum. Quare si fiat ut $\frac{100c - 10aa}{9a + 6c}$ ad $\frac{2 \text{ qu. } c - a}{9a + 6c}$ ita QR, $\frac{2}{3}c - \frac{2}{3}a$ ad aliam

RN $\frac{7 \text{ qu. } c - a}{100c + 100a}$ erit jam RN major quam distantia inter centra gravitatis portionis

parabolicæ et portionis circularis ABC. Adeoque N punctum altius centro gravitatis

portionis circuli ABC. Quod si vero ad RN $\propto \frac{7 \text{ qu. } c - a}{100c + 100a}$ addatur DR $\propto \frac{2}{3}c -$

$\frac{2}{3}a$, fiet DN $\propto \frac{47cc - 14ac - 33aa}{100c + 100a}$.



[Fig. 55]

circuli VABC. Et fit MD $\propto a$, MB $\propto c$, AD $\propto d$.

Prop. 4.

Sit VAC [Fig. 55] circuli portio cujus diameter AO. Et ducta sit AC. Et portionis ABCD sit diameter BD. Et sumatur diametri AO pars AF $\propto \frac{2}{3}$ AO. ducaturque FE basi OC parallela quæ diametro BD occurrat in E. Dico punctum E magis distare ab D quod basin AC bifecat quam centrum gravitatis portionis ABCD.

Sit enim DR parallela EF; et concurrant productæ AO, BD in M, quod erit centrum

$$\text{Ergo ut MA ad AD ita DA AR} \\ c \text{ --- } d \text{ --- } d \quad \bigg/ \quad \frac{dd}{c}$$

Sed quia $AF \propto \frac{2}{5} AO$ erit inde $AF \propto \frac{4}{5} AR$, ideoque $FR \propto \frac{1}{5} AR$, hoc est $FR \propto \frac{1}{5} \frac{dd}{c}$. Ut autem RM ad MD, hoc est ut MD ad MA ita FR ad DE.

$$\text{Ergo ut MD ad MA ita FR DE} \\ a \text{ --- } c \text{ --- } \frac{1}{5} \frac{dd}{c} \quad \bigg/ \quad \frac{1}{5} \frac{dd}{a} \text{ hoc est } \frac{\frac{1}{5} cc - \frac{1}{5} aa}{a}.$$

Sit jam in diametro BD inventum punctum N sicut in propositione præcedenti. altius nempe centro gravitatis portionis ABCD. Itaque cum MD sit a , MB, c , erit

$$DN \propto \frac{+7cc - 14ac - 33aa}{100c + 100a}.$$

At DE est $\frac{\frac{1}{5}cc - \frac{1}{5}aa}{a}$. Dico autem DN minorem esse quam DE. Si enim DN non minor quam DE,

$$\text{effet } +7cc - 14ac - 33aa \text{ non minor } \frac{20c^3 - 20aac + 20acc - 20a^3}{a}$$

$$\text{Effet } +7acc - 14aac - 33a^3 \text{ non minor } \frac{20c^3 - 20aac + 20acc - 20a^3}{a}$$

$$\text{Effet } 27acc + 6aac \text{ non minor } 20c^3 + 13a^3.$$

Atqui est minor, cum c sit major quam a . Sit enim $c \propto a + y$, fit

$$27acc + 6aac \longrightarrow 27a^3 + 54aay + 27ayy + 6a^3 + 6aay.$$

$$\text{Et } 20c^3 + 13a^3 \longrightarrow 20a^3 + 60aay + 60ayy + 20y^3 + 13a^3.$$

Atqui $33a^3 + 60aay + 27ayy$ minor est quam $33a^3 + 60aay + 60ayy + 20y^3$ nam

o minor quam $33ay + 20y^3$.

Est igitur DN minor quam DE, ac proinde punctum E ulterius distat à basi AC quam centrum gravitatis portionis ABC, cum etiam N amplius distet.

Prop. 5 ⁴⁾.

ABC [Fig. 56] portio circuli, cujus diameter BD, intra quam parabola descripta

[Fig. 56]

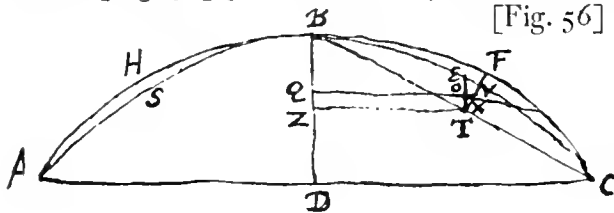
est ASBEC. Sit BQ $\propto \frac{2}{5} BD$.

Dico residuorum AHBS, BF

CE centrum gravitatis quod

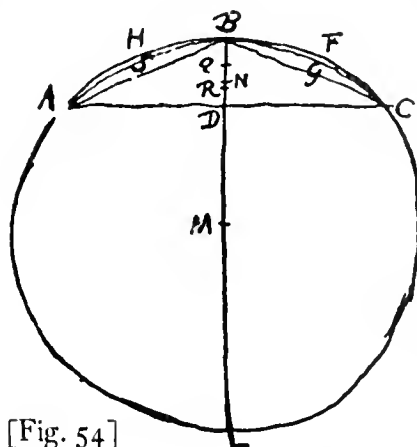
est in diametro BD ulterius

distare a vertice B quam punctum Q.



⁴⁾ Huygens écrit par erreur: Prop. 6 (et de même Prop. 7 pour la proposition suivante).

Ducatur enim QOV parallela basi AC, et occurrat diametro portionis parabolicæ BECT, quæ sit TE, in O, et diametro portionis circuli BFCT, quæ sit TF, in V. Et sit TZ parallela quoque AC. Quia ergo BQ $\propto \frac{2}{3}$ BD, hoc est $\propto \frac{1}{3}$ BZ, erit QZ $\propto \frac{1}{3}$ BZ. Sed ET propter parabolam, est dimidiæ BZ æqualis. Ergo QZ $\propto \frac{2}{3}$ ET. Ideoque O centrum gravitatis erit portionis parabolicæ BECT. Atqui recta QOV ulterius distat a basi AC quam centrum gravitatis portionis circuli BFCT. Ergo portionis hujus centrum gravitatis cadet necessàrio inter puncta V et T, puta in X. Et centrum gravitatis residui BFCE, cadet in recta OX producta versus X. adeoque minus distabit a basi AC quam recta VQ; eademque ratione centrum gravitatis residui AHBS. Quare utriusque centrum gravitatis commune minus distabit à basi AC sive ulterius à vertice B, quam punctum Q, quod erat demonstrandum.



[Fig. 54]

Prop. 6.

Repetatur figura prop. 3 [Fig. 54] atque etiam argumentatio eadem usque ad determinationem longitudinis BQ, quæ hic ponatur $\frac{2}{3}$ BD. Unde sic porro dicemus. RD est similiter $\frac{2}{3}$ BD, cum R sit centrum gravitatis portionis parabolicæ ASBGC. Ergo restabit QR $\propto \frac{1}{3}$ BD. Est autem Q altius quam centrum gravitatis residuorum AHBS, BFCE; ideoque QR major intervallo inter hoc centrum gravitatis et centrum gravitatis portionis parabolicæ ASBGC. Quare si fiat

$$\text{ut } \frac{10cc - 10aa}{9a + 6c} \text{ ad } \frac{2 \text{ qu. } c - a}{9a + 6c}$$

ita $\frac{1}{3}c - \frac{1}{3}a \bigg/ \frac{1}{23} \frac{\text{qu. } c - a}{c + a}$ erit N punctum altius quam centrum gravitatis portionis circuli ABC.

Est autem RD $\propto \frac{2}{3}c - \frac{2}{3}a$ et DM $\propto a$. Ideoque RM $\propto \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}a$, cui si addatur RN $\propto \frac{1}{23} \frac{\text{qu. } c - a}{c + a}$, fit NM $\propto \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}a + \frac{1}{23} \frac{\text{qu. } c - a}{c + a}$. Jam rursus per 18 de Circ. Magn. si fiat

ut MN ad $\frac{2}{3}$ LD ita BD ad aliam,

$$\frac{\frac{2}{3}c + \frac{2}{3}a + \frac{1}{23} \frac{\text{qu. } c - a}{c + a}}{\frac{2}{3}c + \frac{2}{3}a} = \frac{c - a}{\frac{10cc - 10aa}{6c + 9a + \frac{2}{3} \frac{\text{qu. } c - a}{c + a}}}$$

6c + 9a + $\frac{2}{3} \frac{\text{qu. } c - a}{c + a}$ — 10c + 10a ea erit minor altitudine trianguli super AC, quod portioni ABC sit æquale. quia MN est major ea quæ a centro circuli ad portionis centrum gravitatis pertingit.

Hæc autem ad arcuum longitudinem inveniendam transferuntur ut in prop. 19 de

Circ. Magn.⁵⁾. Adeoque si finis arcus alicujus sit a , subtensa ejusdem c , erit arcus longitudo minor quam $a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a}$, major autem quam $a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a + \frac{3}{5} \frac{qu. c - a}{c + a}}$.

Ergo ad arcus propositi longitudinem inveniendam, fiat ut sexcupla subtensa cum noncuplo finis, (quæ linea composita vocetur N) ad summam finis subtensæque ita eorum differentia ad aliam, cujus decupla addatur finui, habebiturque arcus longitudo vera major. Si vero linea N augeatur tribus quintis lineolæ quæ sit tertia proportionalis summæ et differentiæ dictæ, fiet, eadem faciendo, longitudo arcus vera minor.

Quanta autem in numerorum characteribus horum terminorum possit esse differentia, simili ratione ac pag. 9 hujus⁶⁾ ostendemus. Nempe si in a et c primus characterum triens sit idem, differentia terminorum, inter quos arcus longitudo consistit, nunquam plurium quam unius erit characteris. Sæpe vero ne unius quidem, sed fractio tantum cujus numerator unum, denominator quinque characteres habebit.

Est enim additiuncula quæ ad a apponitur, in majori termino ad eam quæ in minori ut $6c + 9a + \frac{3}{5} \frac{qu. c - a}{c + a}$ ad $6c + 9a$. Ac proinde erit additiuncula major ad differentiam utriusque (quæ eadem etiam terminorum est differentia) ut $6c + 9a + \frac{3}{5} \frac{qu. c - a}{c + a}$ ad $\frac{3}{5} \frac{qu. c - a}{c + a}$. sive ut $\overline{6c + 9a}$ in $\overline{c + a} + \frac{3}{5} qu. c - a$ ad $\frac{3}{5} qu. c - a$.

Ponatur numerus characterum similium in a et $c \propto s$. Ergo tam a quam c habebit characteres $3s$. atqui $6c + 9a$ majores sunt quam $10a$. Ergo $6c + 9a$ habebit characteres non pauciores quam $3s + 1$. Ergo et $6c + 9a + \frac{3}{5} \frac{qu. c - a}{c + a}$ non pauciores habebit quam $3s + 1$. Sed $c + a$ non habet pauciores quam $3s$. Ergo $6c + 9a$ in $c + a$, non habebit pauciores quam $6s$, per theor. 1 pag. 5⁷⁾. Rursus quia $c - a$ non plures habet quam $2s$, habebit qu. $c - a$ non plures quam $4s$.

Est itaque ut numerus constans characteribus non paucioribus quam $6s$ ad $\frac{3}{5}$ numeri constantis characteribus non pluribus quam $4s$, ita additiuncula major ad differentiam majoris et minoris termini. Ista vero additiuncula non est major quam $\frac{5}{3}c - \frac{5}{3}a$, cum

⁵⁾ Theor. XVI, Prop. XIX, p. 169 du T. XII.

⁶⁾ Les pages du Manuscrit D qui sont indiquées aujourd'hui par les n°s 40—65, ont été numérotées 1—26 par Huygens. Sa pag. 9 correspond à la p. 48 où se trouve le début de ce que nous avons appelé plus haut (p. 316) „Appendice IV à la Pièce VI de la p. 259 (Insuffisance de la démonstration de Gregory de l'impossibilité de la quadrature du cercle, 1668)”.
⁷⁾ Voyez la p. 313 qui précède.

vix fit major quam $\frac{4}{3}c - \frac{4}{3}a$, ideoque non plures characteres habet quam $\frac{5}{3}$ numeri constantis non pluribus quam $2s$ characteribus. Ergo ad inveniendam terminorum differentiam oportet ducere $\frac{3}{5}$ numeri non pluribus constantis characteribus quam $4s$, in $\frac{5}{3}$ numeri non plures habentis quam $2s$, unde orietur numerus non pluribus constans quam $6s$, cum fractiones altera alteram tollant. Et hoc productum dividendum per numerum non pauciores habentem quam $6s$, unde quotiens, hoc est differentia terminorum dicta non plures uno habebit characteres.

Quod si vero a initialem characterem habeat supra 5, et $c - a$ habeat initialem 1; jam $6c + 9a$ in $c + a$ habebit faltem characteres $6s + 3$. Et qu. $c - a$ non plures quam $4s - 1$, eoque ducto in $c - a$, productum non plures quam $6s - 2$; quo diviso itaque per $6s + 3$, fiet fractio cujus denominator superabit numeratorem quinque characteribus, unde minor utique erit quam $\frac{1}{10000}$.

Notandum porro minorem terminum semper aliquanto accuratiorem fore majore, ut si c fit latus 60 anguli $a \frac{1}{2}$ lateris 30 anguli, fit major terminus circumferentiæ

totius	3141592653775
minor autem	3141592653565
cum verus fit	3141592653589.

III.

LE DÉVELOPPEMENT DU „NUMERUS IMPOSSIBILIS” ¹⁾ (π) EN SÉRIE PAR LEIBNIZ.

[1674]

Leibnitzij quadratura ²⁾). quadratum est ad circulum sibi inscriptum ut

1 ad $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c in infinitum.

1 ad $\frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9}$ minor terminus

1 ad $1 - \frac{2}{1 \cdot 3} - \frac{2}{3 \cdot 5} - \frac{2}{5 \cdot 7}$ major terminus

Si major terminus auferatur ab unitate, hoc est si circulus auferatur a circumscripto quadrato, et residuum addatur minori termino, fiet rursus quadratum circumscriptum hoc est unitas.

1 $\infty \frac{2}{3} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9}$ &c.

ergo $\frac{1}{2} \infty \frac{1}{3} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9}$ &c.

Ayant appris de Leibniz cette „quadrature arithmétique” Huygens écrivit le 7 novembre 1674 (T. VII, p. 394): il ne paroitra pas impossible de donner la somme de cette progression ni par consequent la quadrature du cercle. Une des méthodes par lesquelles Archimède avait déterminé la surface d'un secteur de parabole, n'avait-elle pas été la sommation des termes d'une série?

Voyez encore sur le manuscrit de Leibniz „de quadratura arithmetica circuli, ellipsoes et hyperbolæ etc.” datant du temps de son séjour à Paris, plus précisément de 1675, la p. 214 (note 6) du T. VIII, ainsi que la p. 160 (note 15) du T. X. Leibniz déclare en 1691 ne pas avoir montré ce manuscrit à Huygens: voyez la note 34 de la p. 375 qui précède.

Le théorème fut publié par Leibniz en 1682 dans le T. I des „Acta Eruditorum” dans son article „De vera proportionem Circuli ad Quadratum circumscriptum in Numeris rationalibus”. Il en avait fait part à Oldenburg déjà en 1674.

Voyez aussi sur cette quadrature de Leibniz la Pièce V qui suit.

¹⁾ Voyez sur ce terme la l. 4 de la p. 373 qui précède.

²⁾ La Pièce est empruntée à la f. 27 des Chartæ mathematicæ; voyez aussi sur cette feuille la p. 149 (note 12 de la p. 147) du T. XIX où nous avons déterminé sa date. On trouve d'ailleurs au verso l'adresse de Leibniz séjournant en 1674 à Paris: Libnitz [comparez la p. 605 du T. XVIII], Hostel des Romains, rue S. Marguerite. Notons encore qu'à la p. 440 du Manuscrit D se trouve la notice: 1673, 30 Dec. presté a Libnitz mon livre De Circuli Magnitudine et Gregorius de Vera Circuli quadratura.

IV.

DU LIVRE DE WALLIS, HISTORIA ALGEBRAE ANGLICÆ. DEVELOPPEMENT DU „NUMERUS IMPOSSIBILIS” (π) EN UNE FRACTION CONTINUE.

[1686 ou 1687]¹⁾

Cap. 83. Que la quadrature du cercle ne peut estre exprimée par aucune maniere de notation reçue²⁾.

C'est a dire ni par raison de nombres ni de racines.

Dans son *Arithmetica infinitorum*, prop. 190, il appelle cecy sententia nostra aut conjectura³⁾. Mais icy il pretend qu'on peut le conclure sûrement. ce que je ne

¹⁾ Manuscrit F, p. 255. Il y a des dates de 1686 avant cette page (à la p. 239 du Manuscrit Huygens discute un article de Leibniz de septembre 1686; voyez la p. 162 du T. XIX), la date 1687 se trouve à la p. 261. Il s'agit du livre mentionné dans le catalogue de vente de 1695 des livres de Huygens: „A Treatise of Algebra both Historical and Practical by John Wallis, London 1685” (*Libri Mathem. in Folio*, 81). Voyez sur l'édition latine du traité la note 1 de la p. 18 du T. X. Nous le citons d'après le texte latin („*Traëtatus . . . auctus*”) des „*Opera mathematica*” (où l'on peut distinguer les additions du texte primitif).

²⁾ Cap. 83: „*Quadratura Circuli, non designanda secundum ullum antea receptum numeros Notandi modum*”.

³⁾ C'est dans le Scholium appartenant à la Prop. CXC de l'„*Arithmetica infinitorum*” de 1655 que Wallis s'exprime comme suit: „*Et quidem proclivis sum ut credam (quod & ab initio suspicatus sum) rationem illam quam quarimus talem esse ut quæ non poterit numeris exprimi juxta ullum adhuc receptum notationis modum, ne quidem per latera surda; (quale quid instruit Schootenius, de radicibus Aequationum quarundam cubicarum, in ipsius Appendice ad tractatum de Organica Conicarum Sectionum Descriptione, idque ad mentem Vietæ, Cartesii, & aliorum;) ut necesse videatur aliam ejusmodi rationem explicandi modum introducere, quam vel per numeros veros, vel etiam per recepta latera surda. Atque hæc quidem nostra sive sententia, sive conjectura, hinc confirmari videtur:*” Etc.

Wallis cite l'„*Appendix, de cubicarum æquationum resolutione*” de van Schooten qui suit ses „*Commentarii*” sur les livres de Descartes dans son *Recueil* bien connu. Après avoir énoncé la règle dite de Cardan van Schooten parle de „*ejus æquationis radices, aliàs numero non explicabiles*”.

croy pas, et je voudrais qu'il me démontrât seulement que la circonférence est incommensurable au diamètre.

Cap. 79. Il veut justifier sa manière de démontrer par Induction dont il se sert dans son *Arithmetica infinitorum*. Mais en vain [ces trois derniers mots ont été ajoutés après coup] ⁴⁾.

Lorsqu'il écrivit la présente Pièce, Huygens avait sans doute vu dans les „*Acta Eruditorum*” de juillet 1686 (p. 360) l'article de deux pages de Jaques Bernoulli, intitulé: „*Bernoullii Demonstratio Rationum, quas habent series numerorum naturali progressionem sese insequentium, vel quadratorum, cubicorum, &c. item trigonalium, pyramidalium &c. ad series numerorum totidem maximo æqualium*” et commençant par les mots: „*Wallisius in Arithmetica infinitorum id sola inductione investigare docet, cui demonstrandi modo, cum parum scientificus est, alium eumque facillimum hic substituam*”. Nous pouvons en effet admettre que Huygens avait lu cet article puisqu'il est précédé par un article, également de Bernoulli, qui se rapporte à la controverse entre Huygens et Catelan (le n° X de la note 1 de la p. 457 du T. XVIII) ⁵⁾.

⁴⁾ Cap. 79 (ou plutôt LXXIX): „*D. Fermatij Exceptionibus respondetur*”. Voyez sur les démonstrations par induction, outre la note suivante, la p. 213 qui précède (avec la note 92).

⁵⁾ Dans son article „*Sur l'œuvre mathématique de Blaise Pascal*” („*Revue des Questions scientifiques*”, janvier et avril 1924, Louvain, Fr. Ceuterick) H. Bosmans écrit: „*L'induction complète [expression dont Bernoulli ne se sert pas encore; il désigne donc le procédé de Wallis non pas par les mots „induction incomplète” mais, on l'a vu, simplement par l'expression „induction”, comme le fait aussi Huygens] était une méthode aussi ancienne que la Géométrie elle-même. Les Grecs la connaissaient et l'employaient souvent. Mais, de sa plume magique, Pascal lui donne un tour nouveau, lumineux, simple et alerte, qui est demeuré définitif. — Le lecteur en conclura peut-être, que la nouvelle forme donnée à la méthode de l'induction complète fit aussitôt fortune? — Qu'il ne se hâte pas trop. Elle passa au contraire presque inaperçue. Par une de ces bizarreries, dont l'histoire des mathématiques nous offre maint exemple, elle fut même si peu remarquée, que vingt et un an plus tard, dans le cahier de juillet 1686 des *Acta Eruditorum*, Jaques Bernoulli croyait visiblement l'inventer pour rendre rigoureux un raisonnement par induction incomplète de Wallis*”.

Citons encore sur ce sujet A. Prag écrivant en 1931 dans son article „*John Wallis (1616—1703)*” („*Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*”, Abt. B. Bd. 1, Berlin, J. Springer): „*Wallis weiss, dass Induktion in ganzen Zahlen ein Charakteristikum arithmetischer Schlussweise ist [observons que Prag sait fort bien que l'induction de Wallis ne se rapporte pas seulement aux nombres entiers dont il est question dans l'article de Bernoulli; ce n'est pas en dernier lieu d'exposants fractionnaires qu'il s'agit]. Er macht sich Gedanken über die prinzipielle Zulässigkeit solcher Schlüsse . . . was Wallis hier sagt ist . . . barer Unsinn [?] . . . aber das Problem das hinter diesen Ueberlegungen steht ist überaus wichtig . . . Darstellung der Funktion durch die Tabelle, die die Zuordnung stark betont . . . Sicher gehört in den Bereich funktionaler Betrachtungen dieser zweiten Art die Begründung des Verfahrens der „vollständigen” Induktion. So weit konnte Wallis nicht vordringen*”.

Cap. 95. Approximationes quasdam Newtoni refert quas cum meis comparat quas in libello de Circuli Magnitudine demonstravi ⁶⁾.

⁶⁾ Dans le Cap. 91 : „Doctrina Serierum Infinitarum, ulterius à D. Newtono promota” Wallis dit : „Approximationes illæ (in Arithmetica Infinitorum) supra memoratæ (pro Circulo, Ellipsi & Hyperbola) occasionem fecerunt aliis ulterius in eam rem inquirendi; similesque approximationes exquirendi in casibus aliis. Quæ jam dici coeperunt Infinitæ Series, aut Series convergentes, aliisve nominibus tantundem indicantibus. Inter ea quæ ego hoc in genere conspexi: Non alium video qui speculationem hanc subtilius prosecutus est & cum meliori successu, quam Vir Clar. *Isaacus Newton*, Matheseos Professor meritissimus in Celeberrima Academia *Cantabrigiensi*. Qui circa annum (ut conjicio) 1664 aut 1665 speculationem hanc magna sagacitate prosecutus est (sed eam per aliquot annos ad alia studia avocatus intermiserat speculationem). Quod innotuit mihi ex duabus Epistolis ab eo ad Clar. Virum D. Henricum Oldenburgium (Regiæ Societatis Londinensis tum Secretarium) ea de re scriptis (13 Junii & 24 Augusti anni 1676), Societati Regiæ Communicandis, quas inde mihi impertivit Oldenburgius; ingenue quidem scriptas & luce publica dignissimas”. Etc.

Nous avons déjà dit dans l'Avertissement (p. 374) qu'Oldenburg envoya aussi des copies de ces deux lettres de Newton à Leibniz. On les trouve aux p. 179 et 203, n^{os} XLIII et XLV, du recueil „Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern”, éd. C. I. Gerhardt, I, Berlin, Mayer & Müller 1899, d'après les manuscrits conservés dans la Bibliothèque Royale de Hannover. La date de la deuxième lettre n'est pas le 24 août, date que Wallis donne aussi dans la Préface du T. I de ses „Opera” (ce Tome parut en 1695, deux ans après le T. II), mais le 24 octobre. On voit clairement qu'il ne s'agit pas de deux lettres différentes, du 24 août et du 24 octobre, mais d'une seule lettre, tant par le contenu que par le fait que Wallis écrivit plus loin dans la Prop. 95 déjà citée du T. II: „in dicta Epistola Octob. 24. 1676” sans qu'il ait été question d'une nouvelle lettre.

Les citations de Wallis ne sont pas absolument littérales, comme on le constate en les comparant avec le texte de l'édition des œuvres de Newton par S. Horsley; voyez la note 36 de la p. 376 qui précède.

Cap. 92 et 93. „Hujus Applicatio ad Circulum & Ellipsin”. — „Ejusdem Applicatio ad Hyperbolam”.

Cap. 94. „Nova Methodus extrahendi Radices tum Simplicium tum Affectarum Æquationum”.

Cap. 95. „Exempla hujus Methodi exhibet multa [Newton]. Quorum ego aliquot hic transcribo”.

„Exemplum I^o. Etc.

„Per has methodos; Quando Problema reductum fuerit ad hujusmodi Seriem, infinite continuandam; multæ approximationes, usui commodæ, facile obtineantur [tisez: obtinentur], & labore non magno, quæ alias ægre obtineantur, magno temporis & laboris impendio. Hujus Specimen exhibet in exemplo subjecto, pro Circuli Quadratura; cum illo Clariss. *Christiani Hugenii*, super idem subjectum, comparando.

Exemplum X. Data cujusvis Arcus chorda A, arcusque dimidii chorda B; Invenire arcus longitudinem, proxime. Ponatur arcus = z ; & circuli radius = r : tum per ea quæ supra ostensa sunt habemus (duplum sinum arcus $\frac{1}{2} z$)

Cap. 107). Il traite de la réduction de fractions en proportions a de moindres nombres. Il dit que quelques uns ont admiré comment Metius estoit tombé sur ces nombres 113 ad 355 qui approchent si fort a la raison du diametre a la circonference

$$A = z - \frac{z^3}{4 \times 6rr} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4} - \&c.$$

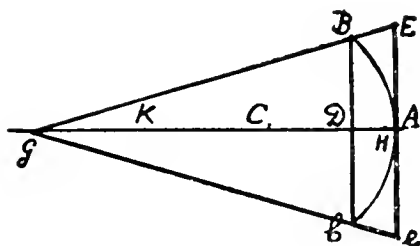
$$\text{Et } B = \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120r^4} - \&c.$$

Tum multiplica B in n (numerus fictitium) & ex Producto deme A: & Residui secundum terminum $-\frac{nz^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^3}{4 \times 6rr}$ (quo evanescat) pone $\infty 0$. Unde prodibit $n = 8$, & $8B - A = 3z - \frac{3z^5}{64 \times 120r^4}$: Hoc est $\frac{8B - A}{3} = z$, proxime. Quippe Error (in excessu [l'édition „Isaaci Newtoni Opera quæ exstant omnia” de 1779 de Samuel Horsley observe, T. I, p. 323: „In defectu potius, sicut rectè statuit Hugenus”]) non major est quam $\frac{z^5}{7680r^4} - \&c$. Estque idem cum illo *Hugenii Theoremate*.

Il s'agit de la Prop. VII de „De Circuli Magnitudine inventa” (T. XII, p. 133).

Exemplum XI. Item. In arcus Bb [Fig. 57] sinu verso AD indefinite producto, invenire punctum G, unde duæ rectæ GB, Gb abscondant (in Tangente Ee) arcui æqualem proxime. Esto Circuli centrum C, Diameter AK = d ; & sinus versus AD = x . Tum est DB (= $V : dx - xx :$)

[Fig. 57].



$$= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} - \&c.$$

Et AE (= AB)

$$= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$

Et AE — BD. AD :: AE. AG. Adeoque

$$AG = \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12xx}{157d} \pm \&c.$$

$$\text{Ponamus ergo } AG \propto \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x.$$

Eritque iterum, $DG \left(= \frac{3}{2}d - \frac{6}{5}x \right)$. DB :: DA. AE — DB.

$$\text{Ergo } AE - DB = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$

Adde DB; eritque

$$AE = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$

Deme hoc ex valore AE prius invento; Residuum est error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}} \pm \&c$.

du cercle. Qu'un d^r. Davenant luy avoit proposé ce probleme en 1663 et qu'il luy a envoié un traité de cette matiere qui a esté imprimé par maniere d'appendix derriere les ouvrages posthumes d'Horrocks. Mais je ne trouve point la ce traité ⁸⁾.

Il propose le Theoreme ainti. Étant donné une fraction en proportion, trouver une qui en approche autant qu'il est possible de faire en des nombres qui n'excèdent point un nombre donné, et dans les plus petits termes.

Sa methode est bien longue par de continuelles additions et differe beaucoup de celle dont je me suis servi ⁹⁾ a trouver les nombres des dents de mes roues du Planetologe. Il l'applique, comme moy, a chercher la proportion prochaine du diametre a la circonference et trouve par ses additions les nombres de 7 a 22, de 133 a 355, de 33215 a 104348 (lesquels derniers selon moy ne font pas des bons). Puis 364913 a

Ergo in AG, sumptis $AH = \frac{1}{5} DA$, & $KG = HC$, Rectæ GBE, Gbe abscedent Ee proxime

æqualem arcui Bab. Quippe error non major est quam $\frac{16x^3}{525d^3} \sqrt{dx}$ [lisez: $2 \cdot \frac{16x^3}{225d^3} \sqrt{dx}$, texte de Gerhardt] \pm &c. Qui multo minor est quam Hugenii¹⁰⁾.

(Etc. Cet „Exemplum”, comme le précédent, est emprunté à la lettre de Newton de juin 1676).

Nous trouvons en effet que lorsque l'arc BAb est la huitième partie de la circonférence, de sorte que $x = r [1 - \cos. 22\frac{1}{2}^\circ] = pr$, où $r = \frac{1}{8}d$, l'erreur de Newton $f = \frac{4\sqrt{2}}{525} p^{\frac{5}{2}} r$ (en n'etenant compte que de ce premier terme) a la valeur 0,00000083 r . Quant à l'erreur de Huygens, d'après le Probl. IV, Propos. XX de „De circuli magnitudine inventa”, où il considère le cas de l'arc dont nous venons de parler, il est de 0,0000097 r (done 11 ou 12 fois plus grand), vu que son „terminus minor accuratior” — chez Newton il s'agit également d'un terminus minor — est égal à 0,7853885 r et que $\frac{1}{4}\pi r = 0,7853982 r$.

⁷⁾ Cap. 10: „De Fræctionum & Rationum Reductiõne ad minores terminos servato quam potest proxime valore”.

⁸⁾ Wallis parle en effet dans le sens indiqué de „Edwardus Davenant, S. Theologiæ Doctõr, & Ecclesiæ Sarisburiensis tum Canonicus Residentiarius; magnæ eruditionis & modestiæ Vir, & in rebus Mathematicis sedulus, earumque bene gnarus”, etc. . . Problema. Cujus solutionem (ante plures annos) ad ipsum [Davenant] misi; eamque subjunxi Schediasmatis quibusdam posthumis Jeremie Horroccii, quæ meæ curæ commendarunt Societas Regia Londonensis, in ordinem digerenda & edenda”. Huygens possédait apparemment la première édition, celle de 1673, des „Opera Posthuma” de Horrocks (T. V, p. 41, note 12) et non pas la deuxième de 1678 (T. V, p. 73, note 8) qui contient vers la fin un chapitre „De rationum et fræctionum reduciõne”. Le catalogue de vente de 1695 des livres de Huygens mentionne en effet l'édition de 1673 (Libri Mathematici in Quarto, 92).

⁹⁾ On trouve déjà des fractions continues, servant au calcul des nombres des dents de différents rouages, aux p. 13 et suiv., datant de 1680, du Manuscrit F où Huygens traite de la *Terræ et Mercurij periodorum proportio*, etc.

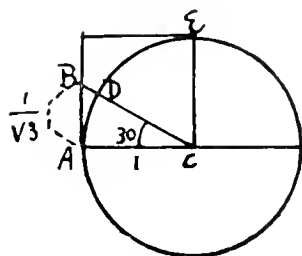
V.

PROGRESSIO OPTIMA AD QUADRANDUM CIRCULUM AC NON
TANTUM LEIBNITIANA MULTO CITIUS APPROPINQUANS SED ET
NEWTONIANAM POST SE RELINQUENS SIMPLICIORQUE
EA AC COMMODIOR.

[1691 et 1689].

§ 1¹⁾.

[Fig. 58]



$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3 \sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 9 \sqrt{3}} - \frac{1}{7 \cdot 27 \sqrt{3}} + \frac{1}{9 \cdot 81 \sqrt{3}} - \frac{1}{11 \cdot 243 \sqrt{3}} \&c \propto \text{AD arc. [Fig. 58].}$$

$\frac{1}{1} - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 9} - \frac{1}{7 \cdot 27} + \frac{1}{9 \cdot 81} - \frac{1}{11 \cdot 243}$. Hinc patet
ortus numerorum progressionis.

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} \&c \text{ summa divisa}$$

per $\sqrt{3} \propto \text{AD arc. quem si in } 3 \text{ ducas fiet quadrans}$

peripheriæ AE, hinc autem idem fit ac si summam progressionis ducas in $\sqrt{3}$.

Le rayon a la longueur 1, comme la figure l'indique. La formule donnée ici par Huygens sans explication correspond à ce que nous appelons le développement en série de l'arc tangente pour un arc de 30° : $\frac{\pi}{6} = \text{arctg} t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \dots$ pour $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$; tandis que celle de Leibniz

¹⁾ Manuscrit G, f. 82 v. Les dates 1 Jan. 1691, Maj. 1691 et 26 Mart. 1691 se trouvent respectivement sur les feuilles 78, 88 et 93.

²⁾ Huyens écrit aussi (f. 82 r) la progressio ad quadraturam circuli

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} - \frac{1}{78 + 45 \sqrt{3}} + \frac{1}{1810 + 1045 \sqrt{3}}$$

etc., où $78 + 45 \sqrt{3} = 3(2 + \sqrt{3})^3$, etc. et où $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \text{tang. } 15 \text{ gr.}$ C'est donc le dé-

veloppement en série de $\text{arctg. } \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ donnant $\frac{\pi}{12}$ (nous avons corrigé $+\frac{1}{78 + 45 \sqrt{3}}$ en $-\frac{1}{78 + 45 \sqrt{3}}$). Il eût sans doute été plus simple d'écrire $2 - \sqrt{3}$ au lieu de $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$.

(Pièce III qui précède) peut être appelée le développement de l'arc tangente pour un arc de 45° :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \dots \text{pour } t = 1^\circ.$$

Le § 3 qui suit, lequel est antérieur en date au § 1, indique comment Huygens a obtenu sa formule: voyez les dernières lignes du § 3. Le § 4 amplifie cette explication. Le § 2, moins important, fait suite au § 1.

§ 2 ³). Series quadratrix	1 ^{us} + 10000000000	2 ^{us} — 1111111111
	3 ^{us} + 2222222222	4 ^{us} — 52910053
	5 ^{us} + 13717421	6 ^{us} — 3741115
	7 ^{us} + 1054131	8 ^{us} — 304831,6
	9 ^{us} + 89656,3	10 ^{us} 29413
	8871	2699
	827	255
	10237093128	1168099478
	1168099478	
	906893650	
	17320507.. $\sqrt{3}$	
	157079451188281342	
	2	
	314158902376562684	

Potest quisque numerus feriei quadratricis inveniri ex promixae praecedenti, exigua multiplicatione et divisione unius vel duarum characterum, usque ad numerum decimum quintum. inde ad quinquagesimum multiplicatione per duos characteres et divisione per tres. quo compendio in suis progressionibus utebatur D. Fatius.

Fatio de Duillier, suisse, visita Huygens à la Haye en septembre 1686 (T. IX, p. 134) et de nouveau en février 1691 (T. X, p. 21; il resta à la Haye jusqu'en septembre, T. X, p. 440) après avoir séjourné en Angleterre et y avoir rencontré e.a. Newton. Voyez la note 1 de la p. 117 du T. IX et la suite du présent Tome.

³) Manuserit G, f 82 v et 83 r.

CEB æquabitur triplo segmento CBS, nam triangulum CDB \propto ADE. Ergo spatium ECSB \propto 4 segmentis CBS. Ergo et spat. DFB \propto 4 segm. CBS. quia, ex constructione curvæ BF ζ — voyez son équation plus loin dans le présent §, et aussi dans la note 2 de la p. 149 du T. XIX —, spat. CSBF \propto DEB. nam CF sumta est æqualis DE, et sic ubique.

Ducatur AC et producta occurrat tangenti BG in L. Et sit QCG parallela AB. Quia ergo ut AD ad DC hoc est ut BD ad DE ita CG ad GL; erit GL \propto DE seu CF. Unde juncta LF, parallela erit BA. Producat LF ad M. Jam trianguli δ CB duplum est triang. ACB. Ergo \square AG quadruplum trianguli δ CB. Unde et \square DM quadruplum erit trianguli δ CB. Sed spat. FBD erat quadruplum segmenti circuli CSB. Ergo totum spatium MFBA \propto 4 sectores δ CSB. Est autem 4 sector δ CSB \propto \square ab arcu CB et recta AB. Ergo spat. MFBA \propto huic rectangulo. Ergo \square MB ad spat. MFBA ut LB ad arcum CB sive ad arcum OB, cujus ipsa LB tangens &c.

Ex his facile perspicitur spatium Aa ζ B æquari circulo ACB, sive quadranti AaOB ⁵⁾.

Ceci correspond à la dernière ligne de la p. 149 du T. XIX.

Quod si continuetur curva B ζ ut et asymptotos Aa, fiet spatium interjectum infinitum æquale quadruplo semicirculo ACB, hoc est duplo circulo AC π . ut facile ex his colligitur ⁵⁾.

Sit AB \propto a, AM \propto x, MF \propto y. Quia ergo AD. DC:BD. DE [c.à.d. AD:DC = BD:DE] erit et AD.DC:AB.CE vel DF.

$$\frac{y \text{ — } \sqrt{aa - yy} \text{ — } a \text{ — } x}{\frac{yyxx \propto a^3y - aayy}{a^3} \propto y}$$

C'est l'équation, dont nous avons déjà parlé plus haut, de la courbe BF ζ , connue plus tard sous le nom de versiera. Il n'est pas généralement connu que Huygens a considéré la versiera déjà en 1674.

En marge ⁶⁾: Ex hujus fractionis divisione numeris expressa oritur quadratura Leibnitsij. Ex qua circulus est ad quadratum circumscriptum ut $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ &c. ad 1.

⁵⁾ Puisque „spatium MFBA \propto 4 sectores δ CSB” et de même par conséquent: „spatium Aa ζ B” = 4 fois le quart du cercle ACB π = ce cercle entier, on a aussi: espace total compris entre le diamètre AB, l'asymptote Aa et la courbe BF ζ continuée jusqu'à l'infini = 4 fois le secteur correspondant, qui est le demi-cercle ACB. En formules modernes:

$$\int_0^\infty \frac{a^3 dx}{a^2 + x^2} = a^2 \int_0^\infty \frac{dz}{1 + z^2}, \text{ où } z = \frac{x}{a} = a^2 [\text{arc tg } z]_0^\infty = \frac{1}{2}\pi a^2, \text{ tandis que } \int_0^a \frac{a^3 dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{4}\pi a^2.$$

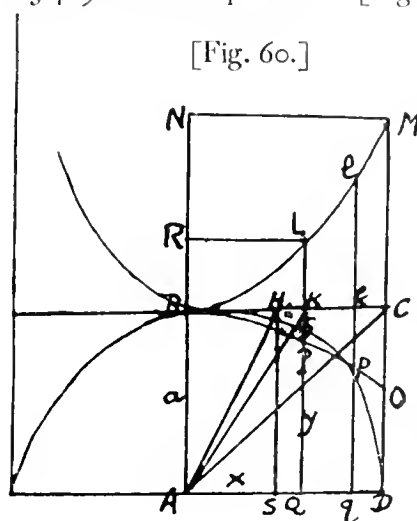
⁶⁾ Voyez sur cette remarque marginale la note 10 de la p. 400 qui suit.

Voyez sur la „fractionis divisio” et sur la formation qui suit cette division, la note 57 de la p. 41 du T. X et la p. 147 du T. XIX. Consultez aussi la note 12 de cette dernière page. Et les p. 261—262 du présent Tome.

Toujours en marge: Sed hæc approximatio lente procedit. Multo citius appropinquabit si AM sive BL ponatur tangens parvi arcus certorum graduum. Sed tunc semper erit irrationalis. Vide pag. infra.

Cette p. 63 du Manuscrit G — numération de Huygens — est la f. 82 v à laquelle nous avons emprunté le § 1 qui précède.

§ 4⁷⁾. ABCD quadratum [Fig. 60]. BD quadrans circumferentiæ, centro A,



[Fig. 60.]

BN \propto AB, CM \propto CD. BM parabola cujus latus rectum BN. LQ parallela BA secans BC in K. LQ, KQ, PQ proportionales.

BPpO per puncta P inventa est linea curva.

En marge: Hæc curva BPO est eadem quæ folio præcedente [Fig. 59] BFZ. AB \propto a,

AQ \propto x, QP \propto y, $\frac{a^3}{aa + xx} \propto$ y.

Dico spatium BODA æquale esse quadranti ABD⁸⁾.

Item ductâ utcumque AK quæ secet arcum in G, et ex K deinde rectâ KQ quæ secet curvam BPO in P, dico esse $\frac{1}{2}$ arcum BD ad arcum BG sicut quadratum BD [scilicet: quadrantem ABD] ad spatium BPQA⁸⁾.

Applicetur ordinatim LR. Ductâ jam AH quæ faciat minimum sectorem GAE et minimum simul triangulum KAH, erit hoc triangulum ad illum minimum sectorem ut qu. KA ad qu. AG, hoc est ut qu. AB + qu. BK ad qu. AB, hoc est ut qu. AB + \square ABR ad qu. AB, hoc est ut RA sive LQ ad KQ. Quod si igitur tota BC divisa intelligatur in particulas æquales ipsi KH, et a divisionum punctis ducantur rectæ ad A, erit totum triangulum ABC divisum in totidem triangula æqualia. Et si ab iisdem divisionum punctis ducantur parallele ad BA, eas secabunt qu. BD in totidem rectangula æqualia. Et horum singula ad partes interceptas ejusdem latitudinis de spatio BODA, erunt ut rectæ KQ ad PQ, hoc est ex constructione ut rectæ LQ ad KQ, hoc est ut \triangle ^{la} KAH ad sectores GAE. Sed et rectangula HQ et \triangle ^{la} HAK sunt respectu omnia inter se æqualia. Ergo ut omnia dicta \square ^a ad omnia spatia PS, ita omnia \triangle ^{la} KAH ad omnes sectores GAE, hoc est

⁷⁾ Manuscrit G, f. 22 v. Voyez sur la date la note 4 de la p. 397.

⁸⁾ Voyez la note suivante.

ut \square KA ad spat. BPQA ita \triangle KAB ad sectorem GAB, five ita tangens KB ad arcum GB. &c. ⁹⁾).

En marge: Hinc ergo etiam per continuam divisionem oritur Progressio Leibnitij ad Circuli Quadraturam et ad sectores quofvis, quod ille nescio an animadverterit ¹⁰⁾).



⁹⁾ L'équation démontrée KB: arc GB = \square KA: spat. BPQA donne, lorsque K coïncide avec C, CB: $\frac{1}{2}$ arc BD = \square ABCD: spat. BODA. Or, en posant CB = r , on a: $\frac{1}{2}$ arc BD = $\frac{1}{4}\pi r$, et \square ABCD = r^2 . Par conséquent spat. BODA = $\frac{1}{4}\pi r^2$, c. à. d. „spat. BODA æquale quadranti ABD” (note précédente).

Quant à la relation du texte $\frac{1}{2}$ arc BD: arc BG = quadrans ABD: spat. BPQA, elle résulte aussi de l'équation démontrée, puisqu'on a

$$\text{KB} : \frac{1}{2} \text{ arc BD} = \square \text{ KA} : \frac{1}{4} \pi r^2$$

c. à. d.

$$1 : \frac{1}{4} \pi r = r : \frac{1}{4} \pi r^2.$$

¹⁰⁾ Voyez sur cette remarque finale, ainsi que sur la remarque finale du § 3, la p. 376 de l'Avertissement qui précède.

VI.

HUYGENS ET HUBERTUS HUIGHENS.

1692.

Voyez sur Huygens, Hubertus Huighens, et la quadrature du cercle les l. 17—19 de la p. 298
du T. X.



INVESTIGATIO DUARUM MEDIARUM ¹⁾).

Sint datæ HC, HQ [Fig. 62] inter quas oporteat duas medias invenire. Sit CB ∞

FNAM est ellipsis centro D. HG
est minor duarum mediarum inter
HC, HQ.

Inventum ex alia constructione,
cujus figura superior [Fig. 61] per
modum perspectivæ.

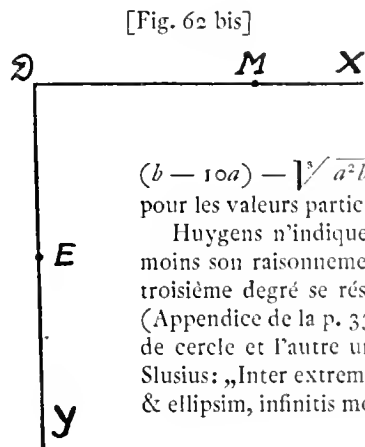
Nous publions ces lignes quoique la construction ne soit pas correcte (sans doute à cause d'une faute de calcul)²⁾, puisque c'est bien rarement que Huygens dans ses démonstrations s'efforce de „perspective" (il s'agit d'une projection oblique sous l'angle $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$, qui change l'ellipse et la circonférence de cercle de la Fig. 61 respectivement en la circonférence de cercle et l'ellipse de la Fig. 62): nous croyons remarquer ici une légère influence de Desargues.

Voyez aussi sur la méthode de projection la note 8 de la p. 428 qui suit.

Dans le manuscrit les diamètres BA sont égaux dans les deux figures.

¹⁾ Chartæ mechanicæ, f. 100.

²⁾ D'après le texte on a dans la Fig. 62, en posant $HC = a$ et $HQ = b$, $CA = 3a$, $CB = \frac{1}{3}(a-b)$;
 $AB = \frac{1}{3}(8a + b)$, $KB = KA = r = \frac{1}{6}(8a + b)$, $AL = \frac{1}{18}(8a + b)$, $LE = a$, $LD = 2a$,
 donc $DE = a\sqrt{3}$, $AE = p = \frac{1}{18}(26a + b)$, $HA = 2a$, $HE = \frac{1}{18}(10a - b)$, $DM =$
 $\sqrt{a^2 + p^2}$, $MN = 2\sqrt{a^2 + p^2}$. En prenant les axes DX et DY comme l'indique la Fig. 62



[Fig. 62 bis]

de la Fig. 62 $3x^2 + y^2 = 3(a^2 + p^2)$ et pour celle
 de la circonférence de cercle de la même figure $(x-p)^2$
 $+ 2r(x-p) + (y-a\sqrt{3})^2 = 0$.

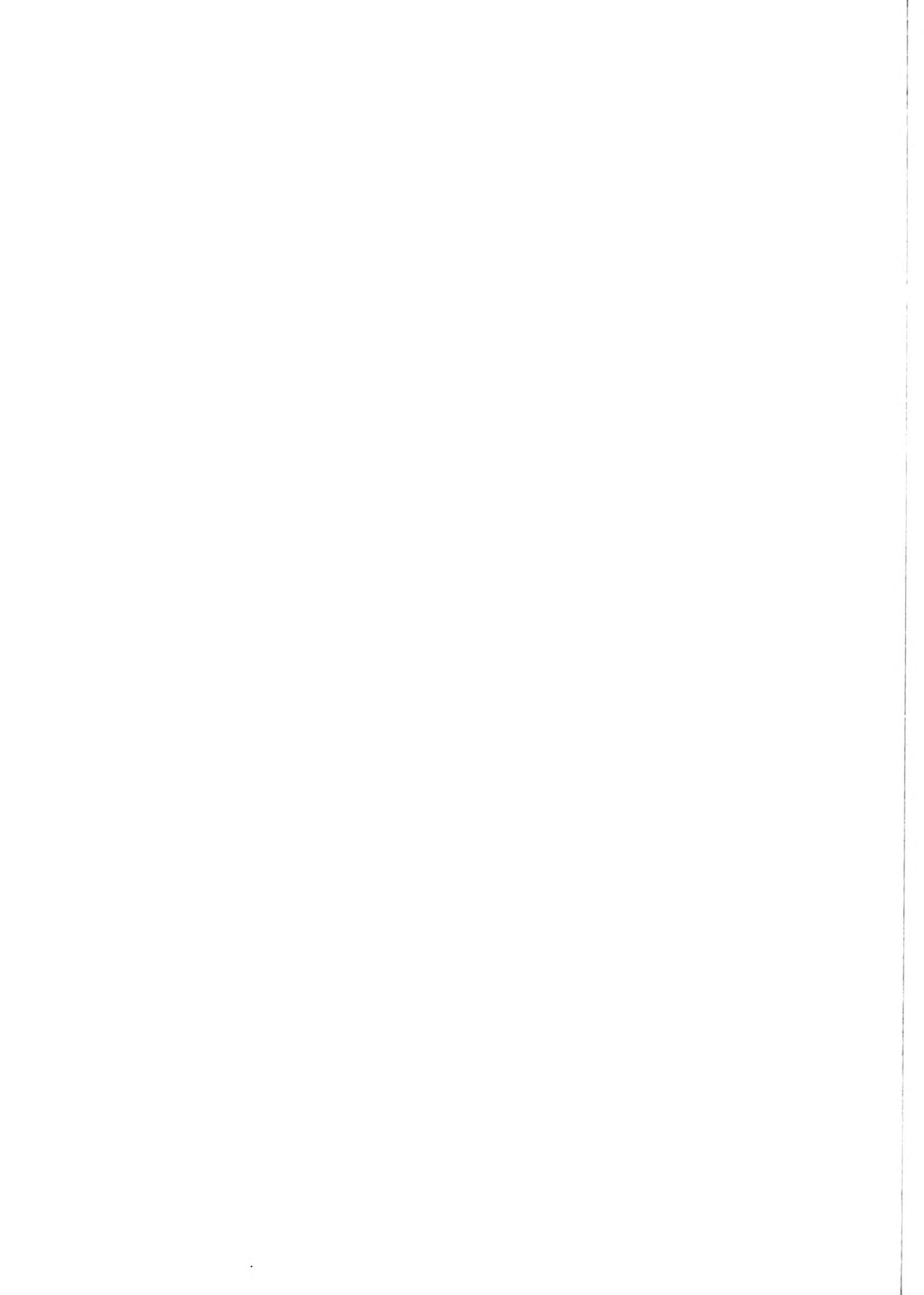
Les deux courbes passent par le point A. Suivant
 Huygens elles se coupent une deuxième fois en un point

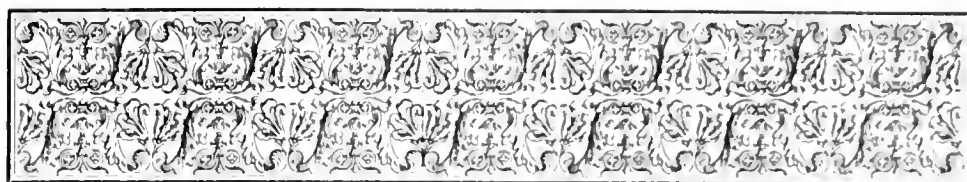
F pour lequel $x = -GE = -(HE + GH) = \frac{1}{18}$

$(b - 10a) - \sqrt{a^2 b}$. En général il n'en est pas ainsi, quoique la chose soit vraie
 pour les valeurs particulières $a = 0$ et $a = b$.

Huygens n'indique pas comment il a trouvé la construction de la Fig. 61, du
 moins son raisonnement n'a pas été conservé. Il est connu que les équations du
 troisième degré se résolvaient généralement par l'intersection de deux coniques
 (Appendice de la p. 334 qui précède), dont l'une pouvait être une circonférence
 de cercle et l'autre une ellipse (voyez p.e. la Prop. Prima du „Mesolabum” de
 Slusius: „Inter extremas datas duas rectas medio loco proportionales per circulum
 & ellipsim, infinitis modis, exhibere”).

MATHEMATICA VARIA 1666-1681.





Avertissement.

Comme on peut le voir dans la suite du présent Tome, c'est surtout après sa rentrée définitive en Hollande, donc après 1681, que Huygens s'appliqua de nouveau avec ardeur, comme dans sa jeunesse, aux mathématiques pures¹⁾: c'est surtout vers la fin du siècle que le calcul infinitésimal prit son essor triomphal.

La présence de Roberval et de Frenicle de Bessy²⁾ à l'Académie ne semble pas l'avoir fortement incité à s'occuper dans la période française de sa vie qui l'ouvre en 1666 de sujets de mathématique pure intéressant spécialement l'un ou l'autre de ces collègues⁴⁾. Voyez toutefois le nom de Roberval dans la Pièce I, 2, B qui suit et de même dans la Pièce I, 2, A, datant également de 1668, celui d'un autre collègue, le physicien Mariotte. Roemer, membre depuis 1672, a été mentionné dans le T. XVIII⁵⁾ là où il était question de l'épicycloïde (année 1674); voyez aussi à la fin de la Pièce III, 4 de 1676 qui suit la „methodus Romeri” rapportée par Huygens

¹⁾ L'Appendice à la Pièce XII (p. 334) appartient aussi à cette période hollandaise, mais il y a lieu, comme nous l'avons dit à la p. 207, de le rattacher aux dernières années (1678—1681) de la période française.

²⁾ Qui décédèrent l'un et l'autre en 1675.

³⁾ Pascal, Desargues et Fermat étaient déjà morts avant 1666.

⁴⁾ Consultez sur les discussions entre Huygens et Roberval sur des sujets de mécanique les T. XVIII et XIX qui précèdent.

⁵⁾ Consultez surtout sur Roemer et Huygens la p. 603 du T. XVIII. Voyez aussi la p. 216 et la Pièce XI à la p. 285 qui précèdent.

pour résoudre un problème planimétrique. La présence de de la Hire à l'Académie, depuis 1678, eut plus d'influence sur lui — nous parlons toujours de la mathématique pure — comme nous l'avons exposé aux p. 219—222 et dans la note 5 de la p. 335. Cette influence persista même après 1681⁶⁾.

Les Pièces III, 1 et IV, 2 sur la question des signes dans les équations de géométrie analytique (la Pièce IV, 2 de 1676 ou 1677 n'est qu'un développement un peu plus ample de celle, III, 1, de 1672) peuvent paraître bien simples. Mais ce sont précisément ces choses simples (équivalence des deux axes, celui des x et celui des y , et équivalence de leurs parties positives et négatives) qui ont de l'importance. Voyez aussi ce que nous avons dit à la p. 217 sur l'expression simple: æquatio parabolæ, équation de la parabole⁷⁾. C'est aussi une remarque simple, mais sur laquelle cependant une différence d'opinion était possible, que celle de la Pièce I, 2, B (nous avons déjà dit qu'on y trouve le nom de Roberval), d'après laquelle les équations algébriques servant à résoudre un problème déterminé fournissent souvent spontanément des solutions d'un problème plus général.

Les carrés magiques, ainsi que d'autres questions sur les nombres, n'avaient pas d'attrait puissant pour Huygens⁸⁾. La composition de son article de 1668 „De combinationum mirandis”⁹⁾ atteste-t-elle pourtant une certaine influence de Frenicle sur sa pensée? Nous avons déjà remarqué à la p. 20 du T XIV¹⁰⁾ que jadis Huygens ne s'était pas servi d'analyse combinatoire (§ 2 de la présente Pièce) dans son traité „Van Rekeningh in Spelen van Geluck” de 1657. Voyez encore ce que nous disons sur Frenicle à la fin du présent Avertissement et consultez l'Appendice de la p. 419 qui suit.

Au § 1 qui se rattache à la considération de 1661 de la ligne logarithmique, Huygens établit les formules

$$\begin{array}{l} \text{Somme des logarithmes des nombres entiers jusqu'à } \log n \text{ (inclus)} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad > n \log n - (n-1) \cdot 4342945 \\ \text{et} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad < (n+\frac{1}{2}) \log n - (n-1) \cdot 4342945 \end{array}$$

⁶⁾ Consultez, outre la note 1 qui précède, la fin de la note 138 de la p. 221.

⁷⁾ Comparez sur ce sujet la note 2 de la p. 442 qui suit.

⁸⁾ Comparez ce que nous avons dit à la p. 214 du T. XI; voyez toutefois quelques carrés magiques aux p. 259—260, datant de 1650, du même Tome.

⁹⁾ Pièce I, 1 à la p. 413 qui suit.

¹⁰⁾ Où nous mentionnons aussi les travaux de Pascal et de Wallis.

(où \log désigne le logarithme à base 10, celui de 10 étant 10 millions); on peut donc dire, en désignant le nombre 4342945 par $\log e$ (ce qui est un anachronisme), que suivant Huygens

$$n^n e^{-(n-1)} < n! < n^n + \frac{1}{2}e^{-(n-1)}.$$

La célèbre formule de Stirling de 1730, qui peut l'écrire

$$\sqrt{2\pi n} \cdot n^n + \frac{1}{2}e^{-n} < n!$$

ressemble beaucoup à celle de Huygens ainsi formulée: le rapport du „terminus minor” de Huygens à celui de Stirling (ce dernier étant plus exact) est $\sqrt{\frac{e}{2\pi n}}$. Quant au „terminus major” de Huygens il est au „terminus minor” de Stirling dans le rapport $\frac{e}{\sqrt{2\pi}} = 1,084$: c'est un „terminus major” fort exact, tandis que le „terminus minor” lui aussi n'est pas sans valeur.

La formule du § 2 pour le nombre de permutations possibles („numerus transpositionum”) lorsque les n lettres considérées ne sont pas toutes différentes, mais qu'il existe parmi elles p. e. trois groupes, aux nombres m_1 , m_2 et m_3 , de lettres égales entr'elles, savoir (en notation moderne) $\frac{n!}{m_1! m_2! m_3!}$, était loin d'être généralement connue puisqu'en 1666 Leibniz dans son œuvre de jeunesse „Dissertatio de arte combinatoria” commet une faute dans la considération d'un cas de ce genre, écrivant¹¹⁾ $6! - 5!$ au lieu de $\frac{6!}{2!}$ pour le nombre des permutations („variationes”) des syllabes ut ut re mi fa sol¹²⁾. Mais cette formule n'est pas de Huygens: tout-le-monde pouvait la trouver chez Mercenne dans les „Harmonicorum libri” de 1635 ou bien dans l'„Harmonie Universelle” de 1636. Déjà dans „La Vérité des Sciences” de 1625

¹¹⁾ Dans le „Probl. VI”, intitulé: „Dato numero rerum variandarum, quarum aliqua vel aliquæ repetuntur variationem ordinis invenire”.

¹²⁾ M. Cantor („Vorlesungen über Geschichte der Mathematik” III, 1901) observe (p. 45) que lorsqu'on réimprima la „Dissertatio” en 1690 à l'insu de Leibniz celui-ci protesta et indiqua e. a. une certaine erreur dans son œuvre de jeunesse, mais que même alors il ne fit pas mention de l'erreur dont il est question dans le texte.

Mersenne considère les „combinations” en connexion avec la théorie des plus beaux chants, dont nous avons parlé à la p. 66 qui précède; en cette année il connaît la formule $n!$ mais pas encore la formule $\frac{n!}{m_1! m_2! m_3!}$. Dans son article posthume sur les combinaisons Frenicle cite au début les „Harmonicorum libri.”¹³⁾

¹³⁾ Dans „La Vérité des Sciences” le Theoreme II du Liure III (nous ne citons que ce seul passage) pose déjà la question de „sçauoir combien une multitude de nombres, de lettres, de soldats, de mouueinens, de sons, & de toutes sortes d'objets peuuent estre changez, & transposez d'un lieu en un autre”. Dans les „Harmonicorum libri” Mersenne considère le cas général en discutant la Prop. VIII du Liber Septimus intitulée: „Cantilenarum varietatem explicare, cum in dato notarum numero duæ vel plures similes occurrunt”. La même chose dans le Second Livre des „Traitez de la Voix et des Chants” qui font partie de l’„Harmonie Universelle”.

Frenicle cite en marge les p. 116—117 (faisant partie du Liber Septimus) des „Harmonicorum libri” dans le traité posthume „Abregé des Combinaisons” („Divers ouvrages” de 1693 et „Memoires de l’Ac. R. d. Sciences, depuis 1666 jusqu’à 1699”, T. V, Paris, C^{ie} des Libraires, 1729).

MATHEMATICA VARIA 1666—1681.

I. A PARIS (MAI 1666 — AOÛT 1670)

1. DE COMBINATIONUM MIRANDIS¹⁾.

2. TROIS PROBLÈMES SUR DES TRIANGLES.

APPENDICE. SUR LA 15 PROPOSITION [DE FRENICLE]¹⁾.

II. A LA HAYE (SEPTEMBRE 1670 — JUILLET 1671)

.

III. A PARIS (JUILLET 1671 — JUILLET 1676)

1. QUESTION DES SIGNES DANS LES ÉQUATIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

2. TROIS PROBLÈMES SUR LE TRIANGLE.

3. UN THÉORÈME SUR LA TANGENTE À L'ELLIPSE.

4. UN PROBLÈME SUR LE QUADRILATÈRE, AVEC EXTENSION DU THÉORÈME
TROUVÉ EN CETTE OCCASION SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIT DANS UNE
CIRCONFÉRENCE DE CERCLE, À UN POLYGONE INSCRIT QUELCONQUE.

5. LES „QUANTITEZ IMAGINAIRES”.

IV. A LA HAYE (JUILLET 1676 — JUIN 1678)

1. QUESTIONS SE RAPPORTANT AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN
GELUCK”.

2. QUESTION DES SIGNES DANS LES ÉQUATIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

V. A PARIS (JUILLET 1678 — AOÛT 1681)

QUESTION SE RAPPORTANT AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN
GELUCK”.

¹⁾ C'est ainsi que Huygens lui-même intitule cette Pièce.

I.

À PARIS (MAI 1666—AOÛT 1670)

I, 1.

DE COMBINATIONUM MIRANDIS¹⁾.

[1668]²⁾

1	<i>a</i>	§ 1. Si scire velim quot sint combinationes 4 diverfarum notarum aut literarum <i>a b c d</i> , notum est multiplicandas tantum esse continuè
2	<i>ab</i> <i>ba</i>	numeros ab unitate ad quaternarium. Scilicet 1 in 2 facit 2, hoc in 3 facit 6, hoc in 4 facit 24, qui est numerus combinationum quæsitus.
6	<i>abc</i> <i>bac</i> <i>acb</i> <i>bca</i> <i>cab</i> <i>cba</i>	Ergo si scire velim quot sint combinationes centum mille notarum differentium, oportet multiplicare in se continue numeros omnes ab 1 ad 100000. quod infiniti laboris esset. Vel oporteret addere in unam summam omnes logarithmos numerorum 1 ad 100000, et summa illa esset logarithmus numeri combinationum quæsitus. Sed et hoc immensi laboris esset. Verum methodo mea invenio facili negotio summam istam logarithmorum esse majorem quam 456571,9800000, minorem autem proximè quam 456573,5000000 posito logarithmo denarij 1.0000000. adeo ut sit proxime 456572,0000000. Ergo cum characteristica hujus logarithmi sit 456572, sequitur numerum ipsi logarithmo convenientem habere characteres 456573. ac proinde numerus combinationum notarum 100000, tantus erit ut scribatur characteribus 456573. Ipse vero numerus, neque etiam primi characteres, hac methodo inveniri non possunt.
24 . . .		

Methodus autem inveniendi summam logarithmorum numerorum quotlibet ab unitate continuatorum est hæc. Fundamentum horum ex dimensione spatij a linea logarithmica et asymptoto ejus intercepti de qua in libro B.

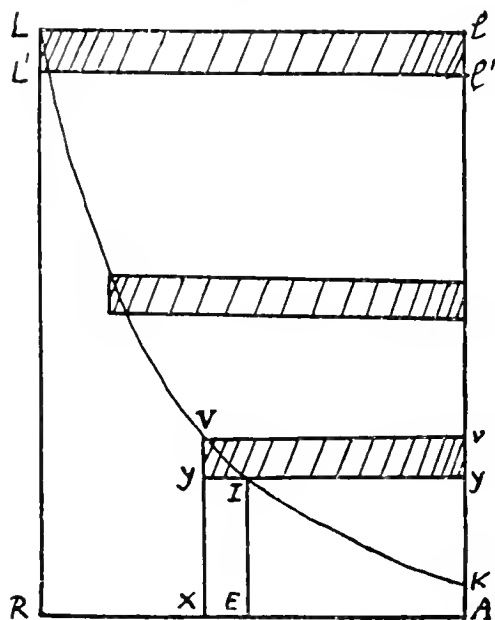
Voyez les p. 439—442 et 460—471 du T. XIV. Huygens venait en outre de traiter en octobre 1668 de la ligne logarithmique, et de l'espace correspondant, dans les p. 86—98 du Manuscrit D que nous avons publiées aux p. 102—119 du T. XIX; il s'y agissait de la courbe de jet d'un projectile lorsque la résistance est proportionnelle à la vitesse.

¹⁾ Manuscrit D, p. 108—110.

²⁾ On trouve les dates 28 Oct. 1668, 1669 et 1 Febr. 1669 respectivement aux p. 86, 118, et 145 du Manuscrit.

Ducatur numerus maximus datorum in suum logarithmum et à producto auferatur alterum hoc quod fit multiplicando numerum maximum unitate diminutum, in numerum 4342945³⁾, posito nempe denarii logarithmo 1.0000000⁴⁾. Residuum minus erit summa logarithmorum quæsitæ. Addito vero semissæ logarithmi numeri maximi, excedet dictam summam quæsitam.

[Fig. 63]



Soit KL, Fig. 63, la logarithmique (comparez la Fig. 1 de la p. 460 du T. XIV), $AK = 1$, $RL = n$ (numerus maximus), $AE = \log EI$, $AX = \log XV$, où nous supposons que XV surpasse EI de l'unité, donc $YV = AK = 1$. Log XV est par conséquent représenté par le rectangle VYyv et de même log RL par le rectangle LL'l'. La somme cherchée est donc égale à l'ensemble des rectangles couvrant tout l'espace limité par les droites LI, IK et la logarithmique, plus $n-1$ triangles tels que VYI. Or, „quod fit multiplicando numerum maximum, unitate diminutum, in numerum 4342945” est l'espace RLVIKAR, et en retranchant cet espace du rectangle RLIA on obtient l'espace LVIKIL⁵⁾ qui, comme le dit Huygens, est inférieur à la somme cherchée („terminus minor”).

Or, la somme des triangles tels que VYI ferait égale à $\frac{1}{2} RA$, si les „hypoténuses” de ces triangles étaient droites. Leur véritable somme est donc inférieure à $\frac{1}{2} RA$ et en ajoutant à l'espace LVIKIL cet $\frac{1}{2} AR$ („addito semissæ logarithmi numeri maximi”) on obtient, comme le dit Huygens, une grandeur

qui surpasse la somme cherchée („terminus major”). On voit que ce „terminus major” se rapproche beaucoup plus de la vraie valeur que le „terminus minor”.

³⁾ Voyez sur ce nombre la p. 441 du T. XIV.

⁴⁾ C.à.d. 10 millions; comparez la dernière ligne du texte de la p. 11 qui précède. Consultez aussi les p. 216 et 264. Ailleurs dans cette même Pièce Huygens prend apparemment le logarithme de 10 égal à 1.

⁵⁾ Cet espace peut s'écrire $\int_1^n l.x dx$, où l. désigne le logarithme népérien. On a $\int_1^n l.x dx = n l.n -$

$(n-1)$; or, pour passer aux logarithmes à base 10, il faut encore multiplier par $\log e$, ce qui donne $n \log n - (n-1) \log e$ (où $\log e = 4342945$), conformément à la valeur de l'espace LVIKIL déduite de la considération de la Fig. 63.

Auferendo autem 7 posteriores characteres habebitur characteristica dictæ summæ, ad quam characteristicam addita unitate, habebitur numerus characterum numeri facti continua multiplicatione omnium numerorum datorum.

Quod si series datorum numerorum non incipiat ab unitate sed ab alio quovis numero, ducatur numerus maximus in differentiam logarithmorum maximi et minimi. Rursus differentia numeri maximi et minimi ducatur in numerum 4342945, et hoc productum a primo producto auferatur, eritque residuum minus quam summa logarithmorum quæsita. Addito vero semisse differentie logarithmi maximi et minimi, fiet jam majus summa quæsita.

Ici Huygens s'est trompé. L'intégration $\int_{n_0}^n l.x dx$ (comparez la note 5), où n_0 désigne le „aliquis quivis numerus” ou „numerus minimus”, donne $n l.n - n_0 l.n_0 - n(n - n_0)$, ou, en passant aux logarithmes à base 10, $n \log n - n_0 \log n_0 - (n - n_0) \cdot 4342945$. Il aurait donc dû dire: „ducatur numerus maximus in logarithmum numeri maximi et ab hoc producto auferatur numerus minimus ductus in logarithmum numeri minimi auferatur item differentia numeri maximi et minimi ducta in numerum 4342945”, ce que la considération de la Fig. 63 confirme. Pour la même raison que plus haut on trouve ainsi, comme le dit Huygens, un „terminus minor” qui se change en un „terminus major” par l'addition, semblable à celle du cas précédent, qu'il indique.

§ 2. Videri posset versus hexametros pentametrosque innumeros esse qui compositi sint vel componi in posterum possint non deficiente tempore. Id vero contra habere hic ostendam.

Si decem tantum essent literarum elementa, vox duarum literarum centum modis formari posset, vocalibus ac consonantibus nullo discrimine habitis. quod hinc constat quum decem existentibus notis arithmetice, accersito etiam 0, centum sint numeri binis notis scribendi, ut 00, 01, 02 &c. 10, 11, 12 &c. Non enim plures sunt infra centenarium, nec pauciores etiam, cum quilibet numerus sit diversus.

Simili ratione vox trium literarum tunc mille differentias haberet: vox quatuor literarum decem millia differentiarum. atque ita porro. quæ etiam aliter facile demonstrari possunt.

Ita quoque cum sint elementa 22, ostendi potest vocem duarum literarum habere varietates 484 qui est quadratus ex 22. Vocem trium literarum varietates 10648 qui cubus est 22. Vocem 4 literarum varietates 234256 quod est quadratoquadratum 22. Ac denique etiam versusum 60 literarum habere varietates tot quot sunt unitates in potestate sexagesima numeri 22.

Logarithmus 22 est 1,3424227, qui sexagies sibi superadditus facit 80,5453620, cujus logarithmi characteristica cum sit 80, sequitur hinc potestatem sexagesimam numeri 22 habituram 81 characteres, eorumque primos patet fore 3510 &c. quia 0,545 est logarithmus 3510 &c. Itaque cum versusum nullus hexameter pentameterve pluribus quam 60 literis constet, nam vix inveniuntur qui 50 habeant, sequitur numerum 3510 ☉ majorem esse numero omnium versusum ejusmodi vel illis breviorum qui fieri unquam possint. Nam et breviores quam 60 literarum ita comprehendo, ut,

perfecto versu, informes reliquæ literæ relictæ credantur. Itaque in isto numero variationum omnes versus Virgilij, Ovidij, Horatij atque omnes omnium qui unquam facti sunt vel fieri possunt, scripti sint necesse est. Sed et multo minore numero continentur, cum varietates inutilis utilibus longe plures sint. Porro et Gallici, Belgici et omnium linguarum quæ 22 elementis ijsdem scribuntur aut scribi possunt versus omnes non ultra 60 literas habentes eodem numero continentur.

Quod si scire libeat quot diversa poemata vel etiam opera prosa oratione scribi possint totidem literis quot continet Virgilij Aeneis, dico et illum operum numerum infinitum nequaquam esse, sed facile numerum majorem assignari posse.

Sunt enim in Aeneide versus non plures quam 9450, unde literæ non plures quam 500000, positæ 50 literis et amplius in singulos versus, etsi tot rarissimè vel nunquam inveniantur. Illic igitur variationes erunt quot unitates in numero qui sit 500000^{ma} potestas numeri 22, quæ potestas scribitur 671212 characteribus, quorum primus 2, qui erit immanis numerus, sed respectu infiniti minimus.

Numerus iste characterum invenitur ut supra, sed hic logarithmus numeri 22, qui est 1,3424227 ducendus 500000^{es} et sit 671211,3500000; unde demtis 7 postremis notis relinquitur characteristica 671211, cui addita unitate sit 671212. Primus autem character erit 2, propter 35 post characteristicam.

Quæcunque igitur opera tot quot Aeneis Virgilij literis scribi possunt vel paucioribus, certo illo numero variationum continentur, etiam ijs computatis quæ tota ex litera *a*, *b* vel alia constarent, immensaque præterea multitudine nihil significantium. Omnia itaque naturæ et artis arcana quæ vel ipse Deus illo numero literarum vel minore perscribere posset eodem variationum numero comprehenduntur.

Ad inveniendum quoties literæ versus alicujus transponi possint, ut illius

Discite justitiam moniti et non temnere diuos⁶⁾, oportet videre primum quot literis constet, ut hic 39; quæ si omnes diversæ essent, videndum quis tunc futurus sit transpositionum numerus, per præcedentia, qui sit hic 47 characterum. Deinde videndum quoties quæque litera repetatur, ut hic inveniuntur

d i f c t e m n a o r u

2 8 3 1 6 5 3 4 1 3 1 2

His subscribantur numeri transpositionum quas haberent singulæ literarum summæ si non ijsdem sed diversis literis constarent:

2 39920 6 1 720 120 6 24 1 6 1 2

ita duarum variationes sunt 2, octo diversarum variationes 39920 ex præcedentibus. Et sic porro. Tum his infimis numeris omnibus in se ductis, per productum hoc dividatur numerus transpositionum primo inventus, et quotiens erit numerus transpositionum quæsitus. Hæc facile demonstrantur.

⁶⁾ Aeneis, lib. VI, vs. 620.

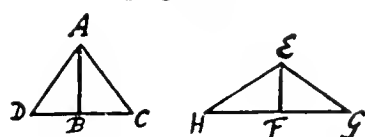
1, 2.

TROIS PROBLÈMES SUR LES TRIANGLES.

[1668 ou 1668 — 1669]

A¹⁾. Triangula duo reperire ifoscelia, æqualia et ifoperimetra, quorum latera singula et perpendiculares numeris²⁾ exprimantur. Hypotheses Mariotti.

Hypothesis laterum AC, CB, BA [Fig. 64]: $\frac{AC}{aa+bb}$, $\frac{BC}{aa-bb}$, ergo $\frac{AB}{2ab}$. Hypothesis laterum EG, GF, FE:



$$\begin{array}{l} \frac{EG}{aa+cc}, \frac{FG}{aa-cc}, \text{ ergo } \frac{EF}{2ac} \\ \frac{aa-bb}{aa-bb} \cdot \frac{aa-cc}{aa-cc} = \frac{2ac}{2ac} = \frac{2ab}{2ab} \\ \hline aab - aac \propto b^3 - c^3 \\ \hline aa \propto bb + bc + cc \end{array}$$

Il s'agit donc de trouver des valeurs convenables, c. à. d. des nombres entiers ou fractionnaires, pour a , b et c qui satisfassent à cette dernière équation. A cet effet Huygens pose

d'où

$$\begin{array}{l} bc + cc \propto dd - 2db \\ b \propto \frac{dd - cc}{c + 2d} \\ [\text{et } a^2 = (d - b)^2] \end{array}$$

Exemple: $c \propto 1$, $d \propto 2$, fit $b \propto \frac{2}{3}$, $a \propto \frac{7}{3}$.

B³⁾. Invenire triangulum ifosceles habens aream dato spatio æqualem et crura una cum basi æqualia lineæ datæ. ubi eadem æquatio invenietur atque cum crura demptâ basi datæ lineæ æqualia exigentur, quoniam calculus analiticus non tam attendit quid geometrice propositum sit, quam quid agat revera. Est enim hic calculus idem ac si proponatur datis rectis b et d invenire lineam x a cujus quadrato si auferatur quadratum differentiæ inter b et x residui radix ducta in dictam differentiam ipsarum b et x æquet rectangulum bd .

¹⁾ Manuscrit C. p. 262, juillet 1668.

²⁾ Ici il s'agit apparemment de nombres entiers ou fractionnaires, non pas de nombres sourds (voyez sur ces derniers „nombres” les p. 188 et 370 qui précèdent).

³⁾ Manuscrit D, p. 114, fin 1668.

Potest hic x major vel minor quam b sumi ut tamen ad eandem æquationem cubicam deveniatur, cujus tres erunt veræ radices quæ proposito satisfaciunt.

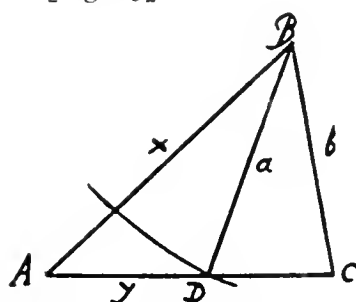
Robervallius negabat tertiam radicem utilem esse in hoc problemate.

Potest et sic proponi. Invenire triangulum isosceles quod habeat aream æqualem spatio dato, et cujus tria latera contingant circumferentiam circuli dati. ubi triangulum etiam sic ordinatum intelligi potest ut circulus sit extra triangulum, et contingat basin et latera ultra basin producta. Et sic rursus 3 radices veras habebit æquatio.

Ita radix aliqua inutilis aliquando est intentione nostra, sed utilis tamen natura.

C⁴⁾. In triangulo ABC [Fig. 65], dato latere BC $\propto b$, angulo opposito BAC, et recta BD quæ angulum bifariam secat $\propto a$, invenire triangulum.

[Fig. 65]



$$\frac{by}{x} \propto \frac{DC}{y}$$

$$\frac{\frac{byy}{x} + aa \propto bx}{}$$

Sit $aa \propto bd$ $y \propto \sqrt{xx - dx}$

Patet ex hac æquatione quod punctum D seu terminus lineæ AD $\propto y$, est ad hyperbolam quæ datam positionem habet ad rectam BA et punctum ejus B.

Idem vero D punctum est quoque ad circumferentiam centro B radio BD $\propto a$ descripta. Ergo dabitur punctum D ad intersectionem circumferentiæ hujus et hyperbolæ datæ. Asymptoti sese secant ad angulos rectos.

Constructio. Etc.

⁴⁾ Manuscrit D, p. 133, janvier ou février 1669.

APPENDICE.

SUR LA 15 PROPOSITION¹⁾.

[?]

L'hypoténuse²⁾ de tout triangle primitif est la somme de deux quarréz inegaux et premiers entre eux, dont l'un est la différence des mesmes quarréz.

S'il n'entend pas que ces deux quarréz soient des nombres entiers, s'il ne faut pas cela pour les propositions suivantes?

Il s'ensuit par la prop. 14³⁾ que cette hypoténuse sera composée de deux nombres entiers ou rompus, qui seront entre eux comme quarré a quarré. Mais nous ne savons pas encore s'ils seront entiers ou rompus. L'on peut donc soutenir qu'ils seront ou entiers ou rompus, jusqu'à ce qu'il soit prouvé qu'ils ne peuvent pas être rompus. Or comment prouvera-t-on qu'ils ne peuvent pas être rompus ou des fractions, puis qu'ils le peuvent bien être? Car posons le triangle primitif 3, 4, 5. Il y a deux fractions, sçavoir $\frac{1}{5}$ et $\frac{2}{5}$, qui sont entre elles comme quarré a quarré et qui composent ensemble l'hypoténuse. Il n'y a donc point d'impossibilité que l'hypoténuse d'un triangle primitif soit composé de deux fractions qui soient entre elles comme quarré a quarré. Et par conséquent la proposition n'est pas prouvée vraie en nombres entiers.

¹⁾ Chartæ mathematicæ, f. 3. La feuille n'est pas datée. C'est pour cette raison que nous l'avons placée comme Appendice.

Ce que Huygens appelle la „15 Proposition” est la Proposition XX du „Traité [posthume] des Triangles rectangles en Nombres” de Frenicle, publié en 1676 et 1677 (voyez la p. 215 du T. VIII) et qui parut aussi en 1729 dans les „Mémoires de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699”.

Il est possible que du vivant de Frenicle cette proposition ait été connue à ses collègues sous le nom de „15^{ième} proposition”.

²⁾ En marge: Hypoténuse et non pas hypothenuse comme il y a partout. Frenicle toutefois écrit partout correctement „hypoténuse” (ou parfois „hypoténuse”).

³⁾ Ici il semble s'agir réellement de la „Proposition XIV” du Traité de Frenicle, qui est la suivante: „Si on prend deux nombres quelconques premiers entre eux, dont l'un soit pair, & l'autre impair, le Triangle dont ils seront les générateurs sera primitif”. La „Démonstration” commence comme suit: „Soient A & B premiers entre eux, dont l'un soit pair, & l'autre impair; je dis que le Triangle rectangle qu'ils formeront, sçavoir $A^2 + B^2$, $A^2 - B^2$ & $2AB$, sera primitif”. Comparez la Pièce I 2, A qui précède.

Il faut, pour bien faire, démontrer primitivement que l'hypoténuse de tout triangle rectangle est composée de deux nombres entiers qui sont entre eux comme carré à carré, ou bien il le faut montrer seulement du triangle primitif.

Tout triangle primitif a pour hypoténuse et pour un des costez un nombre impair par la prop. . . . ⁴⁾, donc la somme de l'hypoténuse et du costé impair et aussi leur différence seront des nombres pairs, et les moitiés de cette somme et différence seront des nombres entiers, mais le produit de cette somme et différence est un carré, savoir le carré du costé pair, comme il est évident en mettant a pour l'hypoténuse, b pour le costé impair et c pour le costé pair. Donc la dite somme $a + b$ et différence $a - b$ sont entre elles comme carré à carré, et de même leur moitié, que nous avons montré être des nombres entiers. Mais ces deux moitiés composent l'hypoténuse, parce que $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ adjouté à $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ fait a l'hypoténuse, donc l'hypoténuse est composée de 2 nombres entiers qui sont entre eux comme carré à carré. De plus la différence de ces moitiés c'est à dire $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ moins $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, fait b le costé impair. donc &c.

Maintenant il est aisé de montrer que ces nombres entiers qui composent l'hypoténuse, sont des carrés premiers entre eux. parce que s'ils avoient une commune mesure, elle mesureroit aussi leur somme et leur différence qui sont l'hypoténuse et le costé impair, et ainsi le triangle ne seroit pas primitif, contre l'hypothèse.

⁴⁾ Il s'agit de la „Proposition XIX”: „En tout Triangle rectangle primitif, l'un des deux costez est pair, & l'autre impair, & l'hypoténuse est aussi un nombre impair”.

III.

A PARIS (JUILLET 1671 — JUILLET 1676)

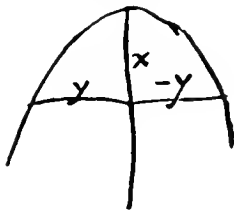
III, 1.

QUESTION DES SIGNES DANS LES EQUATIONS DE
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE¹⁾.

[1672]

Parabola $ax \propto yy$ [Fig. 66]. Si $+x$ fit $+y$ vel $-y$.

[Fig. 66]



Si $-x$ est impossible, nam y non potest habere
 $+$ nec $-$.

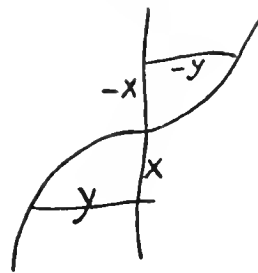
Parabola cubica $axx \propto y^3$

[Fig. 67].

Si $+x$ fit $+y$.

Si $-x$ fit necessario $-y$, ut fiat
 $-y^3$. Etc.

[Fig. 67]



Comparez la Pièce IV, 2 qui suit.

¹⁾ Manuscrit D, p. 308, avril 1672.

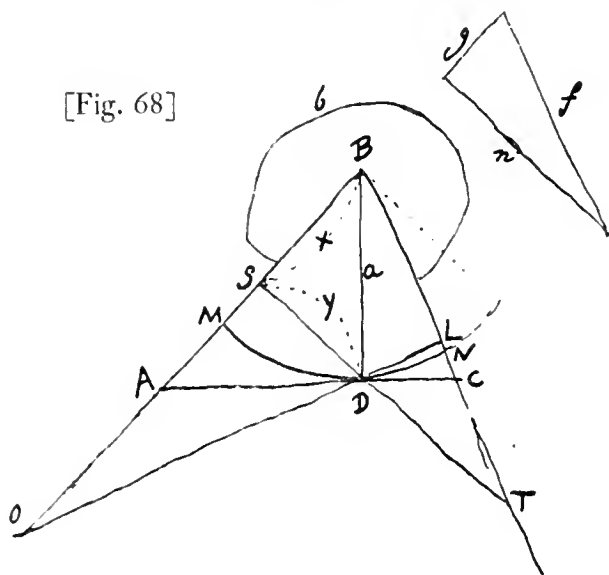
III, 2.

TROIS PROBLÈMES SUR LE TRIANGLE.

[1673—1674]

A^2). Propositum a d^o. de Maubuisson³). Data summa laterum duorum trianguli, angulo ab ijs comprehenso, et perpendiculari ab eodem angulo in basin, invenire triangulum.

[Fig. 68]



Sive dato sectore circuli [Fig. 68], aptare inter ipsius latera producta rectam quæ circumferentiam tangat et faciat summam abscissorum laterum æqualem lineæ datæ.

Ce probleme estoit desia resolu vers le commencement de celivre²), et trouvé plan⁴).

Summa laterum AB, BC trianguli ABC data sit $\propto b$. Perpendicularis BD $\propto a$. Et angulus ABC datus.

Ponatur inventum in arcu MDN punctum D per quod ducenda sit AC ut fiat triangulum quæsitum. Sit DS perpendicularis in BA, et BS $\propto x$. SD $\propto y$. Producat SD donec occurrat productæ BC in T. Sit etiam ODL perpendicularis in BC.

²) Manuscrit D, p. 420—425, août, septembre ou octobre 1673. Ces pages suivent celles (p. 418—419) où Huygens traite de la „Problematis Alhazeni analysis brevissima” (comparez le début de l’Appendice II à la p. 330 qui précède); ce sont surtout les solutions de ce problème qui le familiarisèrent avec les équations du deuxième degré représentant des hyperboles.

Il avait d’ailleurs déjà considéré le même problème vers la fin de 1668 (Manuscrit D, p. 113 et suiv.).

³) Voyez la p. 410 du T. VII où Huygens dit avoir visité M. de Maubuisson, qui ne nous est pas connu autrement, en janvier 1675.

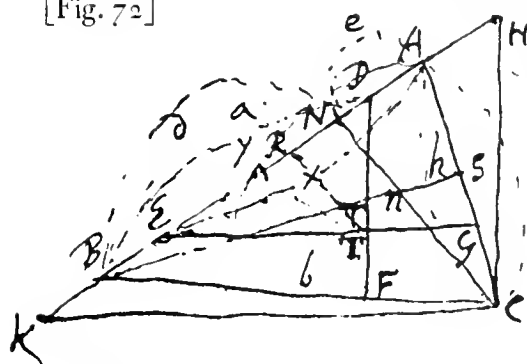
⁴) Voyez la note 6 de la p. 425 qui suit.

trum oppositarum sectionum. Asymptoti RY, IF. A puncto in hyperbola cui opposita NG (scilicet sumpta $MN \propto MA$) secabit circumf. radio AG descriptam in G. Eritque ducta AG quæ secat IF in B, alterum latus trianguli quæsitæ AB, alterum BG. Sumtisque AP \propto AB, et AC \propto BG, junctaque CP, erit ipsum triangulum CAP. Cum centrum circumf. sit in axe hyperbolæ constat hinc problema esse planum ⁶⁾).

$$\text{MO} \propto d, \text{AN} \propto 2a, \text{AG} \propto b, \Lambda\beta \propto x.$$

[illegible]

B7). Couper un triangle donné ABC [Fig. 72] en 4 parties égales par deux [Fig. 72] lignes qui se coupent à angles droits.



$$\text{BD} \quad \text{BA} \quad \frac{1}{2}\text{BC}$$

$$y \text{ --- } a \text{ --- } \frac{1}{2}b \left/ \frac{\frac{1}{2}ab}{y} \right. \text{BF}$$

$AB \propto a, BC \propto b, AC \propto h, BN \propto d,$
 $NA \propto e.$
 $AE \propto x, DB \propto y [CN = n. CN \perp$
 $AB. CK // GE. CH // FD.]$
 $AE \quad AB \quad \frac{1}{2}AC$
 $x \text{ — } a \text{ — } \frac{1}{2}h / \frac{1}{2} \frac{ha}{x} \quad AG$
 $AG \quad AE \quad AC$
 $\frac{1}{2} \frac{ha}{x} \text{ — } x \text{ — } h / \frac{2xx}{a} \quad AK$
 $BF \quad BD \quad BC$
 $\frac{1}{2} \frac{ab}{y} \text{ — } y \text{ — } b / \frac{2yy}{a} \quad BH$

⁶⁾ Ailleurs (*Chartæ mathematicæ*, f. 139, voyez sur cette feuille la note suivante) Huygens écrit de même: *Problema Pappi apparet hinc planum esse quod centrum circuli BE cadat in axem hyperbolæ OA.*

Voyez sur Pappus et les problèmes plans les p. 15—16, 213 et 240 du T. XI, 7, 82 et 107—108 du T. XII, et 421 du T. XIV.

7) *Chartæ mathematicæ*, f. 139 et Manuscrit D p. 427—433 et 435—436, août, septembre ou octobre 1673. La Fig. 72 est empruntée à la f. 139 nommée, qui doit avoir fait partie du Manuscrit D: les calculs de la p. 427 se rapportent à cette figure. Deux feuillets qui précédaient la

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2}a \text{ --- } AE \text{ ut } AG \text{ --- } AC \text{ ut } AE \text{ --- } AK & & \frac{\frac{2xx}{a} AK}{\frac{2yy + 2xx}{a}} \left. \vphantom{\frac{2xx}{a} AK} \right\} \text{ fubtr.} \\
\frac{\frac{2xx}{a} - a BK}{d BN} & & \frac{a}{a} \\
\frac{2xx - aa + ad}{a} KN & & \frac{2yy + 2xx - aa}{a} KH \\
\\
\frac{4x^4}{aa} - 4xx + aa \text{ qu. BK} & & \\
bb \text{ qu. BC} & & \\
\frac{4dxx}{a} - 2ad \text{ } 2 \square \text{ KBN} & & \\
\\
\sqrt{\frac{4x^4}{aa} - 4xx + \frac{4dxx}{a} + aa + bb - 2ad} \propto KC & & \\
\sqrt{\frac{4x^4}{aa} - 4xx + \frac{4dxx}{a} + hh} \propto KC \propto z & & \\
\frac{AK}{\frac{2xx}{a}} - z - \frac{KC}{x} - \frac{AE}{x} \left/ \frac{az}{2x} \right. EG & & \\
ED \quad EA \quad \frac{1}{2}EG \left/ \frac{az}{4x} \right. \frac{ET}{4x - 4a + 4y} & & \\
\frac{KH}{\frac{2yy + 2xx - aa}{a}} - z - x - a + y \left/ \frac{azx - a^2z + zya}{2yy + 2xx - aa} \right. ET \propto \frac{az}{4x - 4a + 4y} & & \\
\\
\frac{4axx - 4aax + 4axy - 4aax + 4a^3 - 4aay + 4axy - 4aay + 4aay}{2axx - 8aax + 8axy - 8aay + 2aay + 5a^3} \propto 0 & & \\
\\
xx \propto 4ax - 4xy + 4ay - yy - \frac{5}{2}aa & & \\
x \propto 2a - 2y + \sqrt{\frac{3}{2}aa - 4ay + 3yy} \text{ bon. ad hyperbolam.} & &
\end{array}$$

p. 427 du Manuscrit D ont été coupés. À la p. 427 Huygens écrit *inventum pag. præced.* à propos d'une certaine équation de la f. 139. Nous remarquons encore qu'on voit dans la f. 139 nommée le même filigrane que dans les feuillets 429—430 et 433—434 (et beaucoup d'autres feuillets) du Manuscrit D.

Hæc una æquatio. Jam inventio alterius sequitur considerando sectionem fieri ad angulos rectos.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{BF}{y} - \frac{BD}{1} \cdot y - \frac{BC}{a} \left/ \frac{2yy}{a} \right. \frac{BH}{BA} \end{array} \right\} s.$$

$$\frac{2yy - aa}{a} AH$$

$$\frac{4y^4 - 4aayy + a^4}{aa} \text{ qu. AH}$$

$$hh \text{ qu. AC}$$

$$\frac{4eyy - 2eaa}{a} 2 \square \text{ HAN}$$

$$\frac{4y^4}{aa} - 4yy + \frac{4eyy}{a} + aa + hh - 2ea \text{ qu. CH.}$$

$$\text{qu. CH} + \text{qu. CK (factum ad similitudinem qu. CH)} \propto \text{qu. HK}$$

$$\frac{4y^4}{aa} - 4yy + \frac{4eyy}{aa} + hh + \frac{4x^4}{aa} - 4xx + \frac{4dxx}{a} + bb \propto 4y^4 + 8yyxx -$$

$$4aayy + 4x^4 - 4aaxx + a^4$$

$$\frac{4eyy}{a} + \frac{4dxx}{a} + bb + hh \propto \frac{8yyxx}{aa} + aa$$

$$bb + hh - aa \propto 2hh - 2ae \quad \frac{2eyy}{a} + \frac{2dxx}{a} + hh - ae \propto \frac{4xxyy}{aa}$$

Videndum quæ natura curvæ hujus loci.

Pofant $x \propto y$, Huygens tire de fa première équation $x \propto 2a - 2y + \sqrt{\frac{3}{2}aa - 4ay + 3yy}$ la valeur $y \propto \frac{5}{8}a$. Substituant cette valeur de x et de y dans fa deuxième équation, où $e = d = \frac{1}{2}a$, il obtient

$$162hh + 162bb \propto 337aa.$$

Sit $h \propto b$ ad inveniendum quantitatem rectæ quæ ab angulo verticis ad mediam bafin ducitur.

$$bb \propto \frac{337}{324} aa$$

[Sit] $aa \propto 324$. Ergo $a \propto 18$. $bb \propto 337$

$$\frac{AB}{a} - \sqrt{\frac{NC}{bb - \frac{1}{4}aa}} - 18 \text{ ad } 16 \text{ five } 9 \text{ ad } 8.$$

Quand dans un triangle la raison de AB à NC qui est menée de l'angle opposé au point de bisection de la base AB est de 9 à 8, l'on aura les points D et E dont il faut mener les lignes cherchées DF, EG, en prenant AD et BE chacune $\frac{1}{2}$ de AB. Car en menant DF, EG en sorte qu'elles coupent chacune le triangle en 2 parties égales, elles se couperont à angles droits et diviseront le triangle en 4 parties égales. Ce cas a été remarqué par M. Maubuisson.

Nous observons (voyez sur ce sujet le dernier alinéa de la note 8) que les calculs de Huygens qui précèdent ne démontrent ce théorème plus général de Maubuisson que dans le cas où le triangle est isocèle. Avant de supposer $AC = BC$, Huygens avait déjà pris dans la Fig. 72 NC comme une perpendiculaire à la base AB et non pas comme la droite „menée de l'angle opposé au point de bisection de la base”⁸⁾.

$$\frac{2xx}{a} = e \quad KN$$

$$\frac{2yy}{a} = d \quad HN$$

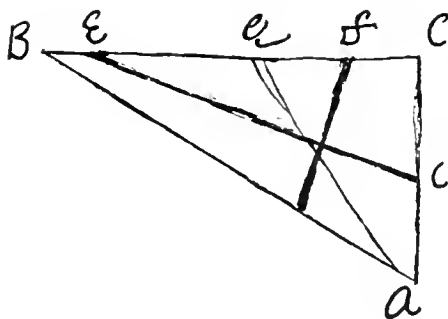
$$\frac{4xxyy}{aa} = \frac{2e yy}{a} = \frac{2d xx}{a} + ed \propto mn$$

$$xxyy = \frac{1}{2}aeyy = \frac{1}{2}adxx + \frac{1}{4}aade \propto \frac{1}{4}aann$$

$$\frac{1}{2}an \propto \sqrt{xx - \frac{1}{2}ae} \sqrt{yy - \frac{1}{2}ad}. \text{ Hinc descriptio curvæ.}$$

⁸⁾ Une feuille séparée qui se trouve dans le Manuscrit D contient encore la figure 74 et quelques équations qui ne sont pas de la main de Huygens, non plus que les lettres de la figure. Est-ce la main de Maubuisson? Cela semble probable.

[Fig. 74]



Une de ces équations (à laquelle satisfait $x = \frac{5}{8}a$ lorsque $y = x$) $xx \parallel 8ay + 8ax - 4yx - 10aa - yy$ (où \parallel désigne l'égalité des deux membres) correspond à la première équation de Huygens $xx \propto 4ax - 4xy + 4ay - yy - \frac{5}{2}aa$, lorsqu'on y change a en $2a$. On trouve en effet sur la feuille les indications $BF \parallel x$, $CE \parallel y$, $BC \parallel 2a$ [Fig. 74], tandis que chez Huygens [Fig. 72] le côté BA qui correspond à BC de la Fig. 74 était égal à a .

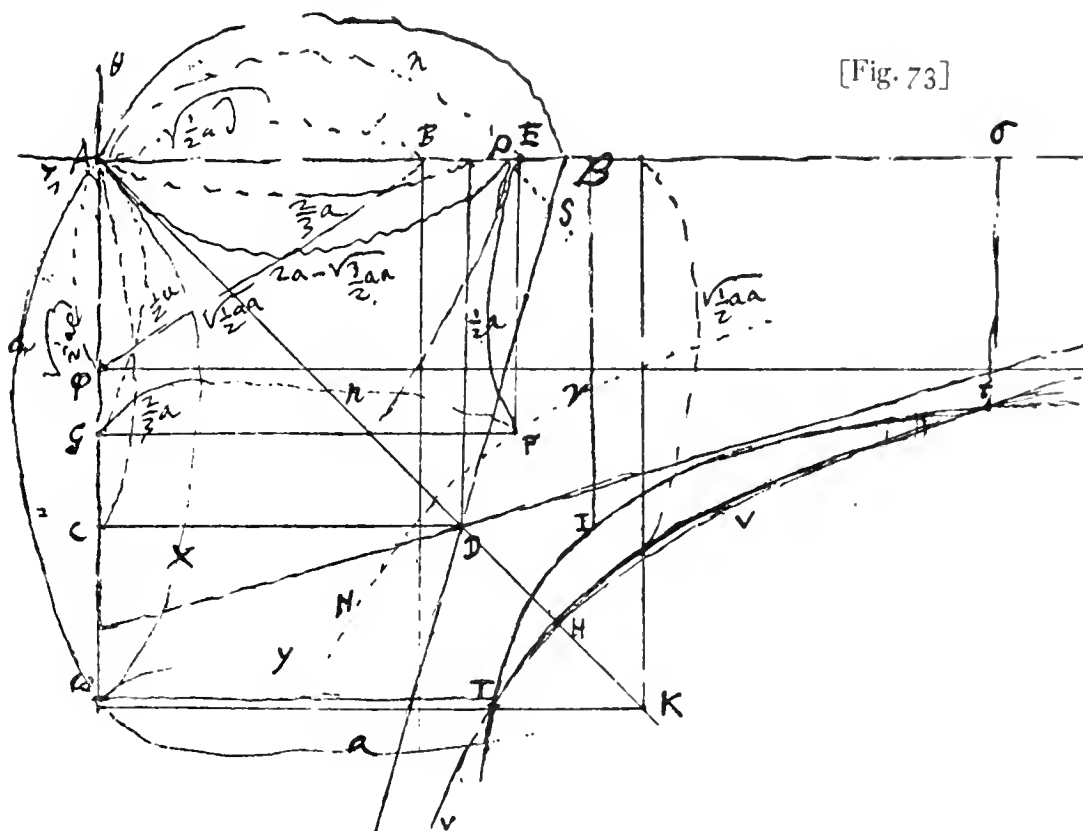
Huygens y a ajouté ce qui suit: BC bifariam in Q. Ratio BC in QA ut 9 ad 8. Sumantur BF et CE mediae proportionales inter

BQ et BQ + QA. fiunt singulae BE, FC $\propto \frac{1}{2}$ BC.

Nous ignorons si Huygens a remarqué qu'on peut passer du cas considéré par lui au cas plus général considéré par Maubuisson en projetant son triangle isocèle sur un plan quelconque

C'est une autre forme de la deuxième équation trouvée plus haut: Huygens observe: Nota quod
 $mn - ed \propto \frac{bb + hh - aa}{2}$ five qu. NC — □ BNA $\propto \frac{\text{qu. AC} + \text{CB} - \text{qu. AB}}{2}$.

Ex prima æquatione concursus linearum x et y super rectis AB, AC [Fig. 73] perpendiculariter ductarum est ad hyperbolam VHV quæ eadem manet manente basi trianguli AB [Fig. 72 et Fig. 73]⁹⁾. Ex altera vero æquatione concursus ejus punc-



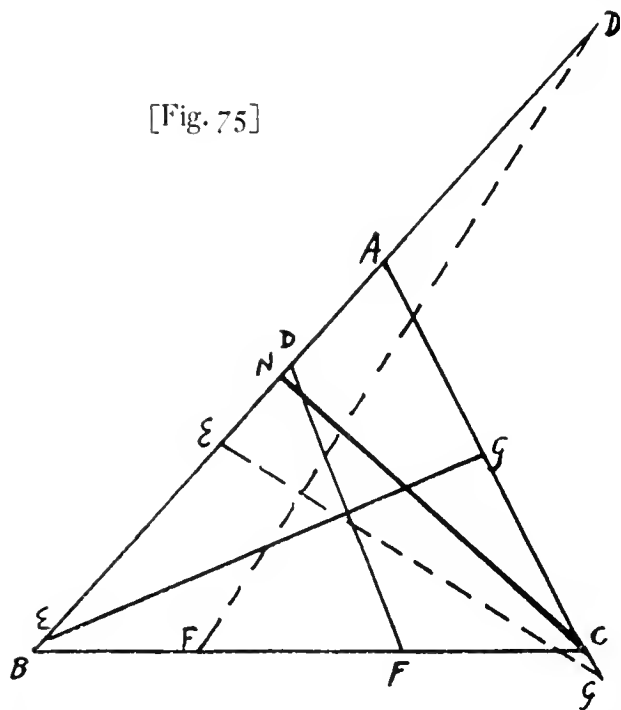
parallèle à l'une des deux sécantes orthogonales entr'elles considérées qui divisent le triangle isocèle en quatre parties égales. En effet le rapport entre la base et la médiane correspondante, qui était de 9 à 8, reste le même après la projection puisque ces deux lignes font l'une et l'autre dans le triangle isocèle des angles de 45° avec les sécantes. Il résulte de cette démonstration, ce qui n'est pas de toute évidence dans la Fig. 74, que dans le cas considéré par Maubuisson les sécantes orthogonales se coupent toujours sur la médiane et sont toujours parallèles aux bissectrices des angles Q.

⁹⁾ Puisque cette première équation, celle de l'hyperbole, ne contient d'autre paramètre que a .

tum est ad curvam TI, quæ describitur ope hyperbolæ FN cujus rectangulum habet latera $\frac{1}{2}a$ et n . Nam sumpta $A\omega \propto x$ ad arbitrium, auferatur à qu^o $A\omega$ qu. $A\phi \propto \frac{1}{2}ae$ et residui radici sit æqualis $A\beta$, et applicetur $\beta\gamma$ ad hyperbolam FN. Et addatur qu^o $\beta\gamma$ qu. $AB \propto \frac{1}{2}ad$, summæ radix erit $\omega T \propto y$. Ita enim \square sub $A\beta \propto \sqrt{xx - \frac{1}{2}ae}$ et sub $\beta\gamma \propto \sqrt{yy - \frac{1}{2}ad}$ erit æquale $\frac{1}{2}an$ sive AF .

Jam interseccio igitur hyperbolæ HV et curvæ TI indicabit $y \propto T\omega$, et $x \propto \omega A$. Debet autem interseccio cadere intra quadratum AK cujus latera $\propto a$ basi dati trianguli, quia nec x nec y possunt excedere ipsam basin, quod si extra cadat, indicio est sectionis puncta utraque non cadere in illam basin, sed in alterum e lateribus. Dans la Fig. 75 p.e. le point D tombe sur le prolongement de la base BA et le point G sur le prolongement du côté AC pour l'une des deux manières de diviser le triangle ABC en quatre parties égales par les droites perpendiculaires entr'elles DF et EG.

[Fig. 75]

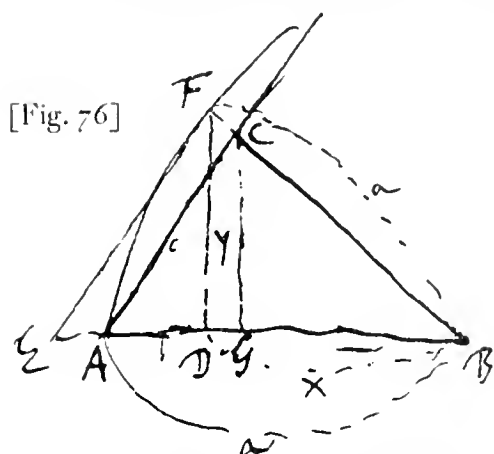


Ob æquationem $xyxy \propto \frac{1}{2}adxx + \frac{1}{2}aeyy - \frac{1}{4}aade + \frac{1}{4}aamm$ videtur curva ex quatuor lineis constare quarum hic una descripta est, reliquæ similes huic in angulis $BA\theta$, $CA\zeta$, θAB sint describendæ. Potest enim eadem existere æquatio sive sumantur $+x$ et $+y$, sive $-x$ et $-y$, sive $+x$ et $-y$, sive $-x$ et $+y$. Sed tres reliquæ hic inutiles videntur quia in altera æquatione ad hyperbolam non possunt mutari signa affectio nis x nec y , ut maneat eadem æquatio. Ergo hic ea tantum interseccio

utilis quæ cadit intra quadrantem AK, (cadit autem nonnunquam utraque) et quæ extra ut hic t , ita solvit problema ut satisfiat postulatis quæ in analysi consideravimus, nempe ut [Fig. 72] \square sub EA, AG sit $\propto \frac{1}{2}$ \square sub BA, AC, et \square EDT $\propto \frac{1}{2}$ \square BDF et anguli ad T recti.

C¹⁰). Data base trianguli AB $\propto a$ [Fig. 76] angulo ad basin BAC et rectangulo a lateribus ACB, invenire triangulum.

CG perpend. AB. Ratio CG ad GA et ad CA data est, sit CG ad GA ut a ad b , et CG ad CA ut a ad c .



[Fig. 76]

$$\text{ut CG ad GA} \quad \text{FD} \\ a \quad b \quad y \left| \frac{by}{a} \text{ DE} \right.$$

$$\text{ut CG ad CA} \quad \text{FD} \\ a \quad c \quad y \left| \frac{cy}{a} \text{ EF} \right. \\ x + \frac{by}{a} \text{ EB} \quad \left. \frac{a}{cy} \text{ FB} \right\} \text{ m.} \\ \frac{cy}{a} \square \text{ EFB}$$

$$\text{qu. EB} \quad \square \text{ EFB} \quad \text{qu. AB} \quad \square \text{ ACB datum } cp$$

$$xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} \quad cy \quad aa \quad cp$$

$$pxx + \frac{2pbxy}{a} + \frac{pbbyy}{aa} \propto aay$$

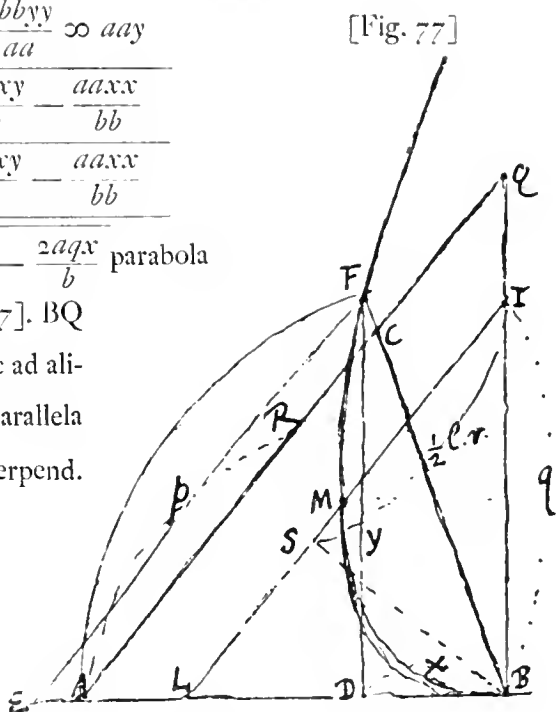
$$\text{Sit } \frac{a^4}{pbb} \propto 2q$$

$$yy \propto \frac{a^4y}{pbb} - \frac{2axy}{b} - \frac{aaxx}{bb}$$

$$yy \propto 2qy - \frac{2axy}{b} - \frac{aaxx}{bb}$$

$$y \propto q - \frac{ax}{b} \quad \sqrt{qq - \frac{2aqx}{b}} \text{ parabola}$$

Constructio. Angulus datus BAQ [Fig. 77]. BQ perpend. AB. Ut AR, p ad BQ, $\frac{aa}{b}$ ita hæc ad aliam $\frac{a^4}{pbb} \propto 2q$ cujus dimidium BI $\propto q$. IL parallela AC, IM $\propto \frac{1}{2}$ IL. M est vertex parabolæ. BS perpend. IL. IS $\propto \frac{aq}{c}$, $\frac{1}{2}$ latus rectum. Diameter parabolæ MI. F intersecctio parabolæ et circumferentiæ centro B radio BA descriptæ. BF recta secans AQ in C. Triangulum quæsitum est ACB. Parabola transit per punctum B.



[Fig. 77]

¹⁰) Manuscrit E, p. 14—15, datant probablement de la fin de 1674 (la p. 26 porte la date du 19 Dec. 1674).

III, 4¹).

UN PROBLÈME SUR LE QUADRILATÈRE, AVEC EXTENSION DU
THÉORÈME TROUVÉ EN CETTE OCCASION SUR LE QUADRI-
LATÈRE INSCRIT DANS UNE CIRCONFÉRENCE DE CERCLE,
À UN POLYGONE INSCRIT QUELCONQUE.

[1675]

*Ex datis quatuor lateribus trapezij et area invenire trapezium. Oportet autem
et ordinem quo junguntur datum effe.*

Ad solutionem opus habemus theoremate noto ²) quo ex tribus lateribus trianguli
investigatur area. Nempe si latera sint b, c, z oportet ducere in se ista quatuor $\frac{z+b+c}{2}$,
 $\frac{z-b+c}{2}$, $\frac{z-c+b}{2}$, $\frac{b+c-z}{2}$, productum erit æquale quadrato areae trianguli.
Sit $b+c \propto s$, $b-c \propto t$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Erit } \frac{z+b+c}{2} \propto \frac{s+z}{2} \\ \frac{b+c-z}{2} \propto \frac{s-z}{2} \end{array} \right\} m. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{z-b+c}{2} \propto \frac{z-t}{2} \\ \frac{z-c+b}{2} \propto \frac{z+t}{2} \end{array} \right\}$$

$$\frac{ss-zz}{4} \qquad \frac{zz-tt}{4}$$

$$\frac{ss-zz}{4} \qquad \frac{ss-zz}{4}$$

$$\text{quadr. areae } \triangle \frac{sszz - sstt - z^4 + z^2tt}{16}$$

¹) Manuscrit E, p. 44–50, juillet, août ou septembre 1675 (voyez sur cette date la note 1 de la p. 441 qui suit), et Chartæ mathematicæ, f. 91–93. Après la p. 50 du Manuscrit E six feuillets ont été coupés. Les trois ou quatre premiers sont évidemment les f. 91–93 des Chartæ mathematicæ (l'une des feuilles est composée de deux feuillets collés l'un sur l'autre): on trouve sur leurs premières pages les n^{os} 3, 4, 5 de la main de Huygens, tandis que les p. 49 et 50 du Manuscrit E portent les n^{os} 1 et 2. Nous publions le texte des Chartæ mathematicæ; voyez sur celui du Manuscrit E la note 13 de la p. 437 et la fin de la p. 440.

Il s'agit ici d'un problème déjà posé et résolu en 1661 par G. Schott: voyez la p. 435 de notre T. III. Cette pièce n'avait pas été envoyée directement à Huygens, puisque la lettre de Schott (T. III, no 938) n'était pas adressée à Huygens mais à Vegelin van Claerbergen (voyez,

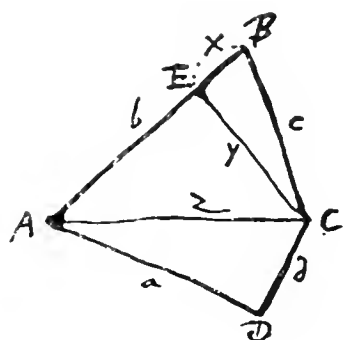
Sed quia habetur $sszz + ttzz$ estque $ss + tt \propto 2bb + 2cc$ ut facile apparet, erit quadr. areae trianguli $\frac{2bbzz + 2cczz - sstt - z^4}{16}$ vel si $bb + cc$ dicatur oo , et st five

$bb - cc$ dicatur gg , Erit quadr. areae triang. $\frac{2oozz - g^4 - z^4}{16}$.

adeo ut regula etiam hoc modo possit enunciari. Summa quadratorum duorum laterum ducatur in quadratum lateris reliqui, et à producti duplo auferatur quadratum differentiae quadratorum duorum priorum laterum, una cum quadratoquadrato lateris reliqui. Residui pars decimasexta erit æqualis quadrato areae trianguli.

Sit jam trapezium cujus latera $AB \propto b$; $BC \propto c$, $AD \propto a$, $DC \propto d$. Area trapezij $\propto ee$ [Fig. 79].

[Fig. 79]



Ducta CE perpend. in AB fit $BE \propto x$, $EC \propto y$ ut punctum C terminus lateris BC , si potest, ad locum redigatur; cujus interfectio cum circumferentia centro B radio BC descripta dabit determinationem puncti C ; adeoque constructionem problematis.

Sit $bb + cc \propto oo$; $bb - cc \propto gg$; $aa + dd \propto hh$; $aa - dd \propto ff$. Et ducatur diagonus $AC \propto z$. Erit

igitur area triang. $ADC \sqrt{\frac{2oozz - g^4 - z^4}{16}}$ ³⁾

ex regula præmissa. addatur area $\triangle ABC \propto \frac{1}{2}by$,

area trapez. $\frac{1}{2}by + \sqrt{\frac{2oozz - g^4 - z^4}{16}}$ ³⁾ $\propto ee$.

æquatio pag. præc. $\frac{1}{2}by + \sqrt{\frac{2hhzz - f^4 - z^4}{16}} \propto ee$ ⁴⁾

$\frac{2hhzz - f^4 - z^4}{16} \propto e^4 - eeby + \frac{1}{4}bbby$ sed $yy \propto cc - xx$

$\frac{2hhzz - f^4 - z^4}{16} \propto e^4 - eeby + \frac{1}{4}bbcc - \frac{1}{4}bbxx$

Atqui $zz \propto bb + cc - 2bx$ ex Euclide. Sive $zz \propto oo - 2bx$ quia $bb + cc \propto oo$.

à la p. 582 du T. IV, les Additions et Corrections au T. III). Ce dernier doit l'avoir envoyée à Huygens avec la lettre. Les p. 732—738 du T. X font voir que Huygens était en correspondance avec Vegelin van Clarbergen quoique les lettres échangées ne se trouvent pas dans la collection-Huygens de Leiden. En 1676 Huygens ne fait aucune allusion à la solution de Schott, mais il mentionne celle de Roemer (440 qui suit).

Le mot „trapezium” a le sens général de quadrilatère quelconque.

²⁾ Comparez les p. 69—71 du T. XII.

³⁾ Lisez: $\sqrt{\frac{2hhzz - f^4 - z^4}{16}}$.

$$\text{Ergo } \frac{2hhoo - 4hhbx - f^2 - o^4 + 4oobx - 4bbxx}{16} \propto e^4 - eeby + \frac{1}{4}bbcc - \frac{1}{4}bbxx$$

$$\frac{4oobx - 4hhbx + 2hhoo - f^2 - o^4}{16} \propto e^4 - eeby + \frac{1}{4}bbcc$$

$$\frac{4hhbx - 4oobx - 2hhoo + 4bbcc + 16e^4 + f^2 + o^4}{16eeb} \propto 16eeby$$

$$\frac{hh - oo}{4ee} x + \frac{4bbcc + f^2 - 2hhoo + o^4}{16eeb} + \frac{ee}{b} \propto y \propto \sqrt{cc - xx} \text{ unde aequatio}$$

quadrata fieret si quaeratur x .

$$\text{vel } \frac{hhx - oox}{4ee} + \frac{8bbcc + f^2 - 2hhoo + g^4}{16eeb} + \frac{ee}{b} \propto y \text{ quia nempe } o^4 + 4bbcc \propto$$

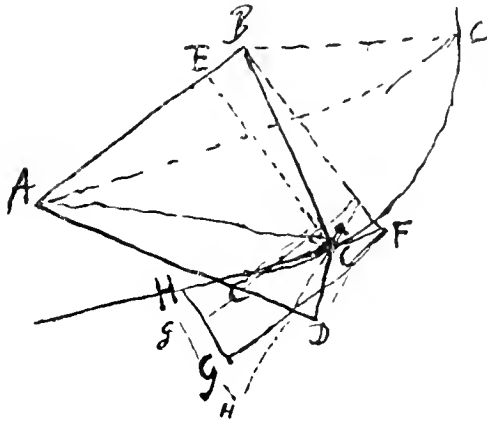
$$g^4 + 8bbcc \text{ five } o^4 \propto g^4 + 4bbcc.$$

Est ergo locus puncti C linea recta. Eritque Constructio problematis hujusmodi.

Sit BF [Fig. 80] perpend. ad AB. ipsaque BF aequalis sumatur

[Fig. 80]

$$- \frac{hhoo^5}{16eeb} + \frac{8bbcc + g^4 + f^2}{16eeb} + \frac{ee}{b}$$



ductaque FG parall. BA et in eandem partem quo tendit BA, sit FG ad ipsi perpendicularem GH, ut $4ee$ ad $hh - oo$, sumptâ GH in consequentia punctorum BF si hh majus quam oo , at in partem contrariam si hh minus quam oo ⁶⁾. deinde ducatur FH eamque secet circumf.^a radio BC $\propto c$, descripta centro B. Intersectio definit locum puncti C, unde constructio reliqua manifesta est.

NB. debet BF sumi in partem contrariam si in quantitibus ipsam BF denotantibus praevalent signata per —.

Hic jam nunc patet⁷⁾ quod cum circulus CC tangit FH, hoc est cum area maxima, tunc EC ad EB, ut FG ad GH, hoc est ut $4ee$ ad $hh - oo$.

⁴⁾ Il s'agit de l'équation précédente à laquelle Huygens donne maintenant la forme exacte. Dès lors Huygens procède à l'élimination de la variable z .

⁵⁾ Lisez $2hhoo$.

⁶⁾ C'est le cas de la Fig. 80; mais cette figure montre encore les traces d'une construction antérieure où GH avait la direction de BF. Cela explique le troisième point C à droite de B qui n'appartient pas à la construction présente.

⁷⁾ Cette remarque fut ajoutée plus tard.

Cum autem circumferentia fecet rectam FH in duobus punctis, duplicem solutionem habebit problema, sed sciendum non semper duobus modis construi posse trapezium ex summa duorum triangulorum ABC, ADC constans, quod dato spatio æquale sit, sed nonnunquam alterum ex summa alterum ex differentia horum triangulorum constitui; quod inde fit quia in prima æquatione, ubi $\frac{1}{2}by + \sqrt{2hzz - f^2 - z^4} \propto ee$, non referat utrum radix habeat signum + an —, hoc est an summa an differentia triangulorum æquetur areae datae ee; quia ducendo in se — vel + $\sqrt{2hzz - f^2 - z^4} \propto ee - \frac{1}{2}by$, semper iidem plane termini orientur.

Est autem limitatio hæc, quod si area data major sit quam triangulum ex lateribus AB, BC, et reliquis AD, DC in unam rectam extentis effectum⁸⁾, tunc dupliciter construi poterit trapezium ex summa triangulorum⁹⁾. Si vero minor dicto triangulo sit area data, tunc vel nullum vel unum tantummodo hujusmodi trapezium ex summa construi poterit, eritque alterum ipsi æquale ex differentia triangulorum ABC, ADC. Aliquando¹⁰⁾ nullum nec ex differentia construi poterit.

Quod si circumferentia tangat rectam FH, ducta BC ad punctum contactus, efficitur trapezium omnium quæ fieri possunt maximum.

Ad inveniendam autem determinationem areae maximæ quæ datis quatuor lateribus comprehendi possit, repetatur æquatio ultimo reperta, sed brevitatis gratia scribatur,

$$A \quad \frac{-r^3x + s^4 + e^4}{eeb} \propto y \propto \sqrt{cc - xx}; \text{ ponendo nempe } \frac{4hbb - 4oob}{16ee} \propto -\frac{r^3}{ee}$$

$$\text{five } \frac{hbb - oob}{4} \propto -r^3; \text{ et } \frac{-2hhoo + g^4 + 8bbcc + f^4}{16} \propto s^4.$$

⁸⁾ Huygens suppose donc $AB + BC > AD + DC$, ce qui est permis, excepté dans le cas, qu'il n'est pas nécessaire de considérer, où $AB = DC$ et $AD = BC$. De plus lorsque les segments a, b, c, d sont choisis de manière qu'ils peuvent constituer les côtés d'un quadrilatère on aura (supposant $AB > BC$) $AB - BC < AC < AD + DC$. La construction du triangle en question est donc toujours possible.

⁹⁾ Commençant par sa valeur maximale, lorsque le quadrilatère devient inscriptible au cercle, on peut diminuer graduellement l'aire donnée. Évidemment les deux quadrilatères seront alors au début égaux à la somme des triangles ABC, ADC et la transition aux autres cas ne peut arriver qu'à l'instant où l'aire de l'un de ces triangles s'annule. Toutefois cela peut toujours arriver de deux manières différentes, savoir celle envisagée par Huygens, où AC devient égale à la somme de AD et DC et, en outre, dans le cas où la différence de AB et BC est plus petite que la différence de AD et DC, celle où AC devient égale à la différence de AD et DC, ou, dans le cas contraire, celle où AC est égale à la différence de AB et BC, auxquels cas c'est l'aire du triangle ABC qui s'annule. Or, il dépend de la grandeur relative des triangles qui restent laquelle de ces manières se présentera la première. Si c'est celle de Huygens sa conclusion est juste; si c'est l'autre, elle doit être modifiée.

¹⁰⁾ Cette phrase fut ajoutée plus tard.

quadrando utrinque fiet

B $(r^6 + e^4bb)xx - (2r^3s^4 + 2r^3e^4)x + s^8 + 2s^4e^4 + e^8 - ccbbe^4 \propto 0$
per Reg. Hudd. ¹¹⁾ $\frac{2}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{0}{0}$

$$2r^6xx + 2e^4bbxx - 2r^3s^4x - 2r^3e^4x \propto 0$$

$x \propto \frac{r^3s^4 + r^3e^4}{r^6 + e^4bb}$ Restituatur valor x in æquatione A.

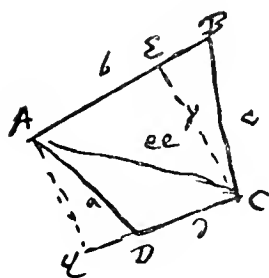
$$\frac{bees^4 + be^6}{r^6 + e^4bb} \propto y$$

Cur ¹²⁾ non possumus hinc invenire quod x jam $\propto \frac{bbc + c^3 - caa - cdd}{2ad + 2bc}$? ut
revera est, æquè ac cum circulo inscribitur trapezium ut inventum est pagina 2 ¹³⁾.

NB. ¹⁴⁾ esse hic x ad y sicut r^3 ad bee hoc est ut $\frac{oo - hh}{4}$ ad ee . Hoc ostendendum
esset ita quoque se habere cum trapezium est in circulo. tunc enim regula inde existeret, quæ fol. sequ. in fine habetur, ad inveniendam aream trapezij in circulo.

Si valor x restituatur in æquatione B, habebitur area ee maxima determinata per latera trapezij data, sed fiet æquatio in qua e^{12} , e^8 , e^4 . quæ non facile divisibilis cognoscetur etsi revera sit divisibilis. Et licet jam reducta ponatur, nondum constabit an trapezium omnium maximum sit illud quod in circulo inscribatur. Quod hac via itaque inquirere institui.

[Fig. 81]



Si trapezium ABCD [Fig. 81] est in circulo; positus
nominibus laterum ut supra, et area ee , ductaque perpend.¹
 $CE \propto y$: si porro ducatur perpend. AQ in latus productum
CD, erit $AQ \propto \frac{ay}{c}$ quia triang.^a CBE, ADQ sunt similia,
ut facile apparet.

itaque additis triang.^a ABC $\frac{1}{2}by$

$$ADC \frac{1}{2}\frac{ady}{c}$$

$$\text{erit summa } \frac{1}{2}by + \frac{1}{2}\frac{ady}{c} \propto ee$$

¹¹⁾ Il s'agit d'une application de la méthode de Hudde exposée dans son „Epistola secunda de maximis et minimis” qui fut publiée par van Schooten p. 507—515 de l'édition de 1659 de la „Geometria” de Descartes. Elle est basée sur la considération que pour la valeur maximale de e l'équation en x aura des racines égales. Comparez la Pièce II qui précède (p. 223 et suiv.).

¹²⁾ Cette phrase fut ajoutée plus tard.

¹³⁾ C'est la p. 50 du Manuscrit E (comparez la note 1 de la p. 433). Le raisonnement de Huygens, appliqué à la Fig. 81, revient à ce qui suit. On a $QD = \frac{a}{c}$. $BE = \frac{ax}{c}$, et ensuite $AC^2 = b^2 + c^2$

— $2bx = a^2 + d^2 + \frac{2ad}{c}x$; équation qui conduit à l'expression désirée.

Ergo cum trapezium est in circulo fit $y \propto \frac{2cee}{ad+bc}$, non tamen cum hæc æqualia trapezium est in circulo, quia non consideravi basim communem esse AC.

Cum vero trapezium est maximum fit $y \propto \frac{bees^4 + be^6}{r^6 + bbe^4}$.

Sit igitur oportet $\frac{2cee}{ad+bc} \propto \frac{bees^4 + be^6}{r^6 + bbe^4}$, unde $e^4 \propto \frac{adbs^4 + bbcs^4 - 2cr^6}{bbc - bad}$.

Quod si jam hæc æquatio sit regula ad inveniendam aream trapezij circulo inscripti; concludam inde idem trapezium circulo inscriptum esse maximum. Si enim, cum trapezium est in circulo, fit $e^4 \propto adbs^4$ &c. hoc est, $\frac{2cee}{ad+bc} \propto \frac{bees^4 + be^6}{r^6 + bbe^4}$; est autem,

cum trapezium in circulo, $\frac{2cee}{ad+bc} \propto y$. Ergo, cum trapezium in circulo, erit et

$\frac{bees^4 + be^6}{r^6 + bbe^4} \propto y$; hoc autem cum fit, efficitur trapezium maximum. Ergo, cum trapezium in circulo, fiet trapezium maximum. Restat itaque examinandum an æquatio ultimo inventa contineat regulam ad inveniendam aream trapezij in circulo. Quod quidem ita se habere comperi. Nam restituto primum valore r^3 et s^4 , secundum ea quibus æqualia posita fuere, ac deinde restituto etiam valore hh , oo , ff et gg , invenitur divisionem fieri posse per $bc - ad$, et fit

$$e^4 \propto \frac{-a^4 - d^4 - c^4 - b^4 + 2bbcc + 2aadd + 2aacc + 2bbdd + 2ccdd + 8adbc}{16} \quad 15).$$

Et rursus abbreviando

$$16e^4 \propto 2hhoo - f^4 - g^4 + 8adbc \quad 16).$$

Sed quia $f^4 \propto h^4 - 4aadd$ et $g^4 \propto o^4 - 4bbcc$, ut facile colligitur quia $bb + cc \propto oo$; $bb - cc \propto gg$; $aa + dd \propto hh$; $aa - dd \propto ff$, fit $16e^4 \propto 2hhoo - h^4 - o^4 + 4aadd + 4bbcc + 8adbc$.

$16e^4 \propto -\text{qu. } hh - oo + \text{qu. } 2ad + 2bc$. Convenit ¹⁷⁾ cum Regula qua invenitur area trapezij in Circulo. quæ regula reperitur pag. versa ¹⁸⁾.

$16e^4 \propto -\text{qu. } aa + dd - bb - cc + \text{qu. } 2ad + 2bc$, ut autem habeatur differentia quadratorum ab his radicibus, multiplicetur summa radicum in ipsarum differentiam, hoc est $aa + 2ad + dd - bb + 2bc - cc$ in $bb + 2bc + cc - aa + 2ad - dd \propto 16e^4$.

¹⁴⁾ Cet alinéa a été ajouté plus tard.

¹⁵⁾ Ajoutez au numérateur: $+2aabb$. Nous avons vérifié ce résultat.

¹⁶⁾ Cette réduction implique l'addition indiquée dans la note précédente.

¹⁷⁾ Cette phrase fut ajoutée plus tard.

¹⁸⁾ Voir la page suivante.

Quum igitur hæc regula fit ad inveniendam aream trapezij circulo inscripti, eadem regula erit ad inveniendam aream maximi trapezij ex quatuor datis lateribus. Nempe

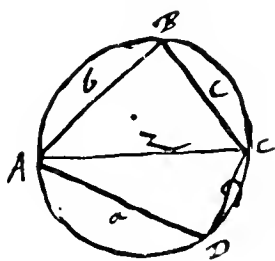
A quadrato summæ quorumlibet duorum laterum auferatur quadratum differentiæ duorum laterum reliquorum; et vicissim a quadrato summæ horum auferatur quadratum differentiæ illorum. duo residua in se ducta dabunt quadratum areæ trapezij maximi sexdecuplum.

Vel addantur omnia trapezij latera; à summæ dimidio auferantur latera singula; residua quatuor in se ducantur, erit producti radix qu. æqualis areæ trapezij ¹⁹⁾.

Hinc facile demonstratur polygonum quodvis, inæqualium licet laterum, circulo inscriptum maximum esse omnium quod ex iisdem lateribus eodem vel alio quocunque ²⁰⁾ ordine connexis confici possit ²¹⁾.

Trapezij circulo inscripti aream invenire.

[Fig. 82]



$\triangle ABC$ [Fig. 82] secundum Regulam inventam superius

ubi de hac quæstione $\propto \frac{1}{4} \sqrt{200zz - g^4 - z^4}$ ²²⁾.

$bc[ad] ad[ut] \triangle ABC$ ad $\triangle ADC$.

$zz \propto \frac{oad + hhbc}{ad + bc}$ secundum regulam inventu facillimam ²³⁾.

¹⁹⁾ Cette règle aujourd'hui si bien connue avait été donnée par Snellius sans démonstration sous la forme: „Si de dimidio collectorum laterum dati quadranguli in circulum inscripti latera sigillatim subducantur, latus continue à quatuor differentiis facti erit area”; voir la p. 139 de l'ouvrage: „Ludolphi à Ceulen De circulo & adscriptis liber. In quo plurimorum polygonorum latera per irrationalium numerorum griphos, quorum libet autem per numeros absolutos secundum Algebricorum æquationum leges explicantur. Quæ insuper accesserunt pagina versa indicabit. Omnia é vernaculo Latina fecit, & annotationibus illustravit Willebrordus Snellius R. F. Lugd. Batav. Apud Iodocum Colster Anno 1619”.

On a découvert plus tard que la même règle avait déjà été formulée par le mathématicien hindou Brahmagupta qui vivait au septième siècle.

²⁰⁾ Ces trois mots furent ajoutés plus tard.

²¹⁾ Si nous considérons un quadrilatère qui a pour sommets quatre sommets consécutifs A, B, C, D du polygone, son aire doit être maximum, afin qu'il en soit ainsi de l'aire du polygone. Le cercle qui passe par A, B, C doit donc passer par D; donc aussi par E, etc.

²²⁾ Voir la p. 434.

²³⁾ La règle se déduit en effet facilement des relations mentionnées dans la note 13 de la p. 437.

$$[\triangle ABC] \propto \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2o^4ad + 2oohhbc}{ad+bc} - g^4 - \frac{o^4aadd + 2oohhadbc + h^4bbcc}{aadd + 2adbc + bbcc}}$$

$$\frac{ad \sqrt{\cdot} + bc \sqrt{\cdot}}{bc} \propto 4 \text{ trapez. } ABCD, \text{ five } 4ee, \text{ si area trapezij vocetur } ee.$$

($\sqrt{\cdot}$ significat hic illam radicem quæ est valor trianguli ABC) ²⁴⁾).

$$\text{qu. } \frac{ad+bc}{bbcc} \text{ in } \sqrt{\cdot} \sqrt{\cdot} \propto 16e^4$$

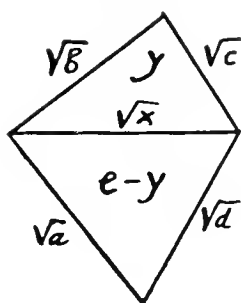
$$16e^4 \propto \frac{2o^4abcd - aaddg^4 + o^4aadd - 2adbcg^4}{bbcc} + 2oohh - g^4 - h^4$$

$$\text{sed } g^4 \propto o^4 - 4bbcc; 16e^4 \propto 4aadd + 8adbc + 4bbcc - o^4 + 2oohh - h^4$$

$$16e^4 \propto \text{qu. } \frac{ad+bc}{2ad+2bc} - \text{qu. } \frac{oo-hh}{oo-hh}. \text{ Eadem atque illa paginæ præcedentis }^{25}).$$

La méthode dont Huygens se sert dans la solution de ce problème est désignée par lui, à la p. 47 du Manuscrit E, par les mots *Methodus nostra*. La p. 46 donnait la *Methodus Romeri*. Les côtés étant \sqrt{a} , \sqrt{b} , \sqrt{c} , \sqrt{d} , l'aire e et la diagonale cherchée \sqrt{x} [Fig. 83], Roemer écrit :

[Fig. 83]



$$\sqrt{b} - \sqrt{c} \propto \sqrt{g} \quad \sqrt{a} - \sqrt{d} \propto \sqrt{n} \quad hg - mn \propto rr$$

$$\sqrt{b} + \sqrt{c} \propto \sqrt{h} \quad \sqrt{a} + \sqrt{d} \propto \sqrt{m} \quad hg + mn \propto ss$$

$$b - c \propto \sqrt{hg}$$

$$2b + 2c \propto h + g$$

$$2bx + 2cx - hg - xx \propto 16yy$$

$$\text{subtr. } \frac{2ax + 2dx - mn - xx \propto 16ee - 32ey + 16yy}{2bx - 2ax - hg} \propto 32ey - 16ee$$

$$\frac{2cx - 2dx + mn}{2px - rr + 16ee} \propto 4y$$

$$\frac{2px - rr + 16ee}{8e} \propto 4y$$

$$b + c - a - d \propto p$$

$$b + c + a + d \propto q \quad 2b + 2c \propto p + q$$

$$\frac{4ppxx - 4prrx - 64peex + r^4 + 32rree + 256e^4}{64ee} \propto 2ax + 2dx - mn - xx$$

$$4ppxx - 4prrx + r^4 + 256e^4 \propto 64eeqx - 32eess - 64eexx$$

$$xx + \frac{-4prrx - 64eeqx + r^4 + 256e^4 + 32eess}{4pp + 64ee} \propto 0$$

Voyez aussi aux p. 80—81 du T. VIII une solution de A. Monforte, reçue par Huygens en 1678.

²⁴⁾ Lisez: $4\triangle ABC$.

²⁵⁾ Voir la p. 438.

III, 5¹⁾.

LES „QUANTITEZ IMAGINAIRES”.

[1675]

$$xx + 4x + 10 \left\{ \begin{array}{l} x + 2 - \sqrt{-6} \\ x + 2 + \sqrt{-6} \end{array} \right. \text{ Etc.}$$

On trouve à la p. 58 du Manuscrit E la date 8 Dec. 1675. Quant à la p. 53¹⁾ elle contient aussi le sommaire de la lettre du 30 septembre de Huygens à Leibniz. Nous avons publié ce sommaire, traitant e.a. des quantitez imaginaires, ainsi que la lettre, aux p. 504 et suiv. du T. VII, où l'on voit qu'on a cru devoir dater cette lettre du 30 septembre 1675. Huygens dit dans la lettre avoir été fort longtemps hors d'exercice pour ce qui regarde [les] Equations Algebriques [considérées]. Il ne se sent apparemment pas porté à poursuivre sérieusement l'étude des quantités imaginaires, ce qui ressort aussi plus ou moins de la plaisanterie sur les racines des équations algébriques en général par laquelle se termine le sommaire.

¹⁾ Manuscrit E, p. 53. On pourrait douter (comparez la note 1 de la p. 496 du T. XVIII) si cette page est de 1675 ou bien de 1676, mais pour la raison donnée dans le texte nous adoptons la date de septembre 1675.

IV.

À LA HAYE (JUILLET 1676 — JUIN 1678)

IV, 1.

QUESTIONS SE RAPPORTANT AU TRAITÉ
„VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK”.

Voyez les Pièces d'août 1676 etc. aux p. 151 et suiv. du T. XIV.

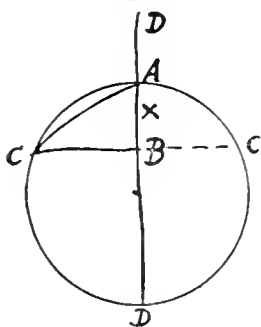
IV, 2.

QUESTION DES SIGNES DANS LES ÉQUATIONS DE
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

[1676 ou 1677]

Ponantur rectæ AB, BC angulum rectum constituere. Sitque indefinite $AB \propto x$ [Fig. 84], $BC \propto y$ et a linea data. Aequatio autem curvæ AC naturam exprimens²⁾

[Fig. 84]



$ax - xx \propto yy$ five $xx - ax + yy \propto 0$.

Hic five ponatur $+y$ five $-y$, eadem tamen fit æquatio, unde sequitur curvam AC ejus esse naturæ ut $BC \propto y$ ad utramvis partem rectæ AB sumi possit. Estque fane circuli circumferentia cujus diameter a , ut facile apparet.

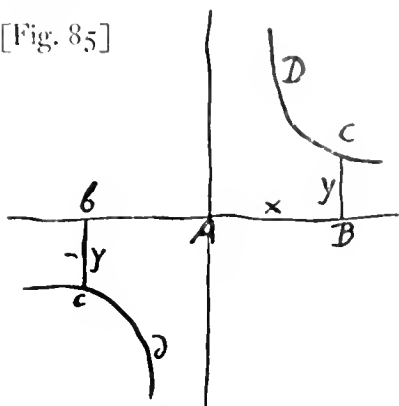
Non potest autem sumi x in contrariam quoque partem nempe versus D, quia si statuatur $-x$, non poterit fieri eadem priori æquatione sed erit $xx + ax + yy \propto 0$. Nam in priori cum haberetur $-ax$, essetque $+x$ necesse est fuisse $-a$. quare posito $-x$ ductoque in $-a$ (nam hoc non mutatur) fit $+ax$.

¹⁾ Manuscrit E, p. 97—98.

²⁾ Quelques années plus tard Huygens parlera simplement de l'„æquatio parabola” (l. 10 de la p. 408 qui précède). En 1691 il se sert couramment de l'expression „equation d'une courbe”; voyez la suite du Tome (p. 506 et suiv.).

Sit item æquatio $xy \propto aa$ quæ hyperbolæ ad asymptotos relationem ostendit [Fig. 85]. Illic potest etiam $-x$ poni sed tunc et $-y$ ponendum, ut fiat utriusque multiplicatione $+xy$. Itaque sumto x in contrariam partem ab A , etiam y five bc in contrariam partem a recta AB sumenda est, tuncque punctum cest ad sectionem oppositam, ut vocant, ipsi CD .

[Fig. 85]



Patetque æquatione proposita designari curvam ex duabus CD , ad constantem, non vero pluribus. adeo ut sectiones conjugatæ non faciant partem ejus.

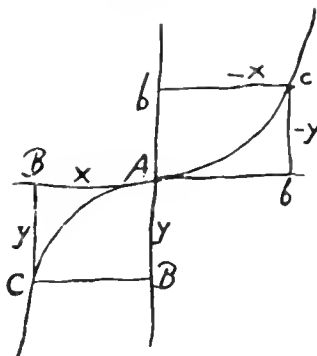
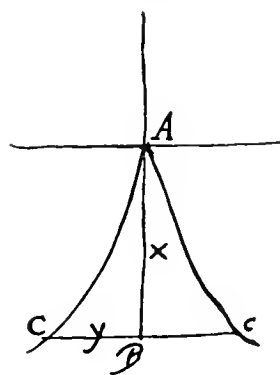
Sit rursus æquatio $x^3 \propto aay$ [Fig. 86]. Illic manente $+x$ debet etiam manere $+y$. at posito $-x$ debet quoque poni $-y$ ut fiat $-x^3 \propto$

[Fig. 86]

$-aay$, nam hæc eadem æquatio est ac $+x^3 \propto aay$. Unde hæc curva erit CAC , quæ axem non habebit. Vocatur autem parabola cubica vel Paraboloides.

Quod si fit æquatio $x^3 \propto aay$ [Fig. 87]. Illic manente $+x$ potest esse $+y$ vel $-y$ ut eadem maneat æquatio sed non potest unquam sumi $-x$ five statuatur $+y$ five $-y$. Unde hæc curva habebit formam CAC , angulo acutissimo ad A inflexam.

[Fig. 87]



V.

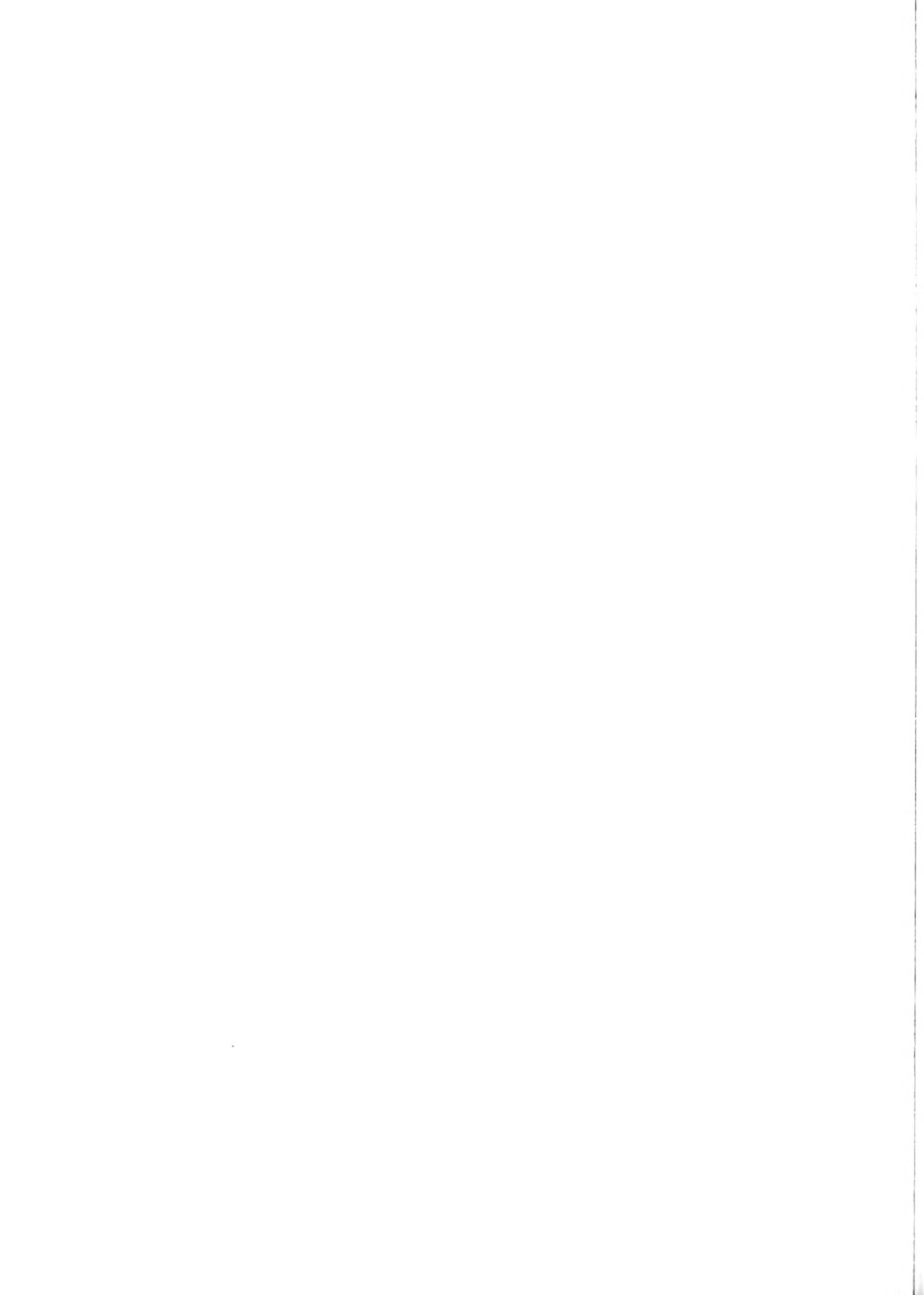
À PARIS (JUILLET 1678 — AOÛT 1681).

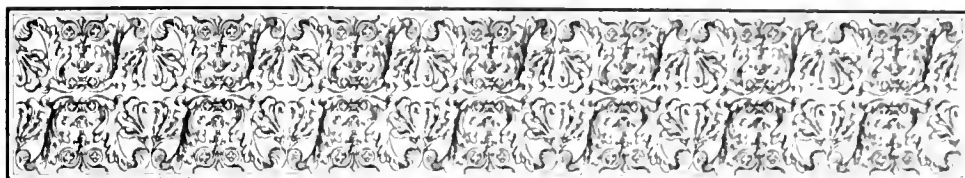
QUESTION SE RAPPORTANT AU TRAITÉ
„VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK”.

Voyez la Pièce de 1679 aux p. 164 et suiv. du T. XIV.



MATHEMATICA VARIA 1681--1695.





Avertissement.

Des dix Pièces qui suivent la plupart se rapportent à des questions de géométrie ; c'est ce que le lecteur eût assurément deviné d'avance. Une Pièce (II) traite de trigonométrie, une (IV) de géométrie analytique (équation d'une courbe), trois (I, VI, X) de rayons de courbures, trois aussi (V, VII, IX) d'intégration, plus précisément du calcul de la grandeur de certaines surfaces ou de certains corps obtenus par la révolution de lignes ou de surfaces. Une seule (III), publiée dans le T. XIV, se rapporte au calcul des chances (comparez les *Mathematica varia* 1666 — 1681), une autre (VIII) à celui des logarithmes en partant de la considération de l'hyperbole équilatère et en faisant usage d'une certaine série trouvée par Huygens et publiée par lui en 1690 dans le „Discours de la cause de la pesanteur”¹⁾.

On a remarqué dans les *Math. varia* 1666 — 1681 les problèmes assez nombreux sur le triangle, sujet cher à tant de mathématiciens anciens et modernes ; Huygens s'y servait d'équations en x et y de sorte qu'il s'agissait, peut-on dire, de géométrie analytique. Quant aux formules trigonométriques, la présente Pièce II fait voir que Huygens aimait à trouver lui-même leurs démonstrations plutôt que de les chercher ailleurs. Le catalogue de vente de 1695 de ses livres ne mentionne pas la „*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*” de 1614 de Neper²⁾ dans le Livre II de laquelle³⁾ l'auteur considère e.a. longuement le cas où „sunt . . . tria latera [trianguli sphaerici] data, & quaruntur anguli”. Huygens trouvait apparemment les énoncés des différents

¹⁾ Voyez le Tome suivant.

²⁾ Comparez la note 4 de la p. 459.

³⁾ Chap. VI.

théorèmes dans les *petites tables*, celles in octavo, de Vlacq⁴⁾). Or tant dans l'édition latine que dans les deux éditions néerlandaises que nous citons Vlacq dit en latin ou en flamand: "Qui demonstrationes hujus videre cupiunt — mais c'est ce que Huygens ne désirait pas — eas inveniet in Trigonometria Britannicâ Henrici Briggsii".

Dans la Pièce de géométrie analytique (IV) datant de 1690 Huygens considère une des ovales de Descartes⁵⁾. Nous rappelons qu'au commencement de cette année il avait publié le „Traité de la Lumière”⁶⁾ dans le Chap. VI duquel il est également question de ces ovales⁷⁾.

Tout ce qui se rapporte à des développées et des rayons de courbure (Pièces I, VI, X) se rattache évidemment à la Troisième Partie de l'„Horologium oscillatorium” de 1673⁸⁾.

Des recherches sur les surfaces et corps de révolution (Pièces V, VII, IX) nous ne mentionnons ici que la dernière, où il est question tant de la cissoïde que de la cycloïde, ce qui donne lieu à Huygens de rappeler les „profondes speculations” de Pascal et de Wallis⁹⁾.

La Pièce sur le calcul des logarithmes se rattache à un endroit des „Principia” de 1687 de Newton, ainsi qu'à la quadrature de l'hyperbole par Mercator et Wallis, comme le font voir les notes des p. 471—472 ou plutôt les pages des T. IX et X auxquelles ces notes renvoient le lecteur.

Nous terminons cet Avertissement en disant un mot du développement du cosinus en une série, sujet dont il est question dans la Pièce I. Dans la note 6 de la p. 392 qui précède on trouve la série de Newton

$$A = z - \frac{z^3}{4 \times 672} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 1207^4} - \text{etc.}$$

⁴⁾ Voyez les notes 3 et 5 de la p. 456.

⁵⁾ Livre second de „La Géométrie” de 1637.

⁶⁾ Suivi du „Discours de la cause de la pesanteur” mentionné plus haut.

⁷⁾ T. XIX, p. 524 et suiv. (Fig. 216 à la p. 525). Voyez aussi la Pièce VI de 1678 à la p. 424 du même Tome.

⁸⁾ T. XVIII, p. 188—241.

⁹⁾ Note 5 de la p. 475.

ou, en divisant par $2r$ et en posant $\frac{1}{2}z = s$,

$$\frac{\sin s}{r} = \frac{s}{r} - \frac{1}{3!} \left(\frac{s}{r}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{s}{r}\right)^5, \text{ ce qui est le dévelop-}$$

pement de ce que nous appelons le sinus (sin s dans la formule est une ligne, non pas un rapport) en fonction de l'angle correspondant ($s = \text{arc}$, $r = \text{rayon}$). Wallis cite également, ce que nous n'avons pas reproduit dans la note, le développement du sinus versus suivant Newton, savoir

$$\text{sinus versus} = \frac{z^2}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \text{etc.}$$

Or, en retranchant le sinus versus du rayon, on obtient le cofinus (c.à.d. le cosinus linéaire, analogue au sinus linéaire mentionné plus haut); en divisant par r il en résulte le développement de ce que nous appelons aujourd'hui le cosinus:

$$\frac{\cos z}{r} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{r}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{z}{r}\right)^4 - \frac{1}{6!} \left(\frac{z}{r}\right)^6 + \text{etc.}$$

C'est depuis l'apparition de l'Algèbre de 1685 de Wallis que Huygens a connu ce développement en série du cosinus. Il ne connaissait d'ailleurs pas la preuve des formules de Newton, et il ne paraît pas s'en être jamais servi. En 1683 il ne les connaissait certainement pas encore. On a vu plus haut ¹⁰⁾ que la série de l'arc tangente de J. Gregory lui était même inconnue au moins jusqu'à 1689. Il ne semble pas étonnant qu'après sa dispute avec Gregory ¹¹⁾ on n'ait pas éprouvé en Angleterre le besoin, supposé qu'on l'eût éprouvé sinon, de lui faire connaître au plus tôt les nouvelles découvertes. Mais pour la considération théorique du „pendulum cylindricum trichordon” (1683), dont traite la Pièce I ¹²⁾, il n'avait que faire de développements en série.

¹⁰⁾ P. 375.

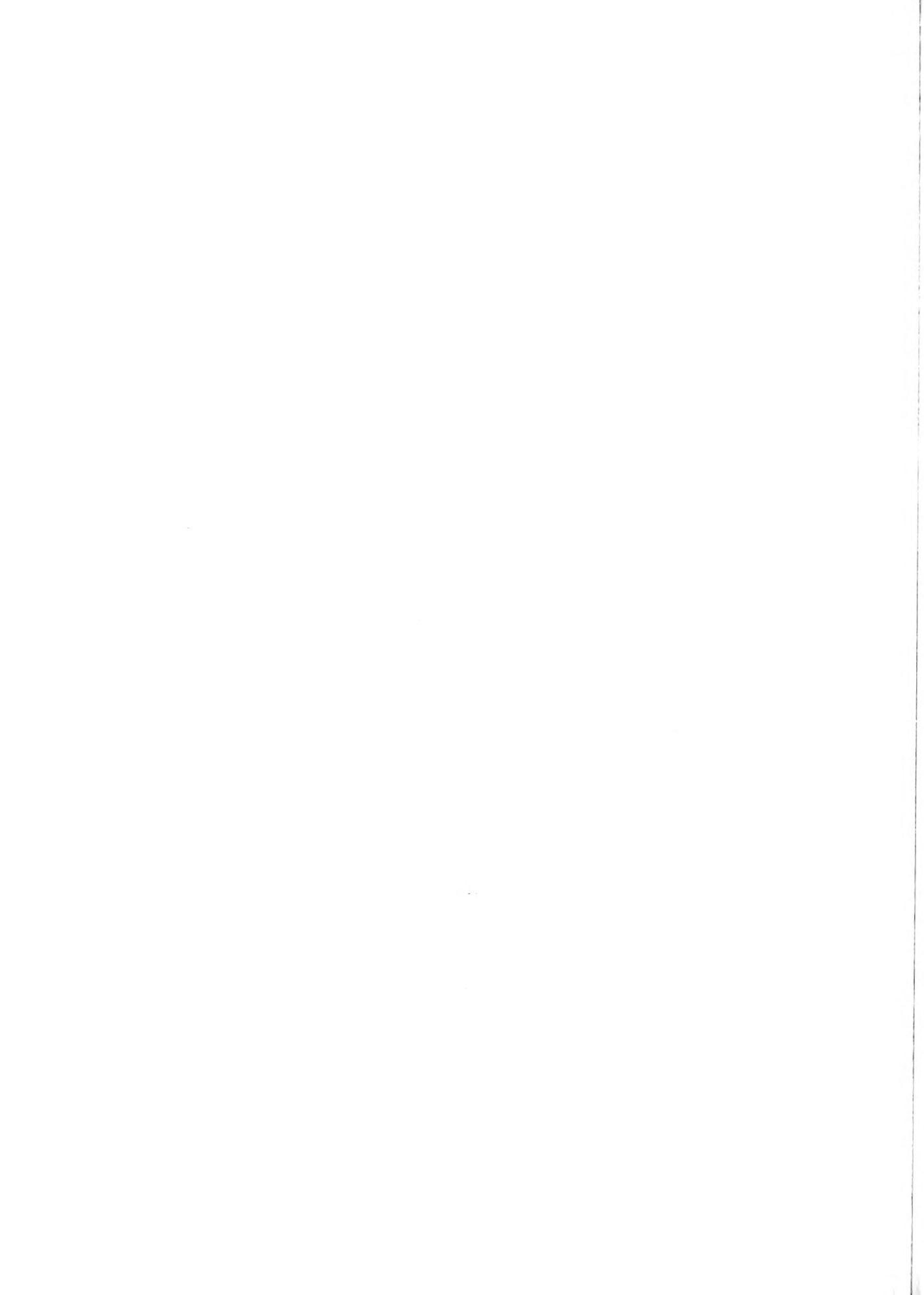
¹¹⁾ P. 259 et 303—327 du présent Tome.

¹²⁾ Le lecteur qui s'intéresse spécialement au „pendulum cylindricum trichordon” trouvera dans les Additions et Corrections à la fin du présent Tome, une correction à apporter à une note du T. XVIII.

MATHEMATICA VARIA 1681 — 1695.

- I. A PROPOS DU „PENDULUM CYLINDRICUM TRICHORDON” (SINUSOÏDE ET PARABOLE, COURBES OSCULATRICES) (1683).
 - II. DÉMONSTRATION DE THÉORÈMES TRIGONOMÉTRIQUES (1687, 1680).
 - III. QUESTION SE RAPPORTANT AU TRAITÉ „VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK” (1688).
 - IV. EXAMEN CURVÆ LINEÆ QUAM CARTESIUS REGULÆ ET FILI DUCTU DESCRIBERE DOCET, AN SIT EADEM ATQUE OVALIUM IPSIUS PRIMA¹⁾ (1690).
 - V. SURFACE OBTENUE PAR LA RÉVOLUTION DE LA PARABOLE AUTOUR D'UNE TANGENTE AU SOMMET (1691).
 - VI. DÉVELOPPÉE DU „FOLIUM CARTESII” (1691).
 - VII. SOLIDE DE RÉVOLUTION OBTENU PAR LA ROTATION DE LA CYCLOÏDE AUTOUR DE SON AXE (1691).
 - VIII. CALCUL DE LOGARITHMES EN PARTANT DE LA CONSIDÉRATION DE L'HYPÉRBOLE ÉQUILATÈRE (1691).
 - IX. CYCLOÏDE ET CISSOÏDE; SOLIDES DE RÉVOLUTION ET CENTRES DE GRAVITÉ (1691 OU 1692).
 - X. CALCUL DU RAYON MINIMAL DE LA COURBE LOGARITHMIQUE (1692).
-

¹⁾ Titre donné par Huygens lui-même à cette Pièce.



MATHEMATICA VARIA 1681—1695.

I.

A PROPOS DU „PENDULUM CYLINDRICUM TRICHORDON” (SINUSOÏDE ET PARABOLE, COURBES OSCULATRICES).

[1683]

En considérant dans le T. XVIII les calculs de Huygens qui se rapportent au „pendulum cylindricum trichordon” nous avons renvoyé le lecteur (p. 530, première note et note 2) à „un des Tomes suivants” pour les deux questions que voici:

1. Comment Huygens a-t-il pu dire que la „curva $bgzq$ [sinusoïde ou „compagne de la roulette”, Fig. 25 de la p. 528] est æqualis curvæ dimidiæ Ellipsis ahb posita eh potentiâ dupla ad radium ae ”?

2. Comment a-t-il calculé que la distance verticale PG entre un certain point P de la courbe BPL [Fig. 23 de la p. 527] qui devient une parabole lorsqu'on déroule sur un plan le cylindre sur lequel elle se trouve, et le point correspondant G de la courbe BGO qui par cette évolution devient une sinussoïde, est inférieure à $\frac{1}{1000}$ AB, c. à. d. à $\frac{1}{1000}$ du diamètre du cylindre?

1. La réponse à la première question est bien simple. Il n'est nullement besoin de considérer, comme nous le faisons dans la note 2 de la p. 530, la méthode de Pascal pour réduire „la dimension des lignes de toutes sortes de roulettes... à des lignes elliptiques”. Il suffit de se rappeler ce que nous disions à la p. 511 de l'Avertissement: que Huygens savait qu'on obtient la „linea sinuum” non seulement, comme dans la Pièce sur le „pendulum cyl. trichordon”, par l'évolution sur un plan de la „ligne cyclo-cylindrique”, mais aussi „par le développement sur un plan de la section elliptique obtenue en coupant un cylindre par un plan incliné à 45° ”¹⁾. Or, dans cette section elliptique — voyez ce que Huygens dit plus haut sur la „potentiâ dupla” — le grand axe est égal au produit du petit axe par $\sqrt{2}$.

2. Dans nos notes du T. XVIII nous nous sommes servis du développement du cosinus en une série. En 1683 la série du cosinus — voyez l'Avertissement — était sans doute connue, grâce à Newton, à un nombre restreint de personnes, mais Huygens ne faisait pas partie de ce cercle. C'est donc, pensons-nous, par un calcul direct²⁾, qu'il a trouvé la fraction $\frac{1}{1000}$ en question. Ce ne fut qu'en 1685 ou 1686³⁾ qu'il apprit à connaître par l'Algèbre de Wallis quelques séries de Newton d'ailleurs dépourvues de démonstrations.

Une remarque analogue s'applique au cas du § 3 des p. 530 et suiv.; sans doute c'est par une

¹⁾ Comparez la p. 337 du T. X, déjà citée dans la note 5 de la p. 511 du T. XVIII.

²⁾ Comparez les p. 290 et 262 du T. XVII, datant de 1654.

³⁾ Voyez la Pièce IV à la p. 389 qui précède.

considération géométrique que Huygens a vu que „quæcunque fuerit longitudo filorum” la parabole à équation $y = l - \frac{x^2}{2l}$ se rapproche fortement de la courbe à équation $y = \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \frac{x}{R}}$ (note 3 de la p. 531): l'une et l'autre courbe a, pour $x = 0$, c'est à dire là où les deux courbes se touchent, le rayon de courbure l (ou plutôt $-l$), de sorte qu'elles sont osculatrices (comme la parabole et la sinusoïde — correspondant au cas $l = R$ — précédemment considérées) pour employer l'expression de Leibniz de 1686⁴⁾. Ces sortes de contact entrent naturellement dans mes Evolutions de Lignes courbes, écrira Huygens en 1691⁵⁾.



⁴⁾ Voyez la note 5 de la p. 42 du T. XVIII.

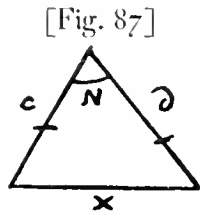
⁵⁾ T. X, p. 183.

II.

DÉMONSTRATIONS DE THÉORÈMES TRIGONOMÉTRIQUES.

[1687]

A. [Trigonométrie plane]. § 1. *Datis trianguli duobus lateribus et angulo interjecto invenire latus tertium ipsi oppositum¹⁾*.



[Fig. 87]

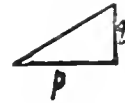
$h = \text{finus dimidij anguli } N \text{ dati [Fig. 87]. } d - c \propto p. \frac{x+p}{x-p}$
 Regula ad inveniendum angulum N ex tribus lateribus $\frac{xx - pp}{xx - pp}$
 datis $dc \frac{xx - pp}{+} = rr \frac{hh}{r \text{ radius}} \frac{xx - pp}{xx - pp}$
 $\frac{h}{r}$ est donc le rapport qui est désigné actuellement par le mot finus.

Sit $dc \propto mn$.

$$\frac{rrxx - 4prr \propto 4hhdc}{xx \propto pp + \frac{4hmn}{rr}}$$

Jam invenienda radix summæ horum duorum quadratorum per tabulas finuum et logarithmos.

$p \text{ — } q \quad r \sqrt{\frac{rq}{p}} \text{ tangens anguli (} r \text{ radius) [Fig. 88].} \quad \text{[Fig. 88]}$
 $s \text{ finus ejusdem anguli.}$
 $s \text{ — } r \text{ — } q \sqrt{\frac{qr}{s}} \propto x$



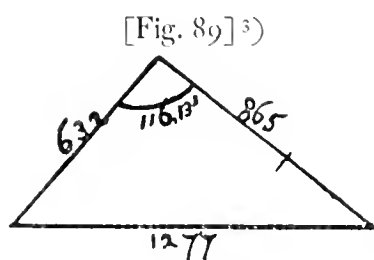
$$\sqrt{\overline{dc}} \propto n \quad \frac{2hn}{r} \propto q \quad p \text{ — } \frac{2hn}{r} \text{ — } r \sqrt{\frac{2hn}{p}} \\ s \text{ — } r \text{ — } \frac{2hn}{r} \sqrt{\frac{2hn}{s}}$$

Adde²⁾ logarithmos datorum laterum. Summæ dimidiæ adde logarithmum finus

¹⁾ Manuscrit F, p. 292. Les p. 285 et 297 portent respectivement les dates août 1687 et septembre 1687.

²⁾ Feuille collée entre les pages 182 et 183 du Manuscrit F. En marge: Vide lib. F, ce qui se rapporte sans doute à la p. 292, où l'on trouve la même règle (Adde logarithmos laterum c et d [Fig. 87] summæ dimidiæ. Etc.) mais sans exemple numérique. La feuille ne peut guère être antérieure à 1687: voyez la note 1 de la p. 458 qui suit.

femillis anguli dati, itemque logarithmum binarij. Ab hac summa aufer logarithmum differentiae laterum. Reliquum est logarithmus tangentis anguli, cujus logarithmus finus, ablatu ab eadem posteriore summa, dabit logarithmum lateris quaesiti.



2.93702	log. 865	865
2.80072	log. 632	632
5.73774	sum.	233 diff. a laterum [Fig. 89]
2.86887	dimid.	
9.92894	log. fin. $\frac{1}{2}$ ang. dati live $58^{\circ} 6\frac{1}{2}'$	
..30103	log. binarij	
13.09884	summa	
2.36736	log. 233 diff. a laterum	
10.73148	l. tangentis anguli cujusdum	
9.99264	cujus hic log. finus	
3.10620	log. 1277 lateris nempe quaesiti.	

Hæc regula nostra brevior est vulgari, quæ primo angulum unum quærere præcipit atque hinc deinde latus propositum. Nostra enim tabulas logarithmicas sexies inspicit postulat (nam binarij logarithmus notus est), illa vero octies. Tum in cæteris nostra quoque facilior est.

Il faut en effet consulter huit fois la table des logarithmes lorsqu'on applique d'abord la règle des tangentes pour trouver la différence des angles de la base (d'où se tire „angulus unus”), et ensuite celle des sinus pour trouver le „latus propositum”, c. à. d. la base.

[1680]

§ 2. Cette règle des tangentes est formulée et démontrée comme suit par Huygens en un endroit antérieur du même Manuscrit, datant de 1680 ⁴⁾ et appartenant donc, si l'on veut parler strictement, aux „Mathematica varia 1666—1681”:

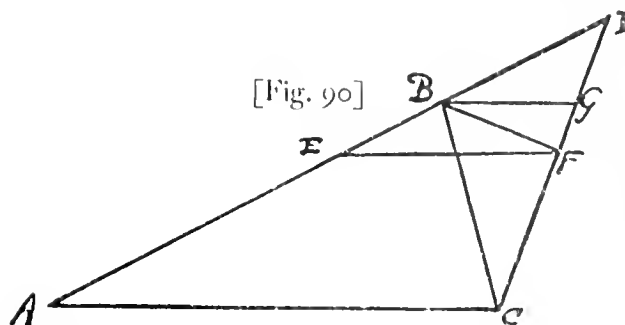
Theorema trigonometricum utile ad inveniendam anomaliam . . . etc. Huygens s'occupe de la construction de son planétaire mentionné aussi à la p. 394 qui précède. En marge: vulgo notum est hoc theorema. Vide Tab. Vlacqui ⁵⁾.

³⁾ Le triangle à côtés 632, 865, 1277 est considéré par Vlacq dans chacune des éditions de ses Tables mentionnées dans la note 5 qui suit.

⁴⁾ P. 2 du Manuscrit F, datant, nous semble-t-il, de la fin de 1680. La p. 239 du Manuscrit E porte la date du 11 mai 1680, celle du 16 novembre 1680 se trouve à la p. 39 du Manuscrit F.

⁵⁾ Il existe un assez grand nombre d'éditions différentes des Tables de Vlacq. Nous mentionnons les suivantes. 1 „Tafels van sinus, tangentes, secantes: Ende van de logarithmi van de sinus, tangentes, Ende van de Getallen van 1 af tot 10000 toe. Nevens de maniere om door de selfde allerley Drie-hoecken, ende veele Astronomische ende Interest-Reeckeninghen te resolveren. Door A. Vlacq. In 's Graven-Hage. By Adriaen Vlacq”, MDCLXI. La III. Prop. du III. Cap. (intitulé: „Van de resolutie van de Rechtlinise Scheefhoeckige Drie-hoecken”) est celle-ci:

ABC [Fig. 90] triangulum. Erit ut *summa laterum AB, BC, ad eorum differentiam ita tangens dimidiæ summæ angulorum A, C, ad tangentem dimidiæ ipsorum differentiæ.*



Mea demonstratio. Producatur AB, ut sit BD æqualis BC. jungaturque DC, itemque puncta E, F quæ rectas AD, DC secant bifariam, et ducatur BF, ac denique BG parallela EF sive AC. Erit jam angulus DBC æqualis duobus BAC, BCA. ac proinde angulus DBF æqualis dimidiæ

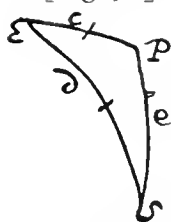
summæ ipsorum. à qua auferendo angulum DBG æqualem BCA, relinquetur GBF æqualis $\frac{1}{2}$ differentiæ angulorum BCA, BAC. Sumta itaque BF pro radio, oportet ostendere tangentem DF esse ad tangentem GF, sicut summa laterum AB, BC ad ipsorum differentiam, sive ut dimidia summa, quæ est ED, ad dimidiam differentiam, quæ est EB. Hoc autem manifestum est, quum EF, BG sint parallelæ.

„Bekent sijnde de twee zijden, ende een hoeck tusschen beyde, te vinden de andere hoecken”. Vlacq donne, sans la démontrer, la règle suivante: „Gelijck de somme van beyde de zijden, Tot het verschil der selfde; Soo is de Tangens van de halve somme der begeerde hoecken, Tot de Tangens van het halve verschil der selfde”. 2. „Nieuwe Konstige Tafelen sinuum, tangentium & secantium, ofte, vande Hoeckmaten, Raecklijnen, en Snylijnen, met de logarithmis, der Hoeckmaten, en Raecklijnen, Als mede de Logarithmi passende op de getallen van 1 tot 10000... Met sekere anwijzinge om door deselve alle Rechtlinische en Clootsche Driehoecken, met verscheyde Astronomische vræg-stucken op te lossen. 't Samengesteld door A. Vlacq. En vermeerderd met een nieuw uytgerekende Tafel van de vergrootende breedte, als mede de Tafel der Kromstreecken [voyez la p. 236 du T. XVII]. Door A. de Graef [voyez sur lui la p. 27 du T. IX]. 't Amsterdam, By Hendrick Doncker, Boeck-verkooper en Græt-boogemaker [voyez sur les „græt-boogen” les p. 627—628 du T. XVIII] in de Nieuwe-brug steeg”, 1665. Vlacq y donne la même règle. 3. „Tabulæ sinuum, tangentium et secantium, et logarithmi sinuum, tangentium... cum Methodo facillimâ, illarum ope, resolvendi omnia Triangula Rectilinea & Sphærica, & plurimas Quæstiones Astronomicas, ab A. Vlacq. Editio ultima emendata & aucta. Amstelædami, Apud Henricum & Viduam Theodori Boom”, MDCLXXXI. La règle (toujours dépourvue de démonstration) y a la forme suivante (p. 16): „Ut aggregatum datorum laterum, Ad differentiam eorundem; Sic Tangens semissis aggregati angulorum quæstorum. Ad Tangentem semissis differentiæ eorundem”.

[1687?]

B. [Trigonométrie sphérique et trigonométrie plane]. § 1. *Trianguli sphaerici* [Fig. 91] *datis tribus lateribus invenire angulum quemlibet*¹⁾.

[Fig. 91]



Vergaert de drij sijden te samen, vande helft der somme treckt elcke sijde om den begeerden hoeck. komen twee resten²⁾. Nu gelijk den radius tot sinus van eene sijde om den begeerden hoeck, alsoo sinus van d'ander sijde om den selven hoeck tot een 4^{de} getal. Dan voort

Gelijk dit 4^{de} getal tot sinus van het eene verschil, alsoo sinus van 't ander verschil tot de halve pijl van den begeerden hoeck. dese halve pijl met den radius gedeelt³⁾ en van 't product de wortel uytgetrocken sal geven sinus van den halven begeerden hoeck.

Het product van de sinus der twee resten multiplieert met het quadræt vanden radius. dit product divideert door het product van de 2 sinus der sijden en den begeerden hoeck. de quadrætwortel uijt het product sal sijn de sinus van den halven begeerden hoeck.

$$\begin{array}{l} r \\ c \\ d \\ \frac{cd}{r} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{cd}{r} \\ a \\ b \\ \frac{abr}{cd} \end{array}$$

Hinc regula illa per logarithmos utilissima, cujus quis fit auctor nescio⁴⁾. logarithmis $\tau\omega\nu$ a et b adde duplum logarithmum radij. A summa omnium aufer summam logarithmorum $\tau\omega\nu$ c et d . Reliqui semiffis erit log. sinus anguli dimidij quaesiti.

Dans le tableau c et d représentent les sinus des arcs EP et ES, et a et b les sinus des termes $\frac{1}{2}$ ($-EP + ES + PS$) et $\frac{1}{2}$ ($EP - ES + PS$). r est l'inévitable rayon. En prenant, comme nous le faisons actuellement, les sinus comme des

$$\left| \frac{abr}{cd} \right| \text{ rapports on a } \sin \frac{1}{2} E = \left| \frac{ab}{cd} \right|$$

Sur d'autres éditions des petites tables de Vlacq (elles furent publiées en différentes villes, tant en Hollande qu'à l'étranger) on peut consulter la „Bibliographie néerlandaise historique-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux 16^e, 17^e et 18^e siècles sur les sciences mathématiques et physiques avec leurs applications” par le Dr. D. Bierens de Haan, extrait du „Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche” T. XIV, sept.—dec. 1881, T. XV, mai—juillet 1882, T. XVI, juillet 1883, Rome, Impr. d. sciences math. et phys. Via Lata N° 3, 1883.

Le catalogue de vente de 1695 des livres de Huygens mentionne (Libri math. in Octavo, 22) „Vlack Tabula Sinuum, Tangentium &c.” sans date.

¹⁾ Petite feuille collée dans le Manuscrit F entre les p. 182 et 183 (comparez la note 2 de la p. 455). La feuille semble ne pas être antérieure à 1687, puisqu'à la p. 295 du Manuscrit F Huygens paraît ne pas encore connaître la démonstration de la règle ici considérée: il énonce quelques propriétés du triangle sphérique disant: „An hinc regula illa nota inveniri potest?” Il est

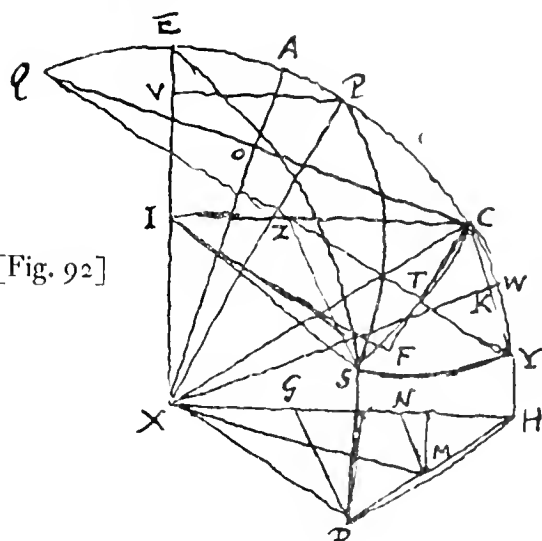
Vel addeert de arithmetische complementen van de logarithmi der sinus der zijden die den begeerden hoeck begriipen, bij de logarithmi vande sinus der gevonden verschillen. De helft van de somme sal de logarithmus sijn vande halve begeerde hoeck.

$$\begin{array}{l}
 \text{add.} \\
 \text{logar.}^{\text{us}} \\
 \text{nume-} \\
 \text{rorum}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \frac{r}{c} \text{ hujus logar.}^{\text{us}} \text{ est compl. arithm. logar. sinus } c \\
 \frac{r}{d} \text{ hujus logar.}^{\text{us}} \text{ est compl. arithm. logar. sinus } d \\
 a \\
 b
 \end{array}
 \right.$$

fit
 logar.^{us} $\frac{rrab}{cd}$ cujus logar.ⁱ. dimidium erit log. sinus anguli dimidij quaesiti.
 numeri

§ 2. [Demonstratio]. ESP [Fig. 92] is de gegevene driehoeck. SEP de begeerde hoeck. Neemt $EC \propto ES$. En $PY \propto PS$. XW snijde CY in 2 gelijke. Soo is EW de halve somme der 3 zijden. en CW is het verschil tusschen ES en dese halve somme. en PW het verschil tusschen EP en het selvige.

[Fig. 92]



Sij CI en PV perpend. op EX; Soo sijn dit de sinus der bogen ES of EC en PE. CK is sinus van CW. En YQ rechthoekigh door XP treckende, die CI snijdt in Z, soo is $PQ \propto PY$. En dan QC treckende; en, door het midden der selve, NOA, soo is $AC \propto AQ$, en bij gevolg $AP \propto \frac{1}{2} CY$, of CW, en $CA \propto WP$. En daerom CO sinus van PW, het ander verschil. Treckt SZ. Als mede DG perpend. op

vrai que les p. 295—296 constituent aussi une feuille détachée (non collée et du format du Manuscrit).

²⁾ Chez Vlacq (éd. de 1665, voir la note 5 de la p. 456): „Addeert de drie zijden te samen, en treckt elke syde aen de bekende hoeck van de helft haerder somme, om het verschil der selfden te hebben”. Etc.

³⁾ Pour trouver la formule $\sqrt{\frac{abrr}{cd}}$ — voir la suite du texte — et non pas $\sqrt{\frac{ab}{cd}}$, il faudrait lire „gemultiplieert” au lieu de „gedeelt”.

⁴⁾ Huygens semble donc ne pas avoir consulté — nous l'avons déjà dit dans l'Avertissement — la „Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio” de 1614 de Neper.

XII. EN XM perp. op DH en MN paral. DG. Treckt voorts CF parall. met PX, en IF parall. met QY: foo is de Δ CFI gelijcformigh æn PXV, als licht is te sien. Dærom XP tot PV als IC tot CF. Dat is de radius tot sinus der sijde EP als de sinus der sijde ES of EC tot een vierde linie CF. Soo moet dan voorts bewesen werden dat CF is tot CK als CO tot HN, halve pijl in den hoeck HXD of PES. En marge: pijl ipfi⁵⁾ eft sinus versus.

Voorts dewijl ZT, IF parall. sijn, foo is CF tot CT als CI tot CZ. Mær HX is tot HG als CI tot CZ. volgens 't geene hier næ bewesen sal werden.

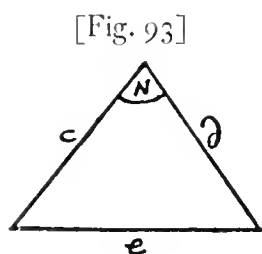
Dærom CF tot CT als HX tot HG.

Voorts dewijl den boogh AC de helft is van QAC, dærom is den hoeck AXC \propto QYC. dat is OXC \propto TYC. Mær de hoecken in CTY sijn recht. dærom de Δ en COX, CTY gelijcformigh. En bij gevolg CT tot CY als CO tot CX. Mær wij hadden te vooren CF tot CT als HX of CX tot HG, dærom CF tot CY als CO tot HG. of CF tot CK als CO tot HN. 't welck moest bewesen werden.

Dewijl nu die hoeck XMH recht is, als oock MNH, foo is MH sinus van den halven hoeck HXD of PES, middelproportioneel tusschen NH en den radius HX. En dærom HX met HN gemultipliceert sal de wortel van 't product geven HM. 't welck noch overigh was te bewijfen.

'T geene gefeght is dat HX is tot HG als CI tot CZ, werd aldus bewesen. Dewijl PS \propto PY, foo is den boogh SY in het vlack 't welck de sphæra snijdt en rechthoeckigh is op PX. in 't welck oock YZQ sijnde, foo is oock SZ in 't selve vlack: Mær dit vlack is rechthoeckigh op EHX, en foo is oock het vlack ISC. Dærom de gemeene snee SZ der vlacken ISC en YZS, sal rechthoeckigh sijn op het vlack EHX, en oock SZ perpend. op IC. en dærom parallel met DG. Soo is dan DX of HX tot XG als SI of CI tot IZ. En HX tot HG gelijk CI tot CZ, 't welck bethoont moest werden.

§ 3. Datis trianguli plani [Fig. 93] tribus lateribus invenire angulum quemlibet.



$$\left. \begin{array}{c} \frac{c+d+e}{2} \\ c \end{array} \right\} s. \quad \left. \begin{array}{c} \frac{c+d+e}{2} \\ d \end{array} \right\} s. \quad r \propto \text{radius}$$

$$\frac{d+e-c}{2} \propto a \quad \frac{c+e-d}{2} \propto b$$

Regula ex Vlackij tabulis⁶⁾ $c \text{ — } a \text{ — } b \left| \frac{ab}{c} \right.$
 $d \text{ — } r \text{ — } \frac{ab}{c} \left| \frac{rab}{dc} \right.$

⁵⁾ Vlacq. pensons-nous.

⁶⁾ Les deux équations qui suivent correspondent en effet à une des deux règles données par Vlacq.

$\sqrt{\frac{r \cdot a \cdot b}{d \cdot c}}$ finus dimidij anguli N. Ergo hic in triangulis planis eadem est regula quæ in sphæricis, nisi quod in his finus laterum et differentiarum laterum adhibentur, cum in illis latera ipsa et differentia adhibeantur. utrobique adduntur primum tria latera, et a summæ dimidio auferuntur singula latera angulum quæsitum comprehendentia ut fiant differentia duæ.

III.

QUESTION SE RAPPORTANT AU TRAITÉ
„VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK”.

[1688]

Voyez les p. 169—179 du T. XIV.

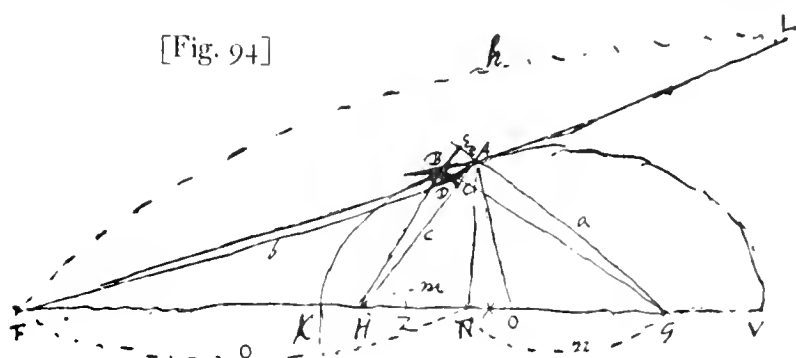


IV.

*Examen Curvæ linearæ quam Cartesius regule et fili ductu describere docet, an sit eadem atque Ovalium ipsius prima*¹⁾). Vid. pag. 54 in Editione Geom.^a 1659³).

Sept. 1690

8 Sept. 1690. Curva AB [Fig. 94, où $AG = a$, $AF = b$, $AH = c$, $HA = m$, $NG = n$, $FN = o$, $NO = x$, $AE = e$; AB = élément de la courbe; AC, AD, AE = projections orthogonales de AB respectivement sur AH, AF et le prolongement de GA] ejus naturæ ut fiat punctum in



ipſa A ducantur a datis punctis G, H, F rectæ, itemque ad punctum ejus B, proximum A, in partes F; quantum FB minor eſt quam FA, tantundem GB cum dupla BH ſint breviores quam GA cum dupla AH. Hæc eſt curva Cartesij per regulam et ſilum deſcripta quam dicit eſſe eandem cum prima ovali ſua. Quod hic examinatur, et verum eſt. Sed non video unde hanc deſcriptionem invenerit.

Invenitur tangens curvæ quam Cartesius deferibit motu regulæ et fili pag. 54 in editione 1659²).

¹⁾ Manuscrit G, f. 55r—56 v [p. 9—11 suivant la numération de Huygens].

2) Il s'agit du Recueil bien connu de F. van Schooten, contenant „La Géométrie” de 1637 de Descartes, etc. Dans l'édition de 1683 la première ovale de Descartes figure également à la p. 54. C'est dans le Livre Second de „La Géométrie” que Descartes traite de ses ovales.

$$\frac{3}{2}o - 2m - \frac{1}{2}n \quad FZ$$

$$\text{ex } o + n \quad FG$$

$$\frac{3}{2}n + 2m - \frac{1}{2}o \quad ZG$$

$$\frac{9o - 11n}{2o} \propto m$$

$$\frac{3}{2}o + \frac{3}{2}n \text{ FZ restituto valore } m.$$

$$\frac{3}{2}n + \frac{3}{2}o \propto ZG \text{ restituto valore } m.$$

Invenitur tangens Ovalis primæ Cartesij ex nostra methodo. Il s'agit de la „Méthode des tangentes... pour les courbes données en coordonnées bipolaires etc.” dont traite la Pièce I à la p. 491 qui suit.

$$a + \frac{2}{3}b \propto a + e + \frac{2}{3}b \frac{2aoe - 2axe}{3bn - 3bx}$$

puisque d'après la première construction de Descartes, comme Huygens le dira plus loin, on a $a + \frac{2}{3}b = \text{const.}$ (l'indice de réfraction étant $\frac{3}{2}$); ceci est d'ailleurs vrai pour la première ovale même lorsqu'on n'a pas $FK = KG$.

$$\frac{3bn - 3bx - 2ao - 2ax \propto 0}{}$$

$$\frac{3bn - 2ao}{2a + 3b} \propto x \propto \frac{cao - 2abm + bcn}{2ab + bc - ca} \propto x \text{ pag. preced.}$$

$$\text{restitue } m \propto \frac{9o - 11n}{2o} \frac{3bn - 2ao}{2a + 3b} \propto \frac{cao - \frac{9}{10}abo + \frac{11}{10}abn + bcn}{2ab + bc - ca}$$

$$\frac{6abbn - 4aabo + 3bbcn - 2aabc - 3bnac + 2aaco \propto 2aaco - \frac{2}{5}aabo + \frac{11}{5}aabn + 2abcn + 3bcao - \frac{2}{5}abbo + \frac{3}{5}abbn + 3bbcn}{}$$

$$\text{per } bao + ban \frac{\frac{2}{5}abbn + \frac{2}{5}abbo - \frac{1}{5}aabo - \frac{1}{5}aabn \propto 5bcao + 5bcan}{\frac{2}{5}b - \frac{1}{5}a \propto 5c}$$

$$\frac{\frac{2}{5}b - \frac{2}{5}a \propto c}{}$$

(Si $a \propto b$, ut fit cum punctum curvæ sumitur in K, fiet HK $c \propto \frac{5}{10}$ five $\frac{1}{10}$ KF vel KG, quod ita est.)

Nota quod certa pars AF minus certa parte AG æquatur AH⁴⁾).

⁴⁾ Comparez Gino Loria, „Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte” (Deutsche Ausgabe von Fr. Schütte, Leipzig, Teubner, 1902; p. 163, appartenant au III. Abschnitt „Kurven vierter Ordnung”, Cap. IX „Die Cartesischen Ovale”); „... dass das Cartesische Oval zu derjenigen Kategorie von Kurven gehört, die gebildet wird von den Oertern der Punkte, deren Abstände von n festen Polen, multipliziert mit beliebigen Konstanten, eine konstante Summe geben”.

Quod si hæc Ovalis est eadem quam regula et filo describit Cartesius, etiam tangens utriusque facit æquale intervallum NO seu x. Hoc vero ut fiat, oportet esse $\frac{2}{5}b - \frac{2}{5}a \propto c$ in curva ista filari. Sed in ea est $c \propto \frac{d-h}{2} + \frac{b-a}{2}$ secundum proprietatem à Cartesio suppositam, ut facile apparet.

($a + 2c + h - b \propto d$ datae — d est la longueur du fil — secundum Cartesium. Sed et $h - LF$ dans la Fig. 94 — est data. Ergo $\frac{d-h}{2}$ est data linea. $c \propto \frac{d-h}{2} + \frac{b-a}{2}$)

Ergo in hac curva filari erit

$$\frac{2}{5}b - \frac{2}{5}a \propto \frac{d-h}{2} + \frac{b-a}{2},$$

unde fit $a + \frac{2}{3}b \propto \frac{25d - 25h}{3}$ quæ est linea data. Quæ est

proprietas primæ Ovalis Cartesij secundum nostram constructionem. Atque ita patet hanc curvam proprietate eadem gaudere qua Cartesij Ovalis prima. Sed et prorsus eandem esse sic ostendetur.

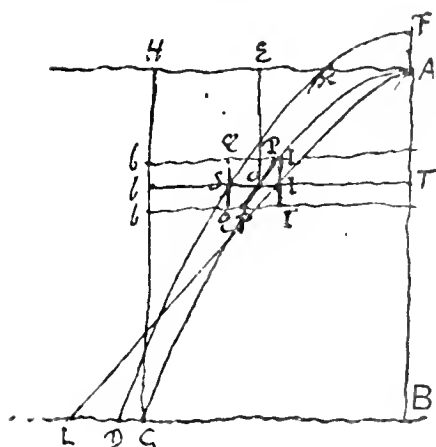
In Curva Cartesij, d , five summa $LA + 2AH + AG$, tantundem superat h five LF , quantum $2AH + AG$ superat AF , quia LF est $LA + AF$. Atqui $d - h$ semper est eadem longitudo, etiam cum pro puncto curvæ A sumitur K. Ergo $d - h \propto 2HK + KG - KF$. Sed $KG \propto KF$, ergo $d - h \propto 2HK$ five KZ . Sed in Ovali Cartesij prima fit semper $a + \frac{2}{3}b \propto GK + \frac{2}{3}KF$, hoc est $\propto \frac{5}{3}KF$, (quia $KG \propto KF$). Ergo quia invenimus in Curva filari esse $a + \frac{2}{3}b \propto \frac{25d - 25h}{3}$, hoc est $\frac{2}{3}KZ$, oportet jam, si hæc curva est eadem cum illa Ovali, ut $\frac{5}{3}KF$ fit $\propto \frac{2}{3}KZ$, hoc est $KZ \propto \frac{1}{5}KF$, quod ita est; nam FZ ad ZG ut 3 ad 2 ex constructione Cartesij; unde FG ad GZ ut 5 ad 2, et KG ad GZ [ut] 5 ad 4. Et KG seu KF ad KZ ut 5 ad 1.

SURFACE OBTENUE PAR LA RÉVOLUTION DE LA PARABOLE
AUTOUR D'UNE TANGENTE AU SOMMET.

Janvier 1691

1 Jan. 1691. Quæritur ¹⁾ superficies ex revolutione parabolæ AC circa AH, item circa BC [Fig. 95].

[Fig. 95]



$$\begin{array}{rcccl}
 \text{BD} \propto \sqrt[3]{rx + \frac{1}{4}rr} & \text{hic AB} \propto x & & & \\
 \text{BC} & \text{CH} & \text{BD} & \text{BL} & \\
 \sqrt[3]{rx} - x & & \sqrt[3]{rx + \frac{1}{4}rr} - y & & \\
 \hline
 rxyy \propto rx^3 + \frac{1}{4}rrxx & & & & \\
 \hline
 y \propto \sqrt[3]{xx + \frac{1}{4}rx} & \text{hyp. equil.} & & &
 \end{array}$$

AC parabola, diam. AB, vertex A, tangens in vertice AH, latus rectum $\propto r$. Erit superficies ex conversione AC lineæ parabolicæ circa axem AH, ad superficiem cylindricam ex conversione CB circa eundem axem, five ad superficiem cylindricam ex conversione HC circa axem AB, ut semihyperbolæ spatium ALB ad rectangulum IIB.

Est autem hyperbolæ vertex A. latus transversum AF $\propto \frac{1}{x}$, itemque latus rectum. Nam posita

BD $\propto \sqrt{rx + \frac{1}{4}rr}$, et descripta parabola FXD cujus latus rectum erat itidem r ; erit portio AXDB ad \square IIB ut superficies parabolica conoidis ACB ad superficiem cylindricam ex conversione IIC circa AB, ut notum, quia nempe rectangulum ex particula qualibet parabolæ, ut PP ducta in OT distantiam suam ab AB, æquatur rectangulo ex respondente particula QQ parallela AB ducta in distantiam ST. Sed hoc rectangulum ex QQ in ST est ad rectangulum ex respondente bb particula rectæ HC in bT, ut ST ad distantiam bT. Ergo et \square ex PP in OT est ad \square ex bb in bT ut

¹⁾ Manuscrit G f. 79 v (p. 57 suivant la numération de Huygens).

ST ad bT. Sed ut \square ex PP in OT ad \square ex bb in bT ita est superficies ex PP circa AB ad superficiem ex bb curva AB. Ergo illa superficies ex PP circa AB ad hanc ex bb circa AB ut ST ad bT. Atque ita tota superficies ex AOC circa AB ad superficiem ex HC circa eandem AB ut portio AXDB ad rectangulum IIB.

Porro quia superficies ex PP circa AB est ad superficiem ex eadem PP circa AH ut OT distantia ad distantiam OE, fiat ut OT ad OE ita ST ad IT, erit quoque ST ad IT ut superficies ex PP circa AB ad superficiem ex eadem PP circa AH. Atqui erat bT ad ST ut superficies ex bb circa AB ad superficiem ex PP circa AB. Ergo ex æquo erit bT ad IT ut superficies ex bb circa AB ad superficiem ex PP circa AH. Ideoque omnes bT, hoc est \square IIB ad omnes IT, hoc est ad spatium hyperbolicum ALB, ut omnes superficies ex bb circa AB, ad omnes superficies ex PP circa AH. hoc est ut superficies cylindrica ex HC circa AB, vel ex IIA circa CB, ad superficiem ex AC curva circa AH. Est autem I punctum ad hyperbolam descriptam, sicut et L, ut patet ex æquatione superiori.

Poterit autem et superficies ex parabolica AC circa BC inveniri, posita quadratura hyperbolæ. Datur enim, hac posita quadraturâ, longitudo parabolicae AC²⁾. Et datur superficies ex AC circa AB. Ergo dabitur centri gravitatis curvæ AC distantia ab AB. Cumque etiam detur superficies ex AC circa AH, erit ut superficies ex AC circa AB ad superficiem ex AC circa AH, ita dicta distantia centri gravitatis ad distantiam centri gravitatis ejusdem ab recta AH. Ergo datur quoque hæc distantia centri gravitatis ab AH, quare et a BC. Sicut autem distantia ejus ab AB ad distantiam ab BC ita erit superficies ex AC circa AB ad superficiem ex AC circa BC. quare et hæc dabitur.



²⁾ Voyez la p. 553 du T. XIV sur la „Réduction de la rectification de la parabole à la quadrature de l'hyperbole et réciproquement.”

VI.

DÉVELOPPEE DU „FOLIUM CARTESII”.

[1691]

Voyez les p. 406—409 du T. XVIII.



VII.

SOLIDE DE RÉVOLUTION OBTENU PAR LA ROTATION
DE LA CYCLOÏDE AUTOUR DE SON AXE.

[1691]

Voyez les p. 377—378 du T. XIV.

VIII¹⁾.

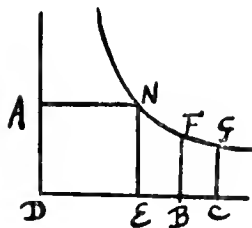
CALCUL DE LOGARITHMES EN PARTANT DE LA CONSIDÉRATION DE L'HYPERBOLE EQUILATÈRE.

[1691]

NG hyperbola asymptotis DA, DC [Fig. 96]. quadratum ejus ND.

Ad inveniendum logarithmum rationis NE ad GC five CD ad DE, fecetur EC bifariam in B, et formetur fractio ejus numerator ad denominatorem ut EB ad BD.

[Fig. 96]



quæ fractio vocetur d . Erit jam $d + \frac{d^3}{3} + \frac{d^5}{5} + \frac{d^7}{7}$ &c bis sumptum ad 1, ut spat. NGCE ad qu. AE. hoc est ut logarithmus hyperbolicus rationis NE ad GC, seu rationis CD ad DE ad 1²⁾.

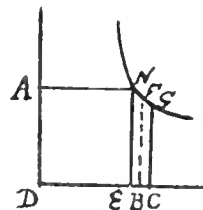
Fractio autem d commodè talis accipietur ad inveniendos logarithmos ut sit EB ad BD sicut unitas ad numerum, velut si inveniendus sit logarithmus rationis 2 ad 1. hoc est logar. 2, erit CD ad DE ut 2 ad 1, unde EB ad BD ut 1 ad 3, et d fractio erit $\frac{1}{3}$. Unde lib. G pag. 46³⁾ inventus est logar 2.

Invento autem log.^o 2, habebitur log. 3, si inveniatur log. $\frac{9}{8}$ nam addito tunc log.^o 8 qui notus est ex log.^o 2. habebitur log. 9 ejus dimidium est log. 3.

Sit jam ergo NE ad GC, seu CD ad DE ut 9 ad 8 [Fig. 97]. Eritque bisectione EC in B, ratio EB ad BD quæ 1 ad 17, et fractio $d \propto \frac{1}{17}$, per quam itaque habebitur log. 3. Hinc porro ad log. 5 progrediemur, quærendo logar. $\frac{25}{24}$, nam ad hunc addendo log. 24 qui ex log.^{is} 2 et 3 cognoscitur, (quia 24 fit ex 2.2.2.3) habebitur log. 25, ejus dimidium est log. 5.

Itaque hic ponendo CD ad DE ut 25 ad 24, sit EB ad BC ut 1 ad 49; unde $d \propto \frac{1}{49}$.

[Fig. 97]



¹⁾ Manuscrit H, p. 2—3 (numération de Huygens). Les dates 1 Oct. 1691 et 19 Dec. 1691 se trouvent respectivement aux p. 153 du Manuscrit G et 8 du Manuscrit H.

²⁾ Voyez l'endroit, datant également de 1691, du T. X que nous citons dans la note suivante; nous y renvoyons le lecteur aussi à la Pièce II de 1691 de la p. 27 du T. X.

Sic porro ad log. 7 pergemus quærendo log. $\frac{49}{8}$, cui addito log.° 48 (qui noscitur ex log.^{is} 2 et 3) fiet log. 49 cujus dimidium est log. 7. Et sic ponendo CD ad DE ut 49 ad 48 fit EB ad BD ut 1 ad 97, et hinc fractio $d \propto \frac{1}{97}$.

Denique ita semper a minoribus ad majores numeros primos procedendo, inveniuntur eorum logar.ⁱ ex logarithmo fractionis cujus numerator est quadratus numeri Primi propositi. et denominator tantum unitate minor, et fractio d fiet unitas divisa per duplum istius denominatoris. Cujus quidem denominatoris logarithmus semper dabitur ex logarithmis præcedentium numerorum Primorum jam inventis. Imo ex ijs tantum qui numeri Primi pro[po]siti atque unitate aucti dimidium non excedunt.

Sic numeri 13 logarithmus invenietur ex fractione $\frac{169}{8}$, et fractio d erit $\frac{1}{336}$. Et denominatoris 168 logarithmus dabitur ex logar.^{is} 2.3 et 7. qui numerus 7 est $\frac{13+1}{2}$, nec major aliquis compositionem ingreditur.

Ratio est quia si numerus Primus cujus novissimè logarithmus quæritur dicatur a , fit ejus quadratum unitate multatum $aa - 1$, denominator nempe fractionis cujus logarithmum ex jam inventis dari diximus. Qui itaque denominator divisibilis est per $a + 1$ et per $a - 1$. qui uterque est numerus par ideoque per 2 dividitur, quæcunque igitur pars aliquota fuerit dicti denominatoris $aa - 1$, eam oportet partem aliquotam esse numeri $\frac{a+1}{2}$ vel $\frac{a-1}{2}$, ac proinde non major saltem potest esse quam ipse numerus $\frac{a+1}{2}$, hoc est quam numerus primus de quo agitur unitate auctus ac per 2 divisus, quod erat ostendendum.

Tales quidem formando fractiones d , compendio obtinebimus logarithmos numerorum Primorum. Si vero quæras an nunquam majori quoque brevitate uti liceat, dicam aliquando licere. velut cum log. 7 ex fractionis $\frac{49}{8}$ logar.° invenimus: potuit idem log. 7 elici non tantum ex log.° fractionis $\frac{56}{9}$; unde fractio fit $\frac{1}{99}$; sed et ex log.° fractionis $\frac{64}{3}$, unde fit fractio $d \propto \frac{1}{127}$. Nam dato log.° $\frac{56}{9}$, quia etiam log. 50 datur ex log.^{is} 2 et 5, dabitur et log. 49 cujus dimidium est log. 7. Nempe ab log.° 50 auferendo log. $\frac{56}{9}$, fiet log. $50\frac{56}{9}$, hoc est log. 49. Item dato log.° $\frac{64}{3}$ dabitur quoque log. 63, auferendo ab log.° 64, log. $\frac{64}{3}$. Datur autem log. 64, ex invento log. 2. Et ex log. 63 auferendo log. 9, qui datur ex invento prius log.° 3, remanebit log. 7 quæsitus. Et in universum quidem quando propositi numeri Primi potestas aliqua præter quadratum vel potestatis ipsius multiplex aliquis (per ipso majorem, sed omnes partes

3) Huygens a noté sur la p. 2 du Manuscrit H: Ex libro G. pag. 46. Il s'agit dans cette remarque de la Pièce que nous avons reproduite aux p. 45—47 du T. X. Voyez aussi la note 13 de la p. 535 du T. IX, où nous avons exposé en quoi la série quadratique de Huygens diffère d'une série fort semblable, et pourtant tout autre, de Leibniz.

aliquotas ipso eodem numero Primo minores habentem) dentâ vel additâ unitate facit numerum cujus singulæ partes aliquotæ ipso numero Primo minores sunt (sicut accidit cum 7 multiplicatur per 9) formabitur fractio utilior quam ex regula præcedente: cujus fractionis numerator et denominator erunt multiplex ille et idem $+$ vel $-$ 1. Sed raro aut certe non facilè talis multiplex invenitur. Aliquando vero invenire impossibile est. ut si quæram ad inveniendum log. 3 alium ejus multiplicem, præter quadratum ejus 9, qui utilius adhibeatur, frustra quæram. Illic enim multiplicans numerum 3. vel potestatem ejus deberet esse aliqua potestas numeri 2. quia nullus alius est numerus cujus quælibet pars aliquota sit minor 3. Atqui potestas numeri 2 multiplicans 3, vel potestatem ejus, producit numerum parem, qui vel auctus vel diminutus unitate relinquit imparem, qui non potest habere quamlibet partium aliquotarum minorem 3, hoc est, qui non potest esse potestas aliqua numeri 2. Sed forsân potestas aliqua numeri 3 (præter quadratum) aucta vel multata unitate, facit potestatem aliquam numeri 2. quo casu quoque utiliorem fractionem dari diximus.

IX¹⁾.

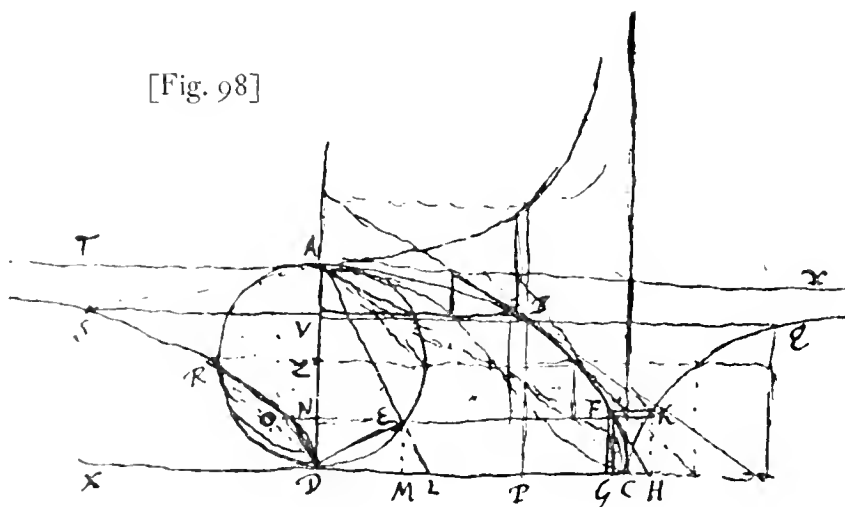
CYCLOÏDE ET CISSOÏDE; SOLIDES DE RÉVOLUTION ET CENTRES DE GRAVITÉ.

[1691 ou 1692]

En marge: Hæc pendet e Theoremate pag. 14 posteriore ²⁾.

ABCD Semicyclois [Fig. 98] ³⁾. FH tangens. FK parall. DC. HK parall. DA. K est punctum in curva CKQ. Erit spatium CFK \propto CFG ⁴⁾.

[Fig. 98]



Sit DRS Cissoïdes, ad asymp. AT. applicata NO, (posita KFENO linea recta) erit æqualis ML live GH, hoc est FK. unde spat. DNO \propto CFK seu CFG. idque

¹⁾ Manuscrit H, p. 9 r (p. 17 suivant la numération de Huygens). Les p. 8 et 55 (Huygens) portent respectivement les dates 19 Dec. 1691 et 17 Apr. 1692.

²⁾ Il s'agit ici de la Pièce de „décembre 1691” (voyez cependant sur cette date la note précédente) que nous avons publiée comme Appendice à une lettre de Huygens au Marquis de l'Hospital à la p. 309 du T. X. Consultez sur les notations α , λ etc. de cette Pièce la suite du présent Tome (p. 511 etc.).

ubique. Nempe et spat. $SVD \propto BCP$. Et totum spatium Cissoïdis infinitum \propto Cycloïdi dimidiæ ACD .

Item solidum ex spatio infinito Cissoïdis circa axem DX æquale folido ex spatio Cycloïdis ACD circa axem DC .

Sed spatij Cycloïdis ACD centrum gravitatis distat ab DC $\frac{5}{12} AD$ ³⁾. Ergo spatij infiniti $DSTA$ centrum gravitatis distat $\frac{1}{12} AD$ seu $\frac{5}{12} AD$ ab DC . seu $\frac{1}{6} AD$ ab AT . quod et aliunde apparet quia AN in $NO \propto DN$ in NE . ideoque semicirculus DEA circa DM vel AT revolutus facit folidum æquale folido Cissoïdis infinito circa AT . unde radius DZ in semicirculum AED ductus æquale folidum facit ac spatium infinitum $DSTA$ in distantiam centri gravitatis suæ ab AT . Est autem spatium istud triplum semicirculi. Ergo dicta distantia centri gravitatis erit $\frac{1}{3}$ radij ZD .



³⁾ La présente Pièce se rattache aussi plus ou moins à celle de septembre 1691, tirée de la f. 126 r du Manuscrit G (on trouve les dates 1 Sept. 1691 et 1 Oct. 1691 respectivement sur les p. 123 r et 127 v) que nous avons publiée, comme Appendice à des pièces antérieures, aux p. 377—378 du T. XIV. Nous n'aurions guère pu y joindre la présente Pièce: les recherches de Huygens de 1658 et 1659 constituant ces „pièces antérieures” se rapportaient *exclusivement* aux „propriétés géométriques de la cycloïde” (voyez la p. 347 du T. XIV).

⁴⁾ Comparez la figure et le texte de la p. 309 du T. X, déjà citée dans la note 2.

⁵⁾ Dans sa lettre du 1 janvier 1692 à Leibniz Huygens lui rappelle (T. X, p. 224) les „profondes speculations de Mr. Pascal” et de „Wallis” sur „le centre de gravité de la demie Cycloïde”.

X.

CALCUL DU RAYON MINIMAL DE LA COURBE LOGARITHMIQUE.

[1692]

Voyez la p. 333 du T. X et la p. 410 du T. XVIII.



PROBLÈMES ET MÉTHODES MODERNES.



Avertiffement.

Dans cette dernière partie mathématique du présent Tome, on voit Huygens aux prises avec l'esprit moderne. En comparant le *Traité de la Lumière* avec l'*Horologium oscillatorium*, on constate une différence de forme très apparente, d'abord le français au lieu du latin, en second lieu la continuité de l'exposition: le *Traité* ne consiste plus en une série de théorèmes dont beaucoup prouvées rigoureusement d'après la mode antique. Le même effort pour ne pas paraître archaïque paraît aussi ailleurs. Ce n'est pas que Huygens soit revenu de la conviction qu'en mathématique les démonstrations rigoureuses sont les seules véritables: il exprime encore cette conviction en 1695¹⁾ dans une des dernières pages de son dernier manuscrit I (*Pièce VIII* qui suit); mais il a constaté le succès indéniable que les méthodes moins rigoureusement logiques dont d'autres auteurs se contentent peuvent avoir, et Leibniz ne fut sans doute pas le seul à lui conseiller de ne pas s'obstiner dans le formalisme: „Vous avés déjà acquis tant de gloire, que vous vous pouvez reposer un peu, et si vous donniés quelques unes de vos belles pensées et découvertes toutes pures, quoyque dénuées de ce bel appareil de demonstrations formelles, mais qui genent trop et qui font perdre trop de temps à une personne comme vous estes, je croy que la posterité ne vous feroit que trop obligée”²⁾. Voyez d'ailleurs ce que Huygens disait lui-même sur ce sujet déjà en 1659³⁾.

¹⁾ Ou peut-être vers la fin de 1694.

²⁾ Lettre du 20 octobre 1679 (T. VIII, p. 237).

³⁾ Note 31 de la p. 181 qui précède.

Leibniz recherchait surtout — et non seulement dans le domaine des mathématiques — les notations simples, celles qui conviennent à la nature des problèmes à résoudre. Le „nouveau calcul . . . offre des vérités par une espèce d'analyse, et sans aucun effort d'imagination, qui souvent ne réussit que par hasard, et il nous donne sur Archimède tous les avantages que Viète et Des Cartes nous avoient donnés sur Apollonius”⁴⁾. Huygens reconnaît comme „certainement fort beau” que le nouveau calcul offre „comme de soy même . . . des vérités [qu'on n'a] pas même cherchées”⁵⁾. Cependant, n'étant plus jeune, il ne réussit pas à acquérir l'adresse nécessaire dans le maniement des nouveaux symboles, dont il ne se sert d'ailleurs pas toujours et même plutôt exceptionnellement⁶⁾, et ce n'est véritablement qu'au prix de grands „efforts d'imagination” qu'il parvient à résoudre certaines questions figurant à l'ordre du jour, e.a. des problèmes posés dans les *Acta Eruditorum*, et à se maintenir ainsi plus ou moins au premier rang.

Le majeure partie des calculs qui occupèrent Huygens (outre ses autres recherches) dans les dernières années de sa vie, surtout depuis 1690, ont été publiées par nous, avec les commentaires nécessaires, dans les Tomes IX et X, derniers Tomes de la Correspondance. Ces calculs se trouvent d'abord dans les lettres elles-mêmes, mais surtout dans nos notes et Appendices. Pour que ceux de nos lecteurs qui pourraient s'intéresser aux manuscrits soient en état de s'orienter dans ce dédale, nous publions à la fin de ce Tome, parmi les Tables, — ce qui n'a pas été fait antérieurement — une liste des pages des Manuscrits F, G, H et I qui ont trouvé leur place dans les deux Tomes nommés. Cette liste fera comprendre l'impossibilité de réimprimer dans le présent Tome les recherches en question. Les §§ 1 et 2 de la Pièce I qui suit ont en vérité été réimprimés ici, pour qu'on puisse voir sans peine comment les §§ suivants s'y rattachent. Mais pour les autres considérations et calculs publiés dans les deux Tomes, tels que ceux qui se rapportent à la chaînette, à la ligne d'égale descente ou à la traîtresse, nous n'avons pas cru devoir les mettre de nouveau sous les yeux des lecteurs, fût-ce dans un ordre qui pourrait parfois différer de celui des Tomes IX et X.

C'est aussi dans les T. IX et X qu'ont été imprimés, puisqu'elles affectent la forme de lettres à l'éditeur, les articles suivants, qui ont vu le jour du vivant de l'auteur⁷⁾:

⁴⁾ Lettre du 22 septembre 1691 (T. X, p. 157).

⁵⁾ Lettre à Leibniz du 1 septembre 1691 (T. X, p. 129).

⁶⁾ „Toute votre méthode ne me demeure pas présente à l'esprit quand j'ay discontinué longtemps à m'y exercer” (Lettre à Leibniz du 27 décembre 1694, T. X, p. 698).

⁷⁾ Nous ne tenons pas compte dans le présent Tome de ce qui se rapporte aux voiles ou à la manœuvre des vaisseaux.

T. IX, p. 224, No. 2489. Chr. Huygens à l'auteur des Nouvelles de la République des Lettres, 8 Octobre 1687. Solution du Problème proposé par M. Leibnitz dans les nouvelles de la République des Lettres du Mois de Septembre 1687. — Comparez la Pièce II qui suit.

T. X, p. 95, No 2681. Chr. Huygens aux éditeurs des *Acta Eruditorum*, 5 Mai 1691, publié en juin 1691 sous le titre „Chr. Hugonii, Dynastæ in Zulechem, solutio ejusdem problematis”. — Comparez la Pièce VI qui suit.

T. X, p. 407, No. 2793. Chr. Huygens à H. Basnage de Beauval, lettre publiée dans le fascicule de décembre 1692 — février 1693, au Mois de Février, dans l'Histoire des Ouvrages des Sçavans. — Comparez les Pièces V et VI qui suivent.

T. X, p. 512, No 2823. Chr. Huygens aux éditeurs des *Acta Eruditorum*, Septembre 1693, publié sous le titre „C.H.Z. de problemate Bernouliano in actis Lipsiensibus hujus anni pag. 235 proposito.” — Comparez la Pièce VII qui suit.

T. X, p. 673, No 2875. Chr. Huygens aux éditeurs des *Acta Eruditorum*, Août 1694, publié en septembre de la même année sous le titre „C.H.Z. Constructio universalis Problematis a Clarissimo viro, Jo. Bernoulio, superiori anno mense Majo positi”. — Comparez la Pièce VII qui suit.

En considérant la liste des questions mathématiques traitées par Huygens dans l'Académie des Sciences de Paris, on voit qu'il l'intéressait aux maxima et minima présentés par les courbes, et plus généralement à ceux d'expressions algébriques⁸⁾, à la détermination des tangentes aux courbes géométriques (c.à.d. celles dont les équations ne contiennent que des puissances de x et de y , et pas de fractions), ainsi qu'à la rectification et à la quadrature de certaines courbes, sans qu'il fût en possession d'une méthode générale pour ces deux derniers problèmes.

Aujourd'hui il est évident pour chacun de nous que la recherche des tangentes et celle des maxima et des minima des courbes $y = f(x)$ ou $f(x, y) = 0$ exigent la même différentiation et sont donc étroitement liées l'une à l'autre. L'on pourrait être tenté d'admettre qu'il devait en être de même pour Huygens. Tel n'était cependant pas le cas. Chercher la tangente à une courbe, ce n'est pas pour lui déterminer une tangente trigonométrique exprimée par un rapport (ce serait là un anachronisme), c'est déterminer la longueur d'une droite, savoir la soustangente, d'après une règle

⁸⁾ Appendice II à la p. 300

simple, trouvée comme on l'a vu. Mais chercher un maximum ou un minimum, c'est tirer les valeurs de x de l'équation qu'on obtient en formant ce que nous appelons la différentielle dy et en l'égalant à zéro. Cette dernière règle est générale, quoique le calcul ne soit pas toujours exécutable, tandis que la règle succincte pour trouver la sous-tangente est bornée, comme nous venons de le dire, au cas des courbes géométriques⁹⁾. Il n'est donc pas absolument exact de dire, comme cela a été fait dans la note 6 de la p. 249 du T. X, que Huygens „évite . . . *toujours* [nous soulignons] . . . d'employer la différentiation des expressions irrationnelles". Il ne l'évite pas quand il s'agit de chercher un maximum ou un minimum. Voyez les p. 89 et 101 du T. XIX : en 1690 il tire *immédiatement* de l'expression

$$[y =] \sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{4}{9}xx} + \sqrt{aa - 2ax + xx + cc}$$

la différentielle

$$[dy =] \frac{\frac{8}{9}xe}{2\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{4}{9}xx}} + \frac{-2ae + 2xe}{2\sqrt{aa - 2ax + xx + cc}} \quad (\text{où } e = dx)$$

qu'il égale à 0 pour calculer la valeur de x rendant minimale la valeur de l'expression donnée. Mais quand il a affaire en 1692 aux calculs de Hubertus Huighens, où il s'agit (note citée de la p. 249 du T. X) de calculer la sous-tangente, il commence par réduire l'équation de la courbe à la forme sans radicaux qui permet l'application de la règle, et il se figure que Hubertus doit avoir commencé par la considération de cette forme-là („hinc inceptit", p. 250) quoique, comme l'observe à bon droit la note 7, rien ne soit moins certain. A la fin de sa deuxième et dernière lettre Hubertus lui demande la „permissio te salutandi", mais nous ne trouvons pas que Huygens l'ait invité à venir le voir; plus tard aussi il ne parle pas de lui comme d'une connaissance personnelle; peut-être avait-il l'impression qu'en tenant Hubertus à l'écart il conserverait mieux son prestige vis-à-vis de ce mathématicien un peu fantaisiste plus jeune que lui de vingt ans et ne jouissant, semble-t-il, d'aucune célébrité, mais dont pourtant il avait l'impression de ne pas comprendre à fond les méthodes donnant généralement des résultats exacts.

Après ce que nous venons de dire on conçoit que Huygens n'ait pas non plus remarqué dans la période française qui se termine en 1681 et même beaucoup plus tard ce qui nous paraît aujourd'hui si simple, savoir que la différentiation et l'intégra-

⁹⁾ Ceci ne veut pas dire que Huygens était incapable de construire la tangente dans d'autres cas. Voyez les p. 463 et 464 du T. XIV où il calcule en 1661, en se servant du triangle caractéristique, la sous-tangente (le „latus rectum") de la courbe logarithmique. Voyez aussi le premier alinéa de la p. 485 qui suit.

tion font, non seulement dans des cas particuliers, mais généralement, des opérations inverses. Cependant la correspondance avec Leibniz l'amène de plus en plus à voir la connexion étroite des problèmes: „Je vois — écrit-il en 1692 — qu'on peut en supposant autant qu'on veut de quadratures, trouver les courbes à qui elles conviennent, mais d'aller de l'équation à la quadrature, je n'y vois pas moyen, si non en quelques cas simples" ¹⁰⁾.

Cette connexion entre les divers problèmes nommés est proclamée par un autre mathématicien, du même âge que Hubertus Huighens, avec qui Huygens eut beaucoup plus de relations, savoir E. W. Tschirnhaus ou von Tschirnhausen ¹¹⁾. Celui-ci le visita pour la première fois à Paris en août 1675 ¹²⁾, venant de Londres et recommandé par Oldenburg et Papin. Tschirnhaus ne tarda pas à faire, également à Paris, la connaissance de Leibniz à qui il avait été recommandé de même: c'est peut-être à ce dernier qu'il est redevable d'une partie de ses idées générales ¹³⁾. Plusieurs lettres furent échangées entre Huygens et Tschirnhaus, soit directement, soit par l'intermédiaire de P. van Gent, médecin à Amsterdam. Il serait trop long de résumer cette correspondance qui, de la part de Tschirnhaus, homme de talent mais fort sujet à errer ¹⁴⁾, consiste trop souvent dans une énumération de problèmes généraux qu'il dit pouvoir résoudre par des méthodes qu'il garde pour lui ¹⁵⁾; ce qui donne lieu à Huygens de critiquer ces vantardises réelles ou apparentes ¹⁶⁾. Au § 17 de la Pièce I qui suit on trouvera un théorème général de Tschirnhaus, énoncé par lui sans démonstration, et sur la valeur duquel Huygens est apparemment en doute: ce théorème est exact. Il n'en est pas ainsi d'un autre théorème assez semblable discuté au § 1 de la Pièce I, et sur le sujet duquel Huygens disait en mars 1687 ¹⁶⁾: „Tangentium inven-

¹⁰⁾ Lettre du 15 mars 1692 (T. X, p. 270).

¹¹⁾ 1651-1709; mentionné pour la première fois à la p. 490 du T. VII.

¹²⁾ Tschirnhaus rendit visite à Huygens à la Haye en août ou septembre 1682 (T. VIII, p. 386) et en septembre 1694 (T. X, p. 697).

¹³⁾ Voyez p.e. la note 7 de la p. 254 du T. X.

¹⁴⁾ Comparez le „Vorwort" de H. Weissenborn de sa „Lebensbeschreibung von Ehrenfr. Walther von Tschirnhaus auf Kiesslingwalda, und Würdigung seiner Verdienste" (Eisenach, Bärecke, 1866).

¹⁵⁾ Voyez p.e. les p. 469-471 du T. VIII, datant de 1683.

¹⁶⁾ Voyez p.e. la p. 123 du T. IX, datant du 15 mars 1687.

tionem tuam in lineis circa plura centra descriptis vellem demonstratione confirmasses . . ." Huygens n'en avait pas encore reconnu la fausseté¹⁷⁾, lorsqu'il reçut trois jours plus tard la visite de N. Fatio de Duillier, jeune homme de 23 ans, qui l'avait aperçue¹⁸⁾.

Cette visite fut un grand événement dans la vie de Huygens: la jeunesse frappait à sa porte, non pas pour l'évincer, mais pour travailler avec lui¹⁹⁾. En 1692²⁰⁾ Huygens écrira à Fatio (résidant alors en Angleterre), en parlant de Leibniz: „Vous voila également éloignez de vouloir rien apprendre l'un de l'autre, qui est une délicatesse que je n'ay point, ainsi qu'il a paru; car *j'ay esté bien aise d'apprendre de tous les deux* [nous foulignons]."

La Pièce I fait voir comment Huygens, de concert avec Fatio, considéra, après la correction du théorème de Tschirnhaus dont nous avons parlé, en restant dans le même ordre d'idées, la méthode pour mener des tangentes aux courbes données en coordonnées bipolaires etc.²¹⁾ — Nous avons déjà parlé du § 17 qui fait bien voir que dans l'esprit de Tschirnhaus il s'agit en premier lieu de courbes pouvant être décrites par des fils tendus, comme c'était aussi le cas pour la première ovale de Descartes, dont la considération sous ce point de vue par Huygens se rattache à celles de la Pièce I: si nous l'avons néanmoins placée — plus ou moins arbitrairement — parmi les „*Mathematica varia* 1681 — 1695" c'est parce que cette ovale était une courbe fort connue à Huygens depuis sa jeunesse. On voit bien ici — nous pourrions dire la même chose pour la chaînette²²⁾ — que les „problèmes modernes" dont traite la présente Partie n'étaient pas en général des problèmes parfaitement nouveaux: la chose essentielle c'est l'évolution des méthodes qui permettait souvent de chercher les solutions avec plus de succès. Dans ses „*Commentarii in Librum II*" de la Géométrie de Descartes van Schooten n'avait pas tâché de justifier la construction de Descartes à l'aide d'un fil de la première ovale, comme le fait Huygens en 1690.

¹⁷⁾ C'est ce que Huygens dit expressément dans sa lettre à van Gent du 1 juillet 1687 (T. IX, p. 185) et de nouveau dans une lettre à Leibniz du 18 novembre 1690 (T. IX, p. 538).

¹⁸⁾ Nous avons déjà mentionné cette visite à la p. 396 qui précède.

¹⁹⁾ Fatio resta à la Haye jusqu'en mars 1687 (T. IX, p. 134).

²⁰⁾ T. X, p. 287.

²¹⁾ Voyez sur les publications de Fatio sur ces sujets en 1687 et 1689 dans la „Bibliothèque Universelle et Historique" les p. 154 et 175 du T. IX ainsi que la note 14 à la p. 219 du même Tome.

²²⁾ Voyez les p. 37 et suiv. du T. XI datant de 1646.

Dans la Pièce I les §§ 6 et 7 sortent du cadre, puisqu'il y est question de tangentes à la parabole et à la circonférence de cercle données l'une et l'autre en coordonnées cartésiennes, la direction d'une tangente étant déterminée, directement, par le calcul du rapport de deux côtés du triangle caractéristique fort ou plutôt infiniment petit. Comparez la note 9 de la p. 482.

Ces calculs eurent aussi pour résultat de mettre Huygens en état de résoudre à sa manière — voyez le § 16 de la Pièce I — le problème posé par Leibniz en janvier 1680 que ce dernier intitule „Exemplum ex Nova mea Tangentium Methodo ductum”²³⁾, que nous avons publié à la p. 269 du T. VIII en disant (note 3): „Dans les Oeuvres inédites qui suivront cette Correspondance, nous aurons l'occasion de revenir sur ces recherches de 1687”. Nous ne jugeons pourtant pas nécessaire de reproduire dans le présent Tome les p. 17 — 19 du Fasciculus II de P. J. Uyenbroek (1833), où celui-ci indique quelle aurait été la forme de la démonstration d'après les idées de Leibniz.

Comme Huygens, Fatio était avant tout géomètre. „Les lignes droites”, dit-il, „sont plus commodes que les nombres, pour exprimer toutes sortes de proportions”²⁴⁾.

En 1691 — comparez la p. 396 qui précède — le jeune suiffe revint à la Haye pour y rester plusieurs mois. Entretemps il avait été en Angleterre, où il devait passer le reste de sa longue vie: il en revenait plein de respect pour les méthodes anglaises — nous rappelons que les „Principia” de Newton avaient paru en 1687 peu après les recherches du § 1 de la Pièce I qui suit —, bien convaincu aussi qu'il avait appris à connaître plutôt les résultats obtenus par ces méthodes, que les méthodes elles-mêmes²⁵⁾. On fait que Newton, quoiqu'il parle de sa méthode des fluxions dans le Lemma II de la Sectio II du Liber Secundus, avait en général donné à son livre une forme géométrique qui en rend la lecture malaisée. Dans une lettre à Römer de septembre 1690²⁶⁾

²³⁾ Ce ne fut pourtant qu'en 1684 (Acta Eruditorum, mois d'octobre) que Leibniz publia sa „Nova methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas nec irracionales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus”.

²⁴⁾ T. IX, p. 158. C'est une citation de l'article de 1687, déjà mentionné dans la note 21 de la p. 484, qui est intitulé: „Reflexions de Mr. N. Fatio de Duillier sur une methode de trouver les tangentes de certaines lignes courbes, laquelle vient d'être publiée dans un Livre [de Tschirnhaus] intitulé Medicina Mentis”.

²⁵⁾ Comparez les deux dernières lignes de la p. 376 qui précède.

²⁶⁾ T. IX, p. 490.

Huygens parle du „Newtoni librum . . . in quo obscuritas magna . . . attamen multa acute inventa”. C’est en 1691, plus encore qu’en 1687, que Fatio et Huygens travaillèrent ensemble. La Pièce III qui suit, de beaucoup la plus longue des Pièces de la présente Partie, fait voir que la méthode de Fatio pour résoudre *le problème inverse des tangentes* fut amplement considérée par les deux savants. Il y a des pages (voyez nos §§ 13 — 18) où les mains de Fatio et de Huygens alternent dans le Manuscrit, comme on en trouve ailleurs, datant de 1675-1676, où alternent celles de Leibniz et de Tschirnhaus²⁷⁾. Vu le grand intérêt témoigné par tant d’historiens pour tout ce qui se rattache à la période de l’enfance du calcul infinitésimal moderne (étroitement lié, il est vrai, à des spéculations antiques, notamment à celles d’Archimède), nous croyons bien faire de publier toutes ces pages in extenso.

Fatio avait déjà donné un aperçu de sa méthode dans sa lettre à Huygens du 24 juin 1687²⁸⁾; mais la chose en resta là jusqu’à la visite à la Haye de 1691. Voyez, au début du § 3 de la Pièce III, ce que nous disons sur des exposés plus complets, respectivement par Fatio et par Huygens, en 1691 et en 1693.

Dans le même temps Huygens était en correspondance avec Leibniz qui d’ailleurs lui avait demandé déjà en 1679²⁹⁾ s’il avait „quelque beau probleme, qui dépende à Methodo Tangentium inversa” disant „je serois bien aise de voir si j’en pourrois venir à bout”; mais alors Huygens n’avait pas satisfait à cette demande, et la correspondance était demeurée interrompue depuis janvier 1680³⁰⁾ jusqu’à janvier 1690 (avec l’exception d’une lettre de Leibniz de janvier 1688³¹⁾); voyez ce que nous disons dans la note 30 sur cette lettre et sur la Pièce II qui suit). En 1690 les lettres échangées furent au nombre de onze, en 1691 de quatorze. Ce fut dans la lettre du 24 août 1690³²⁾, où Huygens dit: „J’ay vu de temps en temps quelque chose de Vostre nouveau calcul Algebraique dans les Actes de Leipfich, mais y trouvant de l’obscurité, je ne l’ay pas assez étudié pour l’entendre, comme aussi parce que je croiois

²⁷⁾ H. Weissenborn, ouvrage cité dans la note 14 de la p. 483, p. 5.

²⁸⁾ T. IX, p. 167.

²⁹⁾ T. VIII, p. 215, lettre du 8 septembre 1679.

³⁰⁾ La dernière lettre de Leibniz de cette période, celle de janvier 1680, contient le problème dont il est question dans le deuxième alinéa de la p. 485 qui précède et que Huygens ne résolut, comme on l’a vu, que dans la première moitié de 1687. La lettre de janvier 1688 se rapporte à la solution par Huygens en octobre 1687, d’un problème proposé publiquement par Leibniz (Pièce II qui suit).

³¹⁾ T. IX, p. 257.

³²⁾ T. IX, p. 470.

avoir quelque methode equivalente, tant pour trouver les Tangentes des Lignes courbes où les regles ordinaires ne servent pas, ou fort difficilement [est-ce une allusion au calcul de la tangente à la courbe logarithmique, à l'aide du triangle caractéristique, note 9 de la p. 482? ou plutôt à celui du calcul de la Pièce I de 1687, ayant trait aux courbes données en coordonnées bipolaires etc? c'est bien plus probable puisque par ce dernier calcul Huygens avait résolu le problème de Leibniz dont il est question dans la note 30], que pour plusieurs autres recherches", que Huygens proposa enfin à Leibniz quelques problèmes dépendant de la „Methodus Tangentium inversa": les sous-tangentes données étaient $\frac{y^2}{2x} - 2x$ et $\frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}$, choisies comme

le dit le passage du Manuscrit G qui constitue l'Appendice à cette lettre. Leibniz trouva des solutions. Nous croyons inutile de résumer la correspondance ultérieure de 1690 entre Huygens et Leibniz, où il est encore question d'autres sous-tangentes et des courbes correspondantes: elle est pourvue, comme nous l'avons dit plus haut, de notes explicatives et d'Appendices empruntés aux manuscrits. Le lecteur qui s'intéresse au sujet peut bien prendre la peine de la lire lui-même.

On conçoit maintenant que puisque Huygens, au moment de recevoir la deuxième visite de Fatio, était déjà en correspondance depuis plusieurs mois avec Leibniz sur le problème inverse des tangentes, la méthode de Fatio fut accueillie par lui avec beaucoup d'intérêt; et que dans la Pièce III on rencontre plusieurs fois le nom du savant allemand ainsi que les équations déjà examinées. Dans sa lettre du 23 février 1691 ³³⁾ Huygens ne cache pas à Leibniz que Fatio est à la Haye, que sa méthode se perfectionne, et qu'il „m'a trouvé les deux mêmes courbes dont je vous avois proposé les sous-tangentes". Il fut bientôt question d'un échange des méthodes, premièrement proposé par Leibniz en mars 1691 ³⁴⁾; on trouve dans notre T. X l'histoire des pourparlers sur cet échange qui en fin de compte n'eut pas lieu; la discussion se prolongea jusqu'en mai 1692. „Eruditi fontes inventionis alijs non libenter communicant" disait Tschirnhaus en 1687 ³⁵⁾.

Huygens traita aussi du problème des tangentes renversées dans sa correspondance avec le jeune Marquis de l'Hospital qui avait déjà pris son parti en 1690 dans la ques-

³³⁾ T. X, p. 21.

³⁴⁾ T. X, p. 50.

³⁵⁾ T. IX, p. 178.

tion du centre d'oscillation³⁶⁾. Pas moins de 28 lettres échangées de 1692 à 1695 se trouvent dans notre T. X. N'ayant que fort peu à ajouter à cette importante correspondance, nous ne croyons pas qu'il y ait lieu de la résumer ici. On n'y remarque guère de réticences. Qu'on relise p.e. la lettre de Huygens, mentionnée au début du § 3 de la Pièce III, où il expose la méthode de Fatio, ou la fin de son article de 1693 dans l'Histoire des Ouvrages des Sçavans" (No 2793, p. 481 qui précède) où il fait l'éloge du Marquis. Ce dernier, ayant mieux pu assimiler les méthodes leibniziennes, se montrait en effet plus avancé que Huygens dans l'art, si important et si complexe encore aujourd'hui, d'intégrer les équations différentielles.

Il convient de ne pas terminer cet Avertissement sans dire encore un mot du calcul anglais des fluxions. En juin ou juillet 1693³⁷⁾ Huygens reçut la visite de David Gregory qui lui communiqua une certaine règle et lui parla de Newton. Huygens communiqua à son tour à Leibniz „l'extrait de l'ouvrage de Mr. Wallis touchant M. Newton" qu'il avait reçu en cette occasion³⁸⁾. Le 29 mai 1694³⁹⁾ Huygens écrit à Leibniz: „Mr. Wallis m'a envoié la nouvelle edition Latine de son grand ouvrage de *Algebra*, augmenté de quelque chose de nouveau des series de Mr. Newton, où il y a des equations differentielles, qui ressemblent tout à fait aux vostres, hormis les caracteres". A quoi il ajoute le 16 juin dans une lettre à de l'Hospital⁴⁰⁾, après avoir cité Wallis disant que la méthode exposée par Barrow dans ses „*Lectiones Geometricæ*" est plus ancienne que celles de Newton et de Leibniz et que „quod ab his duobus est superadditum, est formularum analyseos brevium et commodarum adaptatio illius theorijs": „En quoy pourtant il [Wallis] fait tort à ces Messieurs".

³⁶⁾ T. XVIII, p. 457 et suiv.

³⁷⁾ T. X, p. 462.

³⁸⁾ T. X, p. 669, 675.

³⁹⁾ T. X, p. 610.

⁴⁰⁾ T. X, p. 623.

PROBLÈMES ET MÉTHODES MODERNES.

- I. FATIO DE DUILLIER ET HUYGENS. MÉTHODE DES TANGENTES POUR LES „CURVÆ FILARES” DE TSCHIRNHAUS, OU PLUTÔT POUR LES COURBES DONNÉES EN COÖRDONNÉES BIPOLAIRES, TRIPOLAIRES ETC., LES POLES ÉTANT SITUÉS SUR UNE LIGNE DROITE (1687).
- II. SOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ PAR M. LEIBNITZ DANS LES NOUVELLES DE LA RÉPUBLIQUE DES LETTRES DU MOIS DE SEPTEMBRE 1687¹⁾ (SUR LA COURBE DE DESCENTE UNIFORME) (1687).
- III. FATIO DE DUILLIER ET HUYGENS. RÈGLE POUR TROUVER L'ÉQUATION D'UNE COURBE LORSQUE LA SOUSTANGENTE EST DONNÉE EN COÖRDONNÉES CARTÉSIENNES („PROBLÈME INVERSE DES TANGENTES” OU „PROBLÈME DES TANGENTES RENVERSÉES”) (1691).
- IV. METHODUS LEIBNITIJ¹⁾ (1691).
- V. A PROPOS DE LA MÉTHODE DU MARQUIS DE L'HOSPITAL (1692).
- VI. LE PROBLÈME DE LA CHAÎNETTE, ETC. (1691 ET 1693).
- VII. SOLUTION D'UN PROBLÈME MATHÉMATIQUE PROPOSÉ PAR JEAN BERNOULLI (1693 ET 1694).
- VIII. A PROPOS DES „REFLECTIONS UPON ANCIENT AND MODERN LEARNING” DE W. WOTTON (1694 OU 1695).

¹⁾ C'est ainsi que Huygens lui-même intitule cette Pièce.

I.

FATIO DE DUILLIER ET HUYGENS. MÉTHODE DES TANGENTES
POUR LES „CURVÆ FILARES” DE TSCHIRNHAUS, OU PLUTÔT
POUR LES COURBES DONNÉES EN COÖRDONNÉES BIPOLAIRES,
TRIPOLAIRES ETC., LES POLES ICI CONSIDÉRÉS ÉTANT
SITUÉS SUR UNE DROITE.

1687.

§ 1¹⁾. 1687. 13 ou 14 martij, M^r. de Duillers me communiqua sa methode des Tangentes pour les lignes courbes de M^r. de Tschirnhaus, par la quelle il paroïssoit que ce dernier s'estoit trompé dans une chose ou il se vante d'avoir merveilleusement reussi.

Voyez sur les courbes de Tschirnhaus le § 17 qui suit ainsi que les p. 483—484 de l'Avertissement qui précède.

Le lendemain je luy montray ma demonstration exacte de sa methode, et remarquay qu'on pouvoit proceder de l'une ligne a l'autre, une à une.

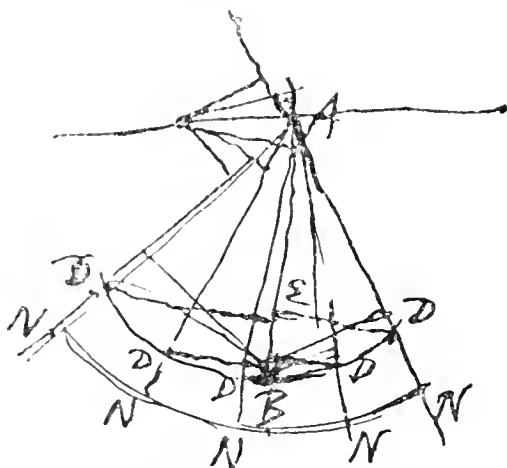
Dimanche le 16 je trouvay que la perpendiculaire a la tangente devoit passer par le centre de gravité de tous les fils qui servent a la description de la courbe, en prenant sur elles [lisez: sur eux] des portions egales depuis le point donné, et le montray dans les cas de deux et de trois fils.

Lundi 17 je dis cela a M^r. de Duillers, qui voulut le nier d'abord, ayant pourtant esté fort pres de trouver la mesme chose, mais l'ayant en suite rejetée, et ayant écrit à costé de son raisonnement *Cecy est fort douteux, et ainsi ma belle Methode ou Theorie*

¹⁾ Manuscrit F, p. 271. Notre „§ 1” a été imprimé en partie — comparez la note 2 de la p. 181 du T. IX — par P. J. Uyenbroek aux p. 56 et 57 du Fasciculus II des „Christiani Hugeni aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicæ et philosophicæ”. Hagæ Comitum, ex typographia regia, MDCCCXXXIII. Le § 2 s'y trouve en entier aux p. 57—58.

court grand risque d'estre fausse. Cependant ce qu'il avoit trouvé de la somme egale des sinus, servoit a demontrer facilement le Theoreme susdit du centre de gravité, et estoit fort beau. Voiez à la page precedente [c. à. d. le § 2 qui suit].

[Fig. 99]



AB estoit le vray axe de pesanteur des fils.

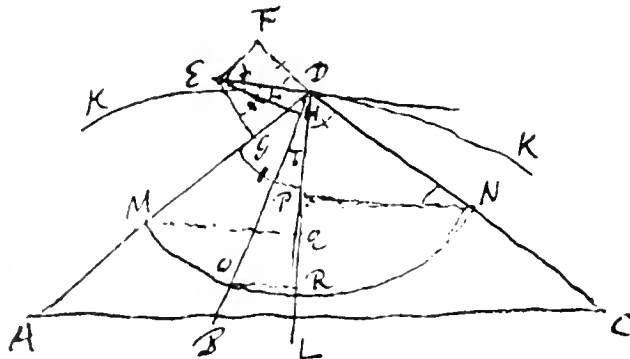
Après le 17 mars Huygens resta en communication avec Fatio de D.: on lit au bas de la feuille; presté le recueil des Journaux de 1685 [il s'agit sans doute du Journal des Scavans ou peut-être aussi des Acta Eruditorum] à M.^r Duilliers 20 Mars 1687.

§ 2²⁾. A, B, C [Fig. 100] puncta data in linea recta vel utcunque. KDK curva ejusmodi naturæ ut ductis ad ejus punctum quodlibet rectis AD, BD, CD. harum summa sit datæ rectæ æqualis. quæritur tangens in D.

Sit ea DE, et E punctum proximum D. idque censendum in curva existere. Ab E in rectas AD, BD, CD, si opus est productas, cadant perpendiculares EG, EH, EF.

Ergo si ex A, B, C ducentur rectæ ad E, crescet ea quæ ex C longitudine DF,

[Fig. 100]



²⁾ Manuscrit F, p. 270.

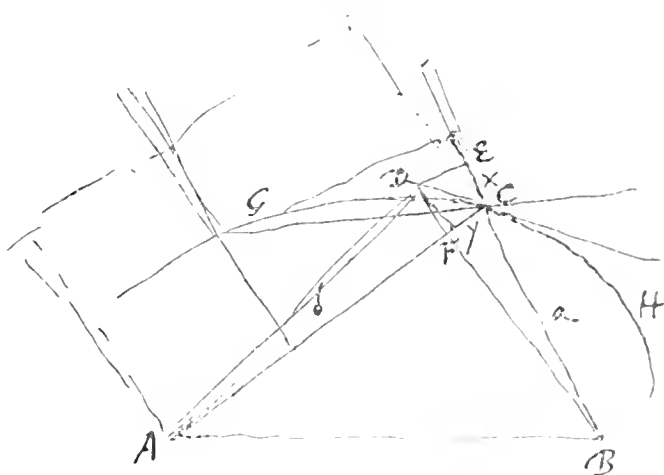
quæ ex B diminuetur longitudine DH, quæ ex A diminuetur item longitudine DG. Ergo ut summa ductarum ex A, B C, ad E sit æqualis tribus ex A, B, C ad D ductis, hoc est rectæ datæ, oportet DF æquari duabus DH, DG.

Sit tangenti DE perpendicularis DL, et ex D descripta circumferentia secet rectas AD, BD, CD in M, O, N. unde ducantur in DL perpendiculares MQ, OR, NP. Quod si jam pro radio circuli sumatur DE, apparet angulorum DEF, DEH, DEG esse sinus DF, DH, DG. Istis autem angulis æquales sunt singulis singuli PDN, RDO QDM, quorum sinus sunt NP, OR, MQ. Ergo sicut sinus DF æquatur duobus DH, DG, ita sinus NP æquabitur duobus OR, MQ. Unde facile colligitur punctorum M, O, N centrum gravitatis esse in recta DL. Itaque reperto hoc centro, dabitur recta DL, quæ tangenti DE est ad angulos rectos. Eadem vero est constructio quocumque data fuerint puncta [unde rectæ] ad D ducendæ quarum summa sit data.

§ 3³⁾. *Ratio inveniendarum tangentium in curvis lineis.*

Ponitur CD [Fig. 101] esse tangens quæsitæ in puncto C. in ea proximè puncto C,

[Fig. 101]



accipi intelligitur punctum D. quod idem in curva proposita esse censetur. Ex D cadant perpendiculares in AC et BC, nempe DF, DE. Recta AC superare censetur

³⁾ Les §§ 3—7 se trouvent à la p. 272 du Manuscrit F. Le § 3 a été publié par Uylenbroek à la p. 24 du Fasciculus II. Les p. 24—28 de ce fascicule contiennent aussi des fragments des §§ suivants, jusqu'au § 16 inclus.

rectam AD differentiâ FC quia DF minima respectu AF. Item BD superare censetur rectam BC, differentia CE. CE vocatur x . CF, y . quarum si inter se ratio cognoscatur, dabitur D punctum in concursu perpendicularium ED, FD. adeoque tangens CD. Ista vero ratio investigatur ex æquatione in qua ponitur parte una proprietas curvæ lineis datis AC, CB expressa; parte altera eadem proprietas expressa lineis AD, BD, seu pro ijs AF, EB.

Vel tantummodo exprimaturs proprietas curvæ positis $a + x$ et $b - y$ pro a et b . et deleantur omnia præterquam in quibus unum x aut y . Ut deleantur etiam in quibus x et y conjunctim. Reliqua dabunt rationem x ad y ac proinde tangentis constructionem.

§ 4. Proprietas curvæ $da + db \propto ab$. d linea data.

$$\frac{a + x + b - y}{d} = \frac{a + x}{b - y}$$

$$\frac{da + dx + db - dy}{dx - bx \propto dy - ay - xy} = \frac{ab + bx - ay - xy}{dx - bx \propto dy - ay - xy}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a - d}{b - d}$$

§ 5. Proprietas curvæ ut $a^3 + b^3 \propto d^3$ datæ.

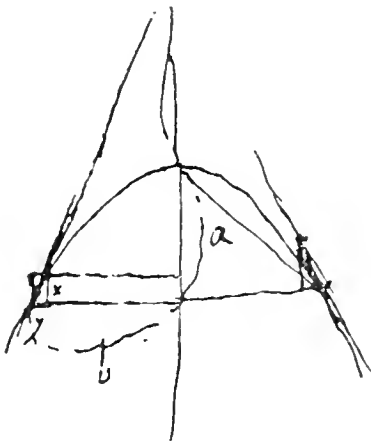
$$\frac{d^3 \propto a^3 + 3aax + 3axx + x^3 + b^3 - 3bby + 3byy - y^3 \propto a^3 + b^3 \propto d^3}{3aax \propto 3bby}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{bb}{aa}$$

§ 6. Les §§ 6 et 7 sortent du cadre de la Pièce I: il ne s'agit pas ici de coördonnées bipolaires (ou tripolaires etc.), mais de coördonnées cartésiennes orthogonales; a et b sont les coördonnées courantes, x et y leurs accroissements. Le rapport $y:x$ détermine la direction de la tangente.

Parabola [Fig. 102]. r latus rectum.

[Fig. 102]



$$\frac{a - x}{r} = \frac{b - y}{b - y}$$

$$\frac{ar - rx}{rx \propto 2by} = \frac{bb - 2by + yy}{rx \propto 2by}$$

$$\frac{r}{2b} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\frac{1}{2}r}{b} = \frac{y}{x} \text{ bon.}$$

§ 7. In circulo.

$$\frac{+aa + 2ax + xx + bb - 2by + yy \propto aa \propto bb}{2ax \propto 2by}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$$

§ 9⁵⁾ Les équations qui suivent font voir qu'ici le produit cd des deux rayons vecteurs est par hypothèse constant. Il s'agit donc de la courbe qui plus tard recevra le nom de lemniscate.

$$\left. \begin{aligned} c + \frac{ne}{c} + \frac{nne}{cx} - \frac{ce}{x} \\ d + \frac{oe}{d} + \frac{ooe}{dx} - \frac{ed}{x} \end{aligned} \right\} \text{mult. [Fig. 103]}$$

Omittuntur in quibus plura e quam unum.

$$\frac{dc + \frac{dne}{c} + \frac{dnne}{cx} - \frac{2dce}{x} - \frac{coe}{d} + \frac{cooe}{dx} \propto cd}{\frac{ddnx + d^2nn + ccoo \propto ccox + 2ddcc}{NT \propto \frac{2ddcc - ddnn - ccoo}{ddn - cco}}}$$

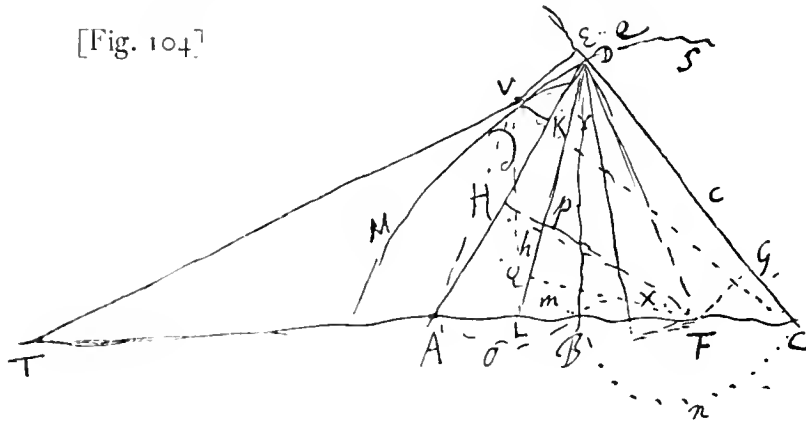
Atqui $cc - nn \propto pp$ atque etiam $dd - oo \propto pp$. Huygens désigne donc maintenant par p ce qui dans la Fig. 103 s'appelle y , et dans la Fig. 104 s'appellera p .

$$NT \propto \frac{ddpp + ccpp}{ddn - cco} = p \frac{ddn - cco}{dd + cc} ON$$

N.B. quod hic [c. à. d. dans les facteurs $c + \frac{ne}{c}$ etc. et $d - \frac{oe}{d}$ etc.] in numeratoribus nullum x , et unum e vel nullum, et in denominatoribus tantum unum x . Cumque in aequatione tantum scribenda sunt in quibus unum e vel nullum, hinc fit ut, sive quadrata inventarum linearum sive cubi sive rectangula ex duabus, vel solida ex tribus, efficienda sint, semper tamen simplex x aequale proditurum sit quantitati cognitæ.

§ 10⁵⁾. Le calcul suivant s'applique à la Fig. 104. Le résultat est le même que celui obtenu dans le § 9: ce qui plus haut s'appelait ON est maintenant désigné par BF ou x .

[Fig. 104]



⁵⁾ Manuserit F, p. 274.

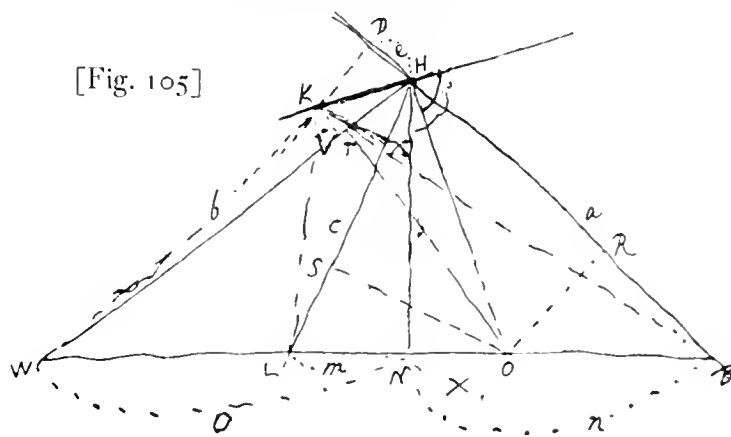
Proprietas curvæ MDS, ut semper \square duarum ex C et A punctis ad ipsam ductarum eidem spatio qq aequale sit.

CD	DB	CF	
c	p	$n - x \left/ \begin{smallmatrix} p^n \\ c \end{smallmatrix} \right.$	FG
d	p	$n + x \left/ \begin{smallmatrix} p^n \\ d \end{smallmatrix} \right.$	FH
FG	FH	DE	
$\frac{pn - px}{c}$	$\frac{p^n + px}{d}$	$e \left/ \begin{smallmatrix} coe + cxe \\ dn - dx \end{smallmatrix} \right.$	DK
		ex d	DA
			s.
		$\frac{ddn - ddx - coe - cxe}{dn - dx}$	AK
		$c + e$	CE
			m.
<hr/>			
$\frac{cddn - cddx - coe - cxe + ddne - ddx - coe - cxe}{dn - dx}$			

$$cco + ccx + dd x \propto ddn$$

$$\text{BF} \propto \frac{ddn - cco}{cc + dd} \quad \text{convenit cum ON [Fig. 103 et Fig. 105]}$$

§ 11⁶). Hoc modo optimè et brevissimè ad æquationem pervenitur [Fig. 105]. Idem hic modus est qui in fine paginæ præcedentis [§ 10].



⁶⁾ Manuscrit F, p. 275.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{BH} & \text{---} & \text{HN} & \text{---} & \text{BO} & \text{---} & \text{OR} \\
 a & \text{---} & p & \text{---} & n-x & \text{---} & \frac{pn-px}{a} \\
 \text{LH} & \text{HN} & \text{LO} & & & & \\
 c & \text{---} & p & \text{---} & m+x & \text{---} & \frac{pm+px}{c} \text{ OS} \\
 \text{OR} & & \text{OS} & & \text{HD} & & \\
 \frac{pn-px}{a} & \text{---} & \frac{pm+px}{c} & \text{---} & e & \text{---} & \text{HX nam } \triangle \text{ HOR simile}
 \end{array}$$

KHD et \triangle HOS simile KHX ut facile apparet propter angulum rectum OHK. nam HO ponitur perpend. in tangentem HK.

$$\begin{array}{l}
 cn - cx \text{ --- } am + ax \text{ --- } e \text{ --- } \frac{ame + axe}{cn - cx} \text{ HX} \\
 c \frac{ame - axe}{cn - cx} \text{ LX pro LK} \quad a + e \text{ BD pro BK} \\
 \left. \begin{array}{l} c \frac{ame - axe}{cn - cx} \text{ LK} \\ a + e \text{ BD} \end{array} \right\} m.
 \end{array}$$

$$ac + ce \frac{-aame - aaxe}{cn - cx} \propto ac \square \text{ BH, HL}$$

$$ccne - ccxe - aame - aaxe \propto 0$$

$$\frac{ccn - aam}{cc + aa} \propto x \text{ ON}$$

ON [ou plutôt BF] ex pag. ante præcedentem $\frac{ddn - cco}{dd + cc}$ convenit cum hac ON (d pro c , c pro a , o pro m), fed hic facilius invenitur.

§ 12. Cas où la courbe considérée est déterminée par la constance de la somme des deux rayons vecteurs c et d :

$$\left. \begin{array}{l} c + \frac{ne}{c} + \frac{nne}{cx} - \frac{ce}{x} \\ c + \frac{ne}{c} + \frac{nne}{cx} - \frac{ce}{x} \end{array} \right\} \text{ [termes obtenus au § 8]}$$

$$c^3 + 3nec + \frac{3nne}{x} - \frac{3c^3e}{x} + d^3 - 3doe + 3\frac{doo}{x} - 3\frac{d^3e}{x} \propto c^3 + d^3$$

$$3nec + 3nne - 3c^3 - 3dox + 3doo - 3d^3 \propto 0$$

$$x \propto \frac{d^3 + c^3 - doo - cmm}{cn - do}$$

Sed $dd - oo \propto pp, cc - nn \propto pp$ NT $x \propto \frac{dpp + cpp}{cn - do}$ [Fig. 103 où toutefois p s'appelait y]

$$x \propto \frac{pp}{cn - do} \frac{d + c}{d + c}$$

$$NO \propto \frac{cn - do}{d + c}$$

§ 13. Proprietas ut solidum trium rectarum à punctis B, L, W [Fig. 105] ad curvæ punctum ductarum, semper eidem solido æquale fit. Solidum $d^3 \propto acb$.

$c \frac{ame - axe}{cn - cx}$ LX pro LK [voyez le § 11]. $b \frac{aoe - axe}{bn - bx}$ WV pro WK.
 $a + e$ BD pro BK.

C'est de ces formules que Huygens fera usage dans le Manuscrit G en considérant la première ovale de Descartes; voyez, à la p. 463 qui précède, la Pièce IV des „Mathematica varia 1681-1695”.

$$cb \frac{bame - baxe}{cn - cx} \quad \frac{caoe - caxe}{bn - bx} \quad a + e$$

$$ecb + acb \frac{baame - baaxe}{cn - cx} \frac{aacoe - aacxe}{bn - bx} \propto d^3$$

$$0 \propto ncbe - xcbe \frac{baame - baaxe}{c} \frac{aacoe - aacxe}{b}$$

$$\frac{nccbb - bbaam - aacco}{ccbb + aabb + aacc} \propto x$$

§ 14. Proprietas ut summa quadratorum ab L et B punctis [Fig. 105] ad curvam inclinatarum fit semper eidem spatio æqualis.

$$aa + cc \propto cc \frac{2cme - 2acxe}{cn - cx} \text{ qu. LX} + aa + 2ae \text{ qu. BD}$$

$$- 2cme - 2acxe + 2acne - 2acxe \propto 0$$

$$\frac{acn - acm}{2ac} \propto x$$

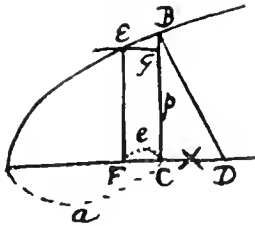
$$\text{five } \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}m \propto x$$

hic curva fit circuli circumferentia ⁷⁾.

⁷⁾ Puisque $x + m = \frac{1}{2}(m + n) = LO$, de sorte que toutes les normales à la courbe passent par le même point O (situé au milieu de LB).

§ 15⁸⁾. r latus rectum parabolæ [Fig. 106]. $pp \propto ar$.

[Fig. 106]



$$\begin{array}{ccc} BC & CD & EG / GB \\ p & x & e \end{array} \bigg/ \frac{ex}{p}$$

$$p - \frac{ex}{p} GC \propto EF$$

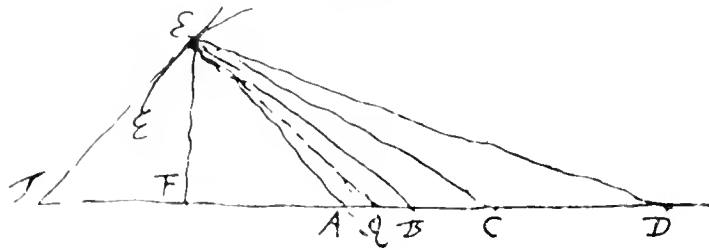
$$\frac{p - ex}{pp - 2ex} \propto ar - re \text{ qu. FE}$$

$$\frac{ar - 2ex \propto ar - re}{x \propto \frac{1}{2}r}$$

$$x \propto \frac{1}{2}r$$

§ 16⁹⁾. Natura curvæ EE [Fig. 107] est hæc ut fit $\frac{abcd}{g} \propto abc + bcd + cda + dab$ [AE = a, BE = b, CE = c, DE = d]. EQ perpend. tangenti ET.

[Fig. 107]



$$c - \frac{ame - axe}{-cn + cx} \quad [= c + \Delta c]$$

$$b - \frac{aoe - axe}{-bn + bx} \quad [= b + \Delta b]$$

$$d - \frac{aqe - axe}{-dn + dx} \quad [= d + \Delta d]$$

$$a + e \quad [= a + \Delta a]$$

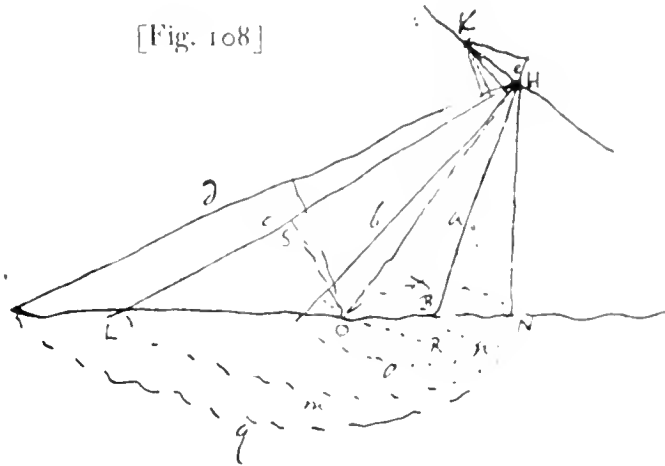
Voyez les §§ 11 et 13 qui précèdent sur ces expressions qui représentent les accroissements $[\Delta a, \Delta b, \Delta c, \Delta d]$ des quatre rayons vecteurs lorsqu'on passe du point H au point K [Fig. 108]. HK est donc un élément de la courbe et en même temps de la tangente. HO \perp HK est la normale à la courbe au point H.

⁸⁾ Manuserit F, p. 276.

⁹⁾ Manuserit F, p. 276—277.

Huygens écrit que l'accroissement de $\frac{abcd}{g}$ (g étant apparemment une constante), lorsqu'on

[Fig. 108]



passé du point H au point K, est égal à celui de $abc + bcd + cda + dab$.

En effectuant la multiplication $[c + \Delta c][b + \Delta b][d + \Delta d][a + \Delta a]$, où il néglige les termes contenant e à un degré supérieur au premier, en retranchant ensuite $cbda$ de ce premier produit, et en divisant finalement par g , il trouve ce que nous appelons $\frac{1}{g} \Delta(abcd)$, accroissement de $\frac{abcd}{g}$.

De la même manière il trouve $\Delta(abc)$ etc.

L'équation $\frac{1}{g} \Delta(abcd) = \Delta(abc + bcd + cda + dab)$ permet, après division par e , de trouver l'inconnue x . Huygens obtient

$$\left. \begin{array}{l} -nc^2bdd - aabddm - baaceq \\ -ncbbdd - aacddo - caabbq \\ -nbbdce - aadbmm - daacco \\ -ddbam - ddcca - bbccaq \end{array} \right\} \text{in } g. \quad \begin{array}{l} + nddbcc + aadbbm \\ + aaddec + aabbccq \end{array}$$

$\infty x \infty NO$

$$\left. \begin{array}{l} -bccdd - aabdd - baacc \\ -bbcedd - aacdd - caabb \\ -ccbbd - aabdd - daacc \\ -ddbba - ddcca - bbcca \end{array} \right\} g \quad \begin{array}{l} + ddbbcc + aadbbb \\ + aaddec + aabbcc \end{array}$$

[Fig. 108]

Si restituatur valor g qui est $\frac{abcd}{abc + bcd + cda + dab}$ fit x hic idem quod QF Leibnitzio pag. sequenti [Fig. 107].

Constructio Leibnitzij [il s'agit — voyez la note 30 de la p. 486 — de la construction indiquée dans le tableau du N° 2214, T. VIII, p. 269, Leibniz à Huygens, 26 janvier 1680]. $y = GF$ [lisez

EF, Fig. 107]. $s = \text{TF} \cdot \frac{g^3 y}{a^3} + \frac{g^3 y}{b^3} + \frac{g^3 y}{c^3} + \frac{g^3 y}{d^3} - \frac{g^3 n}{a^3} + \frac{g^3 o}{b^3} + \frac{g^3 m}{c^3} + \frac{g^3 q}{d^3} -$
 $\frac{\text{TF}}{s} \frac{\text{EF}}{y}$. Par n, o, m , et q il faut entendre FA, FB, FC et FD, Fig. 107: comparez les Fig.
 104 et 105.

$$\text{Omissis } g^3 \frac{\frac{yy}{a^3} + \frac{yy}{b^3} + \frac{yy}{c^3} + \frac{yy}{d^3}}{\frac{n}{a^3} + \frac{o}{b^3} + \frac{m}{c^3} + \frac{q}{d^3}} \propto s \propto \text{TF}$$

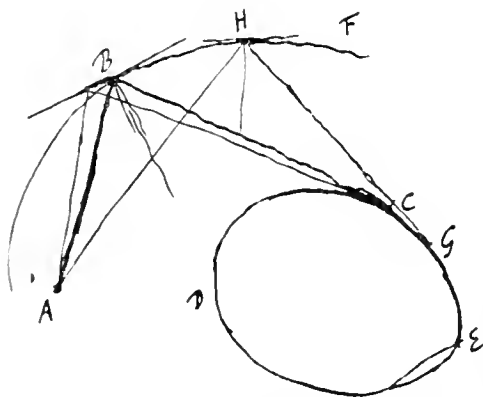
TF $\frac{b^3 c^3 d^3 yy + c^3 d^3 a^3 yy + d^3 a^3 b^3 yy + a^3 b^3 c^3 yy}{b^3 c^3 d^3 n + c^3 d^3 a^3 o + d^3 a^3 b^3 m + a^3 b^3 c^3 q} - \frac{\text{EF}}{y} - \frac{\text{EF}}{y} / \text{FQ Leibnit}$
 zio¹⁰), mihi NO [Fig. 108].

$\frac{b^3 c^3 d^3 n + c^3 d^3 a^3 o + d^3 a^3 b^3 m + a^3 b^3 c^3 q}{b^3 c^3 d^3 + c^3 d^3 a^3 + d^3 a^3 b^3 + a^3 b^3 c^3} \propto \text{FQ} \propto x \propto \text{NO}$ mihi [comme Huygens le
 disait plus haut, d'après la formule pour x , en y substituant $g = \frac{abcd}{abc + bcd + cda + dab}$].

§ 17. Les „curvæ filares“ (expression de Huygens) considérées par Tschirnhaus ne sont pas exclusivement celles où les fils sont tendus par des points matériels (ou plutôt, pour fixer les idées, par des stylets linéaires perpendiculaires au papier) demeurant tous en repos à l'exception de celui dont la pointe trace la courbe: ils peuvent également être tendus par des courbes convexes fixes et rigides situées, comme les points fixes, dans le plan du papier ou, si l'on préfère cette expression, dans le plan de la „curva filaris“.

Le passage suivant du Manuscrit G¹¹), ou plutôt la Fig. 109 à laquelle il se rapporte, fait bien voir, lorsqu'on considère A comme un point lumineux, le rapport existant entre des courbes ainsi construites et certaines catacaustiques¹²).

[Fig. 109]

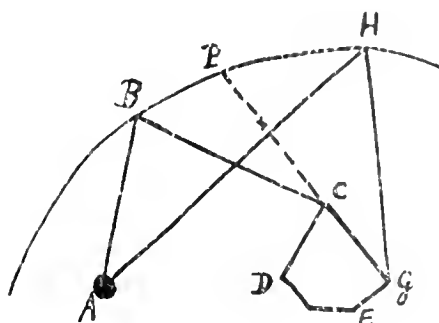


Si ABCE sit filum, defixum in A puncto et ambiens curvam CE¹³). Eoque semper tenso describatur curva BF. Ostendendum rectas AB, BC curvæ BF vel rectæ ipsam tangenti in B, æqualibus angulis occurrere. Ostendendum deinde expuncto B non posse exire nisi unam curvam ut BHF¹⁴), ita comparatam ut ducta a puncto ejus aliquo H recta AH, et HG tangente curvæ CE, utraque AH, HG occurrant curvæ BHF angulis æqualibus. Hæc D°. Tschirnhaus demonstranda sunt.

Nous avons déjà fait mention en termes généraux de ce théorème de Tschirnhaus à la p. 483 de l'Avertissement qui précède. Or comme Tschirnhaus l'affirme, le théorème — dont il ne

donne pas la démonstration disant qu'elle serait très longue ¹³⁾ — est correct quoique Huygens semble ne pas en avoir trouvé la preuve, sans doute faute d'y réfléchir sérieusement. Il suffit, pour en faire voir la vérité, de remplacer la courbe fixe par un polygone. Dans le cas de la Fig. 109 bis la „curva filaris” BH se compose de deux (etc.) arcs d'ellipse se raccordant au point P et dont le

[Fig. 109 bis]



premier a pour foyers les points A et C, le deuxième les points A et G. Il est donc évident que la tangente est perpendiculaire, d'abord à la bissectrice de l'angle ABC, ensuite à celle de l'angle AHG. Or, ceci reste vrai, quelque grand que soit le nombre des côtés du polygone; l'on peut être assuré qu'il en fera encore de même à la limite lorsque le polygone, pour nous exprimer ainsi, devient une courbe. Comparez sur les démonstrations de ce genre les notes 1 de la p. 388, 4 de la p. 401 et 9 de la p. 403 du T. XVIII. Notre démonstration reste valable lorsque, comme dans certaines figures de Tschirnhaus, le point fixe A est remplacé lui aussi par une courbe convexe fixe.

Il est de plus évident que dans le cas de la Fig. 109 bis, et par conséquent aussi dans celui de la Fig. 109, il n'y a, lorsque le point B est donné (de même que le point A et le polygone, ou la courbe fixe) qu'une seule courbe continue BPH capable de concentrer la lumière réfléchiée successivement en C, en G, en E etc., précisément celle qui se compose des arcs d'ellipse dont nous avons parlé.

Nous observons encore qu'on a dans la Fig. 109 $AB + BC + \text{arc } CG = AH + HG$, ce qui peut conduire dans certains cas à la rectification de la courbe fixe (ou catacaustique). Tschirnhaus se vante de posséder une méthode fort générale pour la rectification des courbes. Dans le cas p. e. de la réflexion de rayons parallèles sur une circonférence de cercle (du côté concave), ce qui est le cas considéré en 1678 par Huygens (T. XVIII, p. 399), ainsi qu'en 1690 dans le *Traité de la Lumière* (T. XIX, p. 537) et, en mars 1691, à la p. 73 du T. X, on a, dans la figure de cette p. 73, $\text{arc } VPZ = XI + IZ$, donc „tota VME = $\frac{3}{2}$ AN” conformément au présent *théorème de Tschirnhaus*: le point lumineux (A) de la présente Fig. 109 se trouve alors à l'infini, les points B et H de la Fig. 109 sont les points V et I, ou V et A, de la figure de la dite p. 73 ¹⁵⁾.

¹⁰⁾ La Fig. 107 ne se distingue de la figure de Leibniz (T. VIII, p. 269) que par le fait que dans cette dernière la lettre Q fait défaut.

¹¹⁾ Manuscrit G, p. 48 r. Voyez sur la date de cette page, 1690, la note 1 de la p. 190 qui précède.

¹²⁾ C'est à ce rapport-ci, nous semble-t-il, que Tschirnhaus fait allusion dans ses paroles citées dans notre note 22 de la p. 515 du T. IX.

¹³⁾ Comparez les figures, et le texte, de Tschirnhaus aux p. 143 et 161 du T. IX. C'est à la p. 143 que Tschirnhaus dit ne pouvoir donner la démonstration „absque multarum figurarum ope adeoque nimia prolixitate”, ajoutant ne pas être certain de ne pas „alicubi errasse”.

¹⁴⁾ Ici Huygens songe sans doute à sa démonstration de la Propos. IV de la Troisième Partie de l'„*Horologium oscillatorium*” (Fig. 57 à la p. 198 du T. XVIII).

¹⁵⁾ Déjà dans son article de 1682, où la construction par points de la catacaustique du cercle est erronée (voyez la note 4 de la p. 381 du T. VIII), Tschirnhaus avait néanmoins donné cette rectification (T. X, p. 72, note 3). Tschirnhaus publia une construction correcte en février

Nous avons publié un facsimilé de la p. 48r du Manuscrit G, où se trouve la Fig. 109, dans notre article — comparez la p. 594 qui suit — „Deux pages consécutives du Manuscrit G de Chr. Huygens” inséré dans la revue „Janus”, organe de la société historique néerlandaise des sciences médicales, exactes et naturelles, 1^{re} à 3^e livraisons janvier-mars 1940 *. On trouve dans le même article la Fig. 109 bis et le facsimilé de la p. 47v du Manuscrit contenant les définitions du corps, de la surface, de la ligne et du point sur laquelle on peut consulter les p. 190 et suiv. qui précèdent.

A cet article fait suite un deuxième article — voyez également la p. 594 qui suit — intitulé „Démonstration mécanique des théorèmes de Tschirnhaus considérés dans le T. XX des Oeuvres Complètes de Chr. Huygens” (Janus, 7^e à 9^e livraisons juillet—septembre 1940). Nous y disons être d’avis que Huygens n’aurait pas récusé cette démonstration: voyez (T. XVII, p. 286) ce qu’il dit en 1659 sur la méthode mécanique d’Archimède servant à démontrer une ou des propositions géométriques et consultez aussi sur la Méthode d’Archimède dont il s’inspirait parfois lui-même la note 5 de la p. 553 qui suit.

* E. J. Brill, Leiden

1690, dans les jours mêmes où parut le Traité de la Lumière (voyez la p. 154 du T. IX). Il ne se sert pas en cette occasion de son théorème comme nous le faisons ici.

Huygens dit en 1690 (T. IX, p. 513) être d’avis que Tschirnhaus avait vu les épreuves du Traité de la Lumière. plus tard il écrit (T. X, p. 496) que Tschirnhaus avait vu son manuscrit.

II.

SOLUTION DU PROBLEME PROPOSÉ PAR M. LEIBNITZ DANS LES NOUVELLES DE LA REPUBLIQUE DES LETTRES DU MOIS DE SEPTEMBRE 1687 [SUR LA COURBE DE DESCENTE UNIFORME].

1687.

Cet article de Huygens qui porte la date du 8 octobre 1687 et a été publié dans la livraison de ce mois des „Nouvelles de la République des Lettres”, constitue le N° 2489 (p. 224) de notre T. X; nous y avons ajouté comme Appendice (N° 2490) la Pièce de septembre 1690 de la p. 47 (numération de Huygens) du Manuscrit G, qui d'ailleurs avait déjà été publiée en 1833 (à l'exception de l'en-tête) par Uytendbroek aux p. 22—23 de son Fasciculus II.

Il s'agit du problème: „Trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descende uniformément et approche également de l'horizon en temps égaux”.

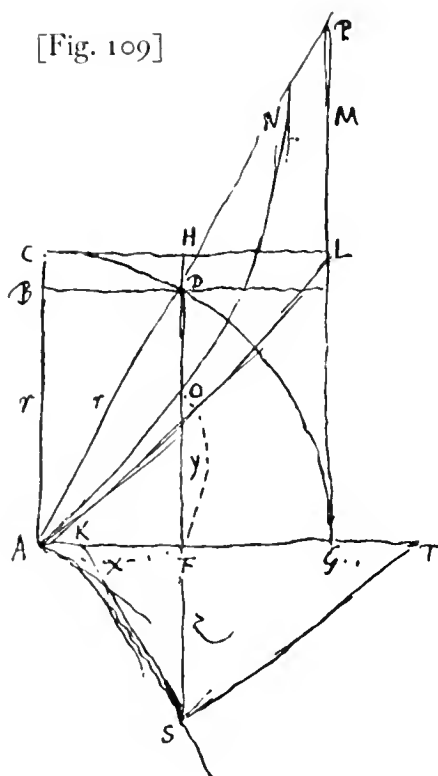


III.

FATIO DE DUILLIER ET HUYGENS. RÈGLE POUR TROUVER
L'ÉQUATION D'UNE COURBE LORSQUE LA SOUSTANGENTE EST
DONNÉE EN COÖRDONNÉES CARTÉSIENNES („PROBLÈME
INVERSE DES TANGENTES" OU „PROBLÈME
DES TANGENTES RENVERSÉES").

[1691]

[Fig. 109]



C D G est une circonférence de cercle.

Les §§ 1—2 traitent, comme les suivants, du problème inverse des tangentes; mais la „methodus Fatij” n’apparaît qu’au § 3.

Quoiqu'il en soit ainsi dans toutes les figures, il n'est pas nécessaire que les coordonnées soient orthogonales.

§ 11). FD — BD — HF — FO
[Fig. 109]

$$\sqrt{rr - xx} - x = r / \sqrt{rr - xx} \propto y$$

æquatio curvæ AO,

$$xxyy - rryy + rrxx \propto 0$$

$$\frac{\text{TF} \propto \text{FO}}{\sqrt{rr - xx}} \sim \frac{\text{FS}}{z} \sim \frac{\text{FS}}{\sqrt{rr - xx}} \frac{\tilde{z}}{rx} \quad \text{FK}$$

ST perpend. curvæ AS. SK perpend. TS.

$$\text{subnormalis FT} \propto \text{FO} \propto \frac{rx}{\sqrt{rr - xx}}.$$

$$\text{Ergo FK} \propto \frac{zz \sqrt{rr - xx}}{rx} \text{ subtangens.}$$

Quæritur natura curvæ.

Huygens proposa ce problème à Leibniz le 23 février 1691 (T. X, p. 21), disant: Si vostre methode ne s'arreste pas à ces racines, vous

¹⁾ Manuscrit G, f. 84 r (p. 66 suivant la numération de Huygens). Les dates 1 Jan. 1691 et 26 Mart. 1691 se trouvent respectivement aux pages 57 et 83 de Huygens; la date du 22 Apr. 1691 à la p. 104. Voyez aussi sur la f. 84 r la note 8 de la p. 211 du T. X.

avez quelque chose de plus que M^r. Fatio, quoy qu'il ait desia passé mon attente. Voyez encore sur ce sujet la fin du § 2.

Ostenfum pag. 58 ²⁾, quod ut DB ad BC, ita \square HA ad spatium OFA [voyez le § 1 bis qui fuit]

$$\frac{DB}{x - r - \sqrt{rr - xx}} = \frac{BC}{rx} = \frac{\square HA}{\frac{spat. OFA}{rr - r \sqrt{rr - xx}}}$$

Ergo ex theoremate Barrovij [voyez le § 1 ter qui fuit]

$$\frac{\frac{1}{2} \text{ qu. FS} \propto rr - r \sqrt{rr - xx} \propto \frac{zz}{2}}{2rr - 2r \sqrt{rr - xx} \propto zz}$$

$$\frac{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}{z^4 - 4rrzz + 4rrxx \propto 0} \quad \text{æquatio curvæ quadratricis AS.}$$

Sed hæc ex data superius FK est inveniendâ.

$$\frac{-4z^4 + 8rrzz}{8rrx} \text{ five } \frac{-z^4 + 2rrzz}{2rrx} \text{ FK } \propto \frac{zz \sqrt{rr - xx}}{rx} \text{ FK ante inventæ.}$$

$$\frac{-zz + 2rr \propto 2r \sqrt{rr - xx}}{zz \propto 2rr - 2r \sqrt{rr - xx} \text{ convenit}}$$

cum [ante inventis]. Ergo curva satisfacit.

Æquatio curvæ AON $xyxy - ryy + rxx \propto 0$.

$$\frac{-2xyxy + 2rryy}{2xyy + 2rrx}$$

$$\frac{-xyxy + ryy}{xyy + rrx} \text{ subtangens ad curvam AO.}$$

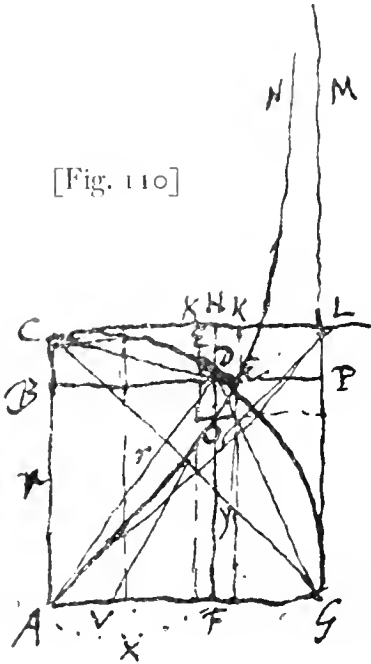
$$\frac{-xyxy + xyxy + rxx}{xyy + rxx} \left| \frac{rrx}{yy + rx} \right. \text{ subtangens eadem implicata.}$$

²⁾ Manuscrit G, f. 80 r (p. 58 de Huygens).

Si $\left[\text{in } \frac{-z^4 + 2rrzz}{2rxx} \propto FK \right]$ in $-z^4$ substituitur pro uno zz ejus valor $2rr - 2r \mid \sqrt{rr - xx}$, qui ex æquatione curvæ invenitur, fiet $FK \propto \frac{zz}{r} \sqrt{rr - xx}$ substantiens. quæ alioqui non facile apparet quomodo ex æquatione curvæ $z^4 - 4rrzz + 4rxx \propto 0$ deducatur.

§ 1 bis [voyez le § 1 (l. 3 de la p. 507)]³⁾. ACG circuli quadrans [Fig. 110]. CLGA quadratum. à puncto peripheriæ D cadunt in AG et AC perpendiculares DF, DB. FD ad DB ut HF ad FO.

[Fig. 110]



$$\frac{FD}{\sqrt{rr - xx}} = \frac{DB}{x} = \frac{HF}{r} = \frac{FO}{y}$$

$$\frac{y \sqrt{rr - xx} \propto rx}{xxyy - yyr + rxx \propto 0}$$

Hujus curvæ spatium infinitum AONMG, æquale est quadrato CG. Item spatij ejus portio, ut OAF, est ad rectangulum FC, ut BC ad BD. Sive spatium OAF est æquale \square^o BL. ut facile apparet ex calculo.

Quia enim AD ad DF ut particula curvæ minima EDE ad KK, erit AD seu HF ducta in KK \propto DF ducta in EE. ideoque pars superficiæ cylindricæ ex KK circa AG, æqualis parti superficiæ sphaericæ ex EE circa eandem AG. Unde (ut notum est) tota superficies cylindrica ex CL circa AG æqualis superficiæ sphaericæ ex arcu CDG circa AG. Porro quia superficies ex EE circa AG ad superficiem ex eadem EE circa CA, sicut DF ad DB. erit et superficies ex KK circa AG, ad superficiem ex EE circa CA, ut DF ad DB, hoc est, ex constructione, ut HF ad FO. atque ita tota superficies cylindrica ex CL circa AG ad superficiem sphaericam ex arcu CDG circa CA, ut omnes HF ad omnes OF, hoc est ut quadratum CG ad totum spatium infinitum AONMG. Est autem ostensa superficies cylindrica ex CL circa AG æqualis superficiæ sphaericæ ex arcu CDG circa AG, ideoque et superficiæ sphaericæ ex arcu CDG circa CA, quia utraque dimidiæ sphaeræ superficiæ æqualis est. Ergo ratio superficiæ ex CL circa AG ad superficiem sphaericam ex arcu CDG

³⁾ Manuscrit G, f. 80 r (p. 58 de Huygens).

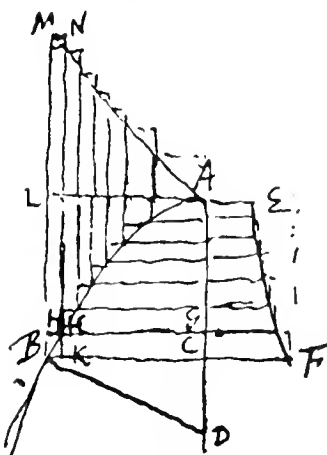
circa CA erat ratio æqualitatis, ac proinde et ratio qui CG ad spatium infinitum AONMG erit æqualitatis, quod erat demonstrandum.

Porro ex ratione demonstrandi, patet etiam superficiem cylindricam ex CH circa AF sive ex arcu CD circa AF esse ad superficiem ex eodem arcu CD circa CB, ut rectangulum HA ad spatium curvæ OFA. Atqui, ex Archimede est superficies ex CD arcu circa AF ad superficiem ex eodem arcu CD circa CB sicut excessus quadrati CG supra qu. GD ad quadr. ex CD recta +), hoc est sicut excessus AG supra GF, seu sicut AF aut BD ad BC. Ergo et rectangulum HA ad spatium OFA ut BD ad BC, quod erat demonstrandum.

§ 1 ter [Theorema Barrovij: voyez le § 1 (l. 7 de la p. 507)]. On peut consulter sur le théorème de Barrow (Lection XI⁵), dernière des Lectiones Geometricæ publiées en 1674) la note 8 de la p. 211 du T. X, où a été cité le „§ 1” de la présente Pièce. Nous insérons ici l'énoncé et la démonstration de ce théorème tels qu'ils se trouvent à la p. 14 du Manuscrit II datant de la fin de 1691 ou peut-être de 1692⁶).

Theorema Barrovij de quo in præcedentibus est hujusmodi.

[Fig. 111]



AB [Fig. 111] est curva, AC recta, ad quam normalis applicata BC; cuique productæ occurrit normalis curvæ BD in D. Jam subnormali, quam dico, CD, æqualis statuatur CF eidem AC perpendicularis idque sic ubique fieri intelligatur, et esse curvam FE, ad quam omnes istæ subnormales erectæ terminentur. Jam spatium AEFC erit æquale dimidio quadrato BC.

Sit $AC \propto x$, $CB \propto y$, $CD \propto z$, HK seu GC $\propto z$, KB $\propto \lambda$. Ex puncto H proximo B, cadat HG perpendicularis in AC, et ducatur HK parallela AC. Jam GC differentiola $\tau \tilde{\omega} x$ est z . Et BK differentiola $\tau \tilde{\omega} y$ est λ , ut in superioribus. Et quia triangula similia sunt HKB, BCD, erit ut BC, y ad CD, z ita HK, z ad KB, λ . Unde $y \lambda \propto z z$. Et summa omnium $y \lambda \propto$ summæ omnium $z z$; hoc est $\frac{1}{2}$ qu. $BC \propto$ spat. AEFC.

Est enim $y \lambda$ rectangulum exiguum LN, factâ LM \propto LA \propto BC $\propto y$. nam MN \propto BK $\propto \lambda$. Itemque $z z$ est rectangulum seu spatium GF. atque ita singula rectangula

⁴) La „superficies ex arcu CD circa CB” étant la différence des surfaces de deux segments, la proposition résulte immédiatement de la Prop. XIII du Livre I du Traité d'Archimède „De sphaera et cylindro”; texte latin de Heiberg: „Cuiusvis sphaeræ segmenti minoris hemisphærio superficies æqualis est circulo, cuius radius æqualis est rectæ a vertice segmenti ad ambitum ductæ circuli, qui basis est segmenti sphaeræ”.

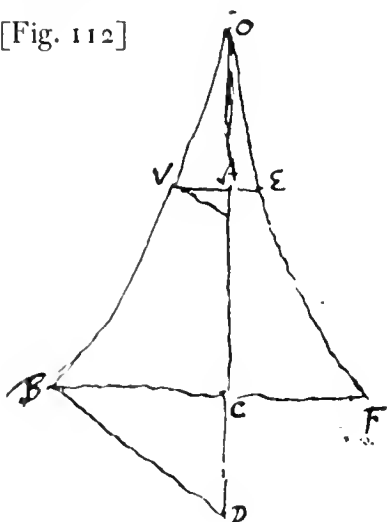
⁵) P. 251 de l'édition de 1860 des „Mathematical works of J. Barrow” par W. Whewell.

⁶) Comparez sur cette date la note 1 de la p. 474 qui précède.

exigua in triangulo MLA æqualia respectivis spatiolis seu rectangulis in spatio AEFC. unde et summa summa.

Si curva VB [Fig. 112] non incipiat ab axe, fiet area AEFC $\propto \frac{1}{2}$ qu. BC — $\frac{1}{2}$ qu.

[Fig. 112]



VA. Si enim ponatur continuatam curvam BV convenire cum axe in O, et ex subnormalibus ipsius VO formari OE: erit spatium OAE $\propto \frac{1}{2}$ qu. AV, et spat. OCB $\propto \frac{1}{2}$ qu. BC. Unde &c.

§ 2. $\frac{zz \sqrt{rr - xx}}{rx}$ FK [Fig. 109 du § 1].

Quæritur quæ curva talem [subtangentem] det.

Leibnitius curvæ æquationem hanc [$z^4 - 4rrzz + 4rrxx \propto 0$] ex data subtangente

$\frac{zz \sqrt{rr - xx}}{rx}$ invenit insigni artificio. Ait au-

tem et pluribus alijs curvis eandem subtangen-

tem convenire, atque inter cæteras huic

$z^4 + rrrx - r^4 \propto 0$. quod non puto ita esse.

4

subtangens $\frac{-4z^4}{2rrx}$ ex regula. Sed $zz \propto \sqrt{r^4 - rrrx}$ ut

ex æquatione curvæ facile apparet.

$\frac{-4zz \sqrt{r^4 - rrrx}}{2rrx}$ subtangens

$\frac{-2zz \sqrt{rr - xx}}{rx}$. Est ergo dupla ejus quæ in priore

curva nostra et propter signum — præfixum ultra x accipienda est.

Leibniz avait pleinement raison en disant, dans sa lettre du 2 mars 1691 (T. X, p. 50), que la soustangente $\frac{y^2 \sqrt{a^2 - x^2}}{ax}$ convient à plusieurs courbes; Huygens le reconnut dans sa lettre du 5 mai (T. X, p. 93). Seulement, Leibniz avait écrit par erreur, en copiant son brouillon, $a^2x^2 = a^4 - y^4$ au lieu de $a^2x^2 = a^4 - \frac{y^4}{4}$ (ou, dans les notations du texte de Huygens, $z^4 + rrrx - r^4 = 0$ au lieu de $\frac{z^4}{4} + rrrx - r^4 = 0$).

§ 3⁷). La „Regle inverse des Tangentes de Mr. Fatio” est clairement expliquée par Huygens deux ans plus tard dans sa lettre du 23 juillet 1693 au Marquis de l'Hospital. Nous pouvons donc renvoyer le lecteur à cette lettre (T. X, p. 464—468). Mais on trouve aussi un exposé de la règle par Fatio lui-même (avec des remarques de Huygens) aux §§ 11 et suivants de la présente Pièce.

$xyy - aay + x^3 \propto 0$ æquatio curvæ. Comparez le § 28 qui fuit.

Aequatio tangentis implicita

$$\frac{-2xyy + aax}{3aa - 2xy} \quad y \quad z \quad u$$

La règle Soustangente : $y = dx : dy$ est valable pour une courbe quelconque. Or, tandis que, dans la lettre citée de 1693, Huygens désigne, en adoptant la notation de Leibniz, par dx et dy les accroissements des variables x et y , il les désigne en 1691 avec Fatio par z et u respectivement ; z et u , ici et dans ce qui fuit, représentent donc des grandeurs infinitésimales.

$$\frac{-2xyy + aax - 3aay - 2xyy}{-2xyyu + aaxu - 3aayz + 2xyyz} \propto 0.$$

Non succedit hic methodus Fatij.

Comme nous l'avons dit dans l'Avertissement. Huygens avait proposé la soustangente

$\frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}$ à Leibniz dans une lettre d'août 1690; dans la correspondance ultérieure il est souvent

question tant de cette soustangente-ci que de la soustangente $\frac{-2x^2y + a^2x}{3a^2 - 2xy}$.

Aequatio tangentis simpliciter inventa ex terminis æquationis curvæ [c. à. d. la courbe $xy^2 - a^2y + x^3 = 0$, d'où provient aussi l'„æquatio tangentis implicita” ci-dessus; voyez la p. 475 du T. IX].

$$\frac{-2xyy + aay}{yy + 3xx} \quad y \quad z \quad u$$

$$\frac{-2xy + aa - yy + 3xx}{-2xyu + aa u - yyz - 3xxz} \propto 0$$

$$\frac{-2xy + aa - yy + 3xx}{-2xyu + aa u - yyz - 3xxz} \propto 0 \quad \text{hic succedit.}$$

§ 4. Aequatio curvæ $y^4 - 8aayy + 16aaxx \propto 0$.

Voyez sur cette courbe la p. 473 du T. IX et le § 27 qui fuit.

Aequatio tangentis implicita $\frac{yy}{2x} + 2x \quad y \quad z \quad u \quad x : \lambda : 2 : -4$

Voyez sur x et λ les §§ 10 et 11 qui suivent.

Huygens avait proposé cette soustangente implicite à Leibniz en même temps que celle du § précédent.

$$\frac{yy + 4xx - 2xy}{yyu + 4xxu - 2xyz} \propto 0 \text{ sive } 2xyz - 4xxu + yyu \propto 0$$

$$\frac{yyy}{-2xyy} \quad -2xyy$$

$$\frac{\frac{1}{3}y^3}{-2xyy} \quad -2xyy \text{ non succedit.}$$

Huygens biffa les mots „non succedit”; peut-être le fit-il après avoir exécuté le calcul du § 27 qui fuit, où il put „intégrer” l'équation à l'aide d'un transformateur.

Aequatio tangentis simplex [voyez la p. 473 du T. IX]

$$\frac{y^4 + 4aayy}{8aax} \quad y \quad z \quad u$$

7) Manuscrit G, f. 84 v — 85 r (pag. 67 et 68 de Huygens).

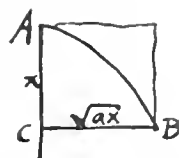
§ 6⁸⁾). \sqrt{ax} subnormalis quæsitæ curvæ.

$$\sqrt{ax} \text{ — } y \text{ — } y / \sqrt{\frac{yy}{ax}} \text{ subtangens}$$

Methodus Fatiij $z : u :: \sqrt{\frac{yy}{ax}} : y$

[c. à. d. $z \text{ — } u \text{ — } \sqrt{\frac{yy}{ax}} \text{ — } y$ ou z ad u ut $\sqrt{\frac{yy}{ax}}$ ad y . Huygens adopte ici à fort peu près la notation de Fatio. Toutefois, ce dernier écrit (voyez la p. 169 du T. IX et le § 13 qui suit) $z : u :: \frac{yy}{\sqrt{ax}} : y$, ce qui est la notation de Wallis dans son „Arithmetica infinitorum” et ailleurs]

[fig. 114]



Parabola . a latus rectum

$$z \sqrt{ax} \propto uy$$

$$\frac{a^{1/2} x^{3/2}}{\frac{3}{2}} \propto \frac{1}{2} yy$$

$$\frac{\frac{2}{3} a^{1/2} x^{3/2}}{\frac{2}{3} a^{1/2} x^{3/2}} \propto \frac{1}{2} yy$$

$$\frac{\frac{4}{5} ax^3}{\frac{4}{5} ax^3} \propto \frac{1}{4} y^4$$

$$\frac{\frac{1}{9} ax^3}{\frac{1}{9} ax^3} \propto y^4$$

$$\frac{\frac{4}{3} x \sqrt{ax}}{\frac{4}{3} x \sqrt{ax}} \propto y^2$$

quadratrix parabolaë

spat. ABC $\frac{2}{3} x \sqrt{ax} \propto \frac{1}{2} yy$ quadratura parabolaë ex Barrovij Theoremate [voyez le § 1 ter qui précède; dans le § 1 il est aussi question d'une „æquatio curvæ quadratricis” en connexion avec le théorème de Barrow].

§ 7⁹⁾. $a^4 - aayy - xxyy \propto 0$ æquatio quadrandæ quæ est altera earum quæ ad Catenariam utiles sunt.

Voyez sur cette courbe la p. 501 du T. IX (Appendice à la lettre de Huygens à Leibniz du 9 octobre 1690).

$$\frac{a^4}{aa + xx} \propto yy$$

$$\frac{aa}{\sqrt{aa + xx}} \propto y \quad \frac{a \sqrt{aa - yy}}{y} \propto x$$

$$\frac{aa}{\sqrt{aa + xx}} \text{ — } z \text{ — } z / \frac{zz \sqrt{aa + xx}}{aa} \text{ subtangens cujusdam, vel hæc}$$

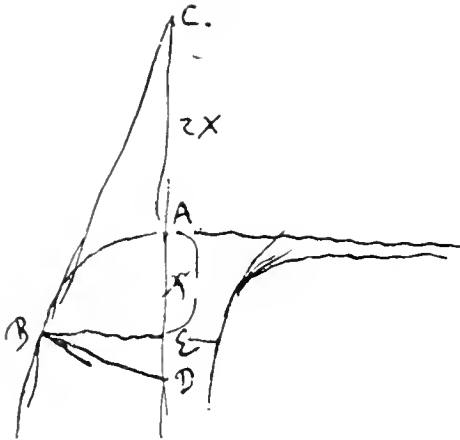
$\frac{zz y}{a \sqrt{aa - yy}}$. Difficile est curvam huic propriam invenire, nec puto extare geometricam. Alioqui et curva Catenæ esset geometrica.

⁸⁾ Manuscrit G, f. 89 r et v. (p. 76 et 77 de Huygens).

⁹⁾ Manuscrit G, f. 92 v. (p. 81 de Huygens).

§ 8¹⁰). AB parabola cubica $y^3 \propto aax$. $3x$ subtangens. $3x \text{ — } \sqrt[3]{C aax} \text{ —}$
 $\sqrt[3]{C aax} / \text{subnormalis ED}$
 $\sqrt[3]{C aax} / \frac{a \sqrt[3]{C aax}}{3x} \propto y$ applicata in alia curva [Fig. 115].

[Fig. 115]



$$a^4 x x \propto 27 x^3 y^3$$

$$a^4 \propto 27 x y^3$$

$\frac{1}{27} a^4 \propto x y^3$ æquatio curvæ cujus
 quadratrix [voyez la fin du § 6 qui précède]
 est parabola cubica.

Eadem constructio subtangens non
 potest convenire duabus aut pluribus cur-
 vis eundem verticem habentibus. si in
 subnormali non habeatur ullum y .

§ 9¹¹). Addenda exemplis substitutio-
 num in fin. p. 2 Epistolæ Fatij. ubi unum
 x in z et unum y in u mutatur.

C'est peut-être la lettre du 3 avril 1691, quoique Fatio y écrive, comme Newton, \dot{x} et \dot{y} et non
 pas z et u [\dot{x}, \dot{y} = Fluxion de l'espace AOF" etc.] Toutefois les „addenda” du présent § correspon-
 dent plutôt aux données du § 11. Il est possible qu'il s'agisse de la lettre inconnue de Fatio, anté-
 rieure à 1690, dont il est question dans la note 15 de la p. 571 du T. IX.

termini dati in	}	$a x^m y^n$. Substituendum $m a x^{m-1} z y^n + n a x^m y^{n-1} u$
æquatione		$\frac{x^2}{y^3} = \frac{x^2 y}{y^4} = x^2 y^{-3} = x^2 y y^{-4}$ substituendum $\frac{2 x z}{y^3} - \frac{3 x^2 u}{y^4}$
tangentis		$x^{1/2} y^{-2/3}$ substituendum $\frac{1}{2} z x^{-1/2} y^{-2/3} - \frac{2}{3} x^{1/2} u y^{-5/3}$.

In termino priori ratio substitutionis est quod per exponentem literæ x hoc est $\frac{1}{2}$
 multiplicandus terminus datur. Tum unum x mutandum in z . Sed quia hic tantum
 habetur $x^{1/2}$, necesse est quo fiat x ut ducatur istud $x^{1/2}$ in simile $x^{1/2}$, ac rursus per hoc
 ipsum dividatur, seu multiplicatio fiat per $x^{-1/2}$. Itaque his factis oritur $\frac{1}{2} z x^{-1/2} y^{-2/3}$.

In termino posteriori ratio est hæc. Primò ducendus est terminus datus in $\frac{2}{3}$ expo-
 nentem literæ y . Tum unum y mutandum in u . Sed quia habetur tantum $y^{-2/3}$, ducen-
 dum hoc in $y^{+5/3}$, quo fiet $y^{3/3}$, sive y^1 mutandum in u ; sed et rursus dividendum per
 $y^{+5/3}$, sive multiplicandum per $y^{-5/3}$; quibus ita factis fit — $\frac{2}{3} x^{1/2} u y^{-5/3}$ pro altero ter-
 mino substituto.

Terminus datus $x^{1/2} y^{-2/3}$ idem significat quod $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y y}}$, ubi ut possit mutari unum y in

¹⁰) Manuserit G, f. 99 v. (p. 97 de Huygens).

¹¹) Manuserit G, f. 100 r. (p. 98 de Huygens).

u , faciendum ut in numeratore appareat y , quod fiet si et numerator et denominator multiplicetur uterque per y , unde fit $\frac{x \cdot y}{y^5}$, et mutato y in u , $\frac{x u}{y^5}$ quod ita scribitur $x^{1/2} u y^{-5/3}$.

§ 10. Ex 3°. [?] La propriété des Tangentes est donnée $z : u :: 2x + \frac{1}{2} p \cdot y$ [voyez sur la notation :: le § 6 qui précède]. d'où l'Equation des Tangentes est $zy - 2ux - \frac{1}{2} pu = 0$ [la soustangente étant $2x + \frac{1}{2} p$ on voit qu'il s'agit de démontrer qu'on a affaire à une parabole]. On commence par chercher le terme generateur des deux termes correspondants non marquez, lequel doit estre un seul terme qui contienne x et y . Il faut connoître quelles puissances de x et de y doivent estre dans ce terme. On scait que les exposants de ces puissances, pour lesquels on met κ et λ , sont entre eux comme les nombres qui sont au devant des termes correspondants, les quels nombres sont ici 1 et -2 . Car puisque les termes zy et $-2ux$ doivent venir d'un mesme terme generateur, les multiplicateurs 1 et -2 doivent estre dans la raison des exposants de x et de y , dans ledit terme. donc κ à λ comme 1 à -2 . Et le terme generateur peut donc avoir este $\frac{x}{y^y}$. Mais cettuicy fait naistre ou rend les termes $\frac{zy}{y^2} - \frac{2xu}{y^3}$, scavoir le premier en multipliant ce correspondant par 1, exposant de x , et changeant x en z , l'autre en multipliant par -2 , exposant de y , (qui est avec le signe $-$ parce que cela marque qu'on divise par y^2) et faisant paroître un y au numerateur pour estre changé en u , et adjoutant en recompense un y au denominateur. Or ces termes $\frac{zy}{y^2} - \frac{2xu}{y^3}$, ou bien $\frac{zy}{y^3} - \frac{2xu}{y^3}$ sont dans la mesme raison que les deux termes de l'Equation des tangentes $zy - 2ux$ a cause du diviseur commun y^3 . A fin donc d'y faire venir aussi le terme marqué $-\frac{1}{2} pu$, on change toute cette premiere æquation en multipliant tous les termes par $\frac{1}{y^3}$ — en marge: Il y a une regle generale pour trouver ce transformateur la quelle n'est pas dans la lettre de M. Fatio. Voyez pag. 120 [§ 23 qui suit] — ce qui donne l'equation $\frac{zy}{y^3} - \frac{2xu}{y^3} - \frac{\frac{1}{2} pu}{y^3} = 0$ des termes de la quelle on trouve les correspondants dans l'equation de la courbe d'où ils sont venus par l'operation converse de celle qui donne l'equation de la tangente, quand celle de la courbe est donnee. Et vient $\frac{x}{y^y} + \frac{\frac{1}{2} p y}{y^3}$. Scavoir $\frac{x}{y^y}$ formé de l'un des deux $\frac{zy}{y^3}$ ou $-\frac{2xu}{y^3}$, (mais on a desja vu qu'il est $\frac{x}{y^y}$ puisqu'il rendoit ces deux termes selon la regle) et $+\frac{\frac{1}{2} p y}{y^3}$ pour generateur de $-\frac{\frac{1}{2} pu}{y^3}$, parce qu'il faut changer premierement dans le terme $-\frac{\frac{1}{2} pu}{y^3}$ un u

en y , vient $-\frac{1}{2}\frac{py}{y^3}$, et puis diviser par l'exposant de y qui est -2 . et ainsi il vient $+\frac{1}{4}\frac{py}{y^3}$.

Or ces deux termes $\frac{x}{yy} + \frac{1}{4}\frac{py}{y^3}$ ne peuvent être égaux à 0, ni faire toute l'équation de la courbe, il faut y ajouter quelque quantité connue comme $-\frac{a}{y^2}$, ou plutôt $-\frac{1}{p}$, et ainsi on aura $\frac{x}{yy} + \frac{1}{4}\frac{py}{y^3} - \frac{1}{p} \propto 0$ la quelle equation étant réduite est $px + \frac{1}{4}pp \propto yy$, qui est la Parabole¹²).

§ 11¹³). Dicté par Mr. Fatio.

Définition des lettres μ κ et λ dans la Théorie de Mr. Fatio par la quelle on trouve l'équation de la Courbe, la propriété des Tangentes étant donnée.

Soit $\gamma ax^m y^n$ un terme dans l'Equation de la Courbe¹⁴). La règle donne pour ses correspondants $\gamma max^{m-1} y^n + \gamma n ax^m y^{n-1} u$.

μ est le produit γa , qui peut être composé de nombres comme γ , avec des quantitez analytiques comme a . Et cette quantité μ , dans les lignes qui ne sont pas exponentiales, est la quantité même par la quelle la partie inconnue $x^m y^n$ du terme generateur dans la courbe est multipliée.

κ est le nombre rationnel, irrationnel, ou exprimé par quelque quantité analytique que ce soit, de dimensions que l'inconnue x a dans le terme de la courbe; par exemple dans le terme $\gamma ax^m y^n$ κ est égal à m .

λ est le nombre rationnel, irrationnel, ou exprimé par quelque quantité analytique que ce soit, de dimensions que l'inconnue y a dans le terme de la courbe, par exemple dans le terme $\gamma ax^m y^n$ λ est égal à n .

Or comme les quantitez m et n peuvent être positives ou negatives, entieres ou rompues, numeriques ou analytiques, simples ou complexes, connues ou meslées et même composées seulement des inconnues x ou y , ou de toutes les deux ensemble: et qu'elles peuvent être encore rationnelles ou irrationnelles: et que toutes ces choses se peuvent combiner diversément entre elles, il paroît qu'il y pourra avoir beaucoup de variété.

¹²) Comparez sur ce datif (sit venia verbo) la dernière ligne de la p. 216 qui précède, ainsi que la note 113 de la p. 217.

¹³) Manuscrit G, f. 100 v. (p. 99 de Huygens).

¹⁴) Comparez sur ce génitif la deuxième ligne et la note 113 de la p. 217 qui précède. On voit que dans les présents §§ Huygens se sert *généralement*, comme Fatio, du génitif (p. e. dans la l. 11 de la p. 507 etc. etc.). Voyez cependant la note 12 qui précède et le début du § 15 qui suit.

Quand la courbe dont l'Equation de la Tangente est produite est geometrique, il est certain que x et λ sont des nombres rationels. Et quand en cherchant par l'Equation donnée de la Tangente, quelle est la courbe, on trouve x et λ estre des nombres rationels, il s'enfuit que la courbe est geometrique. Et qu'elle n'est point geometrique, quand x et λ ne peuvent estre des nombres rationels.

Les termes qui doivent estre marquez d'un trait (\frown) ne sont pas tant ceux qui sont purs, (c'est à dire qui n'ont que les lettres x et z ou y et u seulement) que ceux qui n'ont parmy les autres termes de l'Equation des Tangentes aucuns termes qui puissent estre gemaux avec eux.

En examinant dans l'Equation de la Tangente quels deux termes sont correspondants, c'est à dire provenus d'un mesme terme de l'Equation de la courbe, on doit confiderer les z comme des x , et les u comme des y .

§ 12¹⁵). Soutangente donnée $\frac{aax}{yy + aa} = y = z = u$.

Il s'agit de la soutangente déguisée de la courbe $x^2(a^2 + y^2) - a^2y^2 = 0$ déjà considérée au § 1 où a s'appelait r . Huygens fera mention de cette soutangente déguisée dans sa lettre à Leibniz du 1 janvier 1692 (T. X, p. 223).

$$aax = y^3 + aay = z = u$$

$$\text{Aequation de la tangente } y^3z + aayz - aaxu = 0$$

Icy le terme zy^3 ne peut pas estre marqué de \frown , et avec cela il n'a point de correspondant. les deux autres termes sont correspondants.

Il faut faire en sorte que le terme zy^3 devienne pur, ce qui se fait en divisant l'équation par y^3 . On pouvait aussi la multiplier par $\frac{x}{y^3}$ ou $\frac{x^2}{y^3}$.

$$\text{L'Equation est donc } \frown z + \frac{aaz}{yy} - \frac{aaxu}{y^3} [= 0].$$

Les deux derniers termes demeurent nécessairement correspondants.

Et $x, \lambda :: 1. - 1$. Soit le transformateur $x^g y^h$; donc $1 + g. - 2 + h :: 1. - 1$.

Parce qu'en multipliant le terme $\frac{aaz}{yy}$ (où il y a un z ou x) par le transformateur $x^g y^h$, l'exposant de x c'est à dire x sera $1 + g$, et l'exposant de y c'est à dire λ sera $-2 + h$, parce qu'il y avoit $-yy$.

$$\frac{-1 - g \infty -2 + h}{1 - g \infty h \infty 0} \\ 1 \infty g$$

Mais h doit estre $\infty 0$, parce qu'autrement il s'introduiroit y dans le terme z en le multipliant par le transformateur $x^g y^h$.

¹⁵) Manuscrit G, f. 101 v. (p. 101 de Huygens).

L'Equation transformée sera

[Fig. 109]

$$zx + \frac{aazx}{yy} - \frac{aaxxu}{y^3} \propto 0$$

$$\text{ou } zx + \frac{aazxy}{y^3} - \frac{aaxxu}{y^3} \propto 0$$

Le terme generateur sera

$$\frac{1}{2} \frac{aaxx}{yy} \text{ et l'autre } \frac{1}{2} xx.$$

Et l'Equation de la Courbe sera

$$\frac{1}{2} \frac{aaxx}{yy} + \frac{1}{2} xx - \frac{1}{2} aa \propto 0$$

$$\text{ou bien } aaxx + xxyy - aayy \propto 0$$

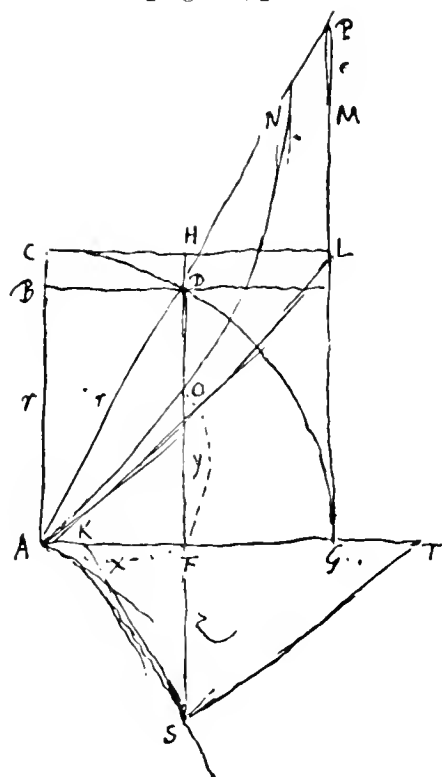
estant reduite.

Cette courbe est AO pag. 66 [Fig. 109; comparez le § 1] dont la quadrature est pag. 88 [c. à. d. à la p. 95 r de la pagination générale; voyez la note 26 de la p. 510 du T. IX, où toutefois il est dit par erreur que la p. 95 r correspond à la p. 90 de Huygens].

En marge: Il valoit mieux de mettre $-bb$ au lieu de $-\frac{1}{2}aa$. Et dire que supposant $-bb$ egal à $-\frac{1}{2}aa$, on venoit à l'Equation reduite comme elle est icij.

Au lieu de $-\frac{1}{2}aa$, on pouvait mettre $-\frac{1}{2}ab$ ou $-\frac{1}{2}bb$, et on aurait trouvé toujours la sous tangente comme elle a été proposée. Mais il faut que ce terme connu soit adjouté et cela avec le signe $-$, parce que les 2 autres termes ont $+$.

Il faut noter aussi que pour que l'Equation reduite donne la sous tangente proposée, il faut qu'il y ait $-aayy$, et par conséquent $-\frac{1}{2}aa$ dans celle d'où elle vient.



§ 13¹⁶). De la main de Fatio:

$$z.u :: \frac{-2x^2y + aax}{3aa - 2xy} . y$$

On reconnait la sous tangente dont il est déjà question au § 3.

$$\underset{\lambda}{3} aayz - \underset{x}{2} xy^2z + \underset{x}{2} xxyu - \underset{\lambda}{a} axu = 0$$

¹⁶) Manuscrit G, f. 101 (p. 100 et 101 de Huygens).

x^2y^h Transformateur qui se trouve $\frac{1}{x^4}$ (puisque $h \propto 0$ et $g \propto -4$) et duquel

$\lambda \quad x \cdot \lambda \quad :: 3 \cdot -1$ donc $-1 - g = 3 + 3h$ on peut se passer de se servir
 $1 + g \cdot 1 + h :: 3 \cdot -1 \quad g = -4 - 3h$ pour transformer l'Equation.

Il est évident que $\begin{cases} x = 1 + g \\ \lambda = 1 + h \end{cases} \lambda = -\frac{aay}{x^3}$ Correspondant [de la main de Huygens: generateur] des λ . [De la main de Huygens: generateur] des λ .
 Ici $x = -3$
 $\lambda = +1$

$\times \quad x \cdot \lambda :: -2 \cdot +2$ donc $4 + 2g = -4 - 2h$ Parce que dans le
 $2 + g \cdot 2 + h :: -2 \cdot +2 \quad g = -4 - h$ termegenerateur des
 Il est évident que $\begin{cases} x = 2 + g \\ \lambda = 2 + h \end{cases} -4 - 3h = -4 - h \quad 2 \text{ termes } 3aayz \text{ et } -aaxu, \text{ on a reconnu quel l'exposant des } x, \text{ c'est à dire } x \text{ est}$
 donc $h = 0$
 $g = -4$

$1 + g$, c'est à dire -3 . Et que l'exposant des y , c'est à dire λ , est $1 + h$, c'est à dire 1 . Et il paroît que aa doit aussi entrer dans le dit terme generateur].

$\times \quad + \frac{y^2}{x^2}$ Correspondant [de la main de Huygens: generateur] des \times

Ici $x = -2$

$\lambda = +2$

$$\frac{-aay}{x^3} + \frac{y^2}{x^2} \pm \frac{a}{b} = 0$$

$$-aay + xy^2 \pm \frac{a}{b} x^3 = 0$$

[De la main de Huygens: Notez que si on ne met point $\frac{a}{b}$, l'Equation fera $aa \propto xy$ de forte que la courbe peut bien estre aussi une hyperbole.]

[De la main de Huygens: Exemple à bien remarquer.]

$$\frac{a}{y^3} - \frac{b}{x^2y} + \frac{1}{x^2} = 0$$

[De la main de Huygens: æquation de la courbe, ou $axx - byy + y^3 \propto 0$.]

$$\frac{-3au}{y^4} + \frac{2bz}{x^3y} + \frac{bu}{x^2y^2} - \frac{2z}{x^3} = 0$$

[De la main de Huygens: Equation des tangentes, où le premier et dernier terme seroient marquez \curvearrowright .]

$$\underbrace{-3aux^3}_{\times} + \underbrace{2bzy^3}_{\lambda} + \underbrace{buxy^2}_{\lambda} - \underbrace{2zy^4}_{\times} = 0$$

[De la main de Huygens: Equation des tangentes reduite et donnée, ou le premier et dernier terme ne sont plus marquez, et ne paroissent pas correspondants non plus.]

$z. \lambda :: 2.1$ donc $1 + g = 6 + 2h$ Les termes \propto ne sont pas propre-
 $1 + g.3 + h :: 2.1$ $g = 5 + 2h$ ment correspondans; et [mot barré
 $g = -3$ par Huygens et remplacé par toute-
 $h = -4$ fois] il se faut bien donner de garde

de rendre encore la courbe exponentiale; mais il faut voir si (sans aller contre l'Equation $g = 5 + 2h$) on ne peut pas reduire le terme $-2zy^4$ à n'avoir que des x , et le terme $-3aux^3$, à n'avoir que des y . Or il est d'abord évident que cela se peut, si on divise l'Equation par x^3y^4 , c'est à dire si on la multiplie par $\frac{1}{x^3y^4}$. On auroit donc $g =$

-3 & $h = -4$. Or par l'Equation $g = 5 + 2h$ on auroit $-3 = 5 - 8$ c'est à dire $-3 = -3$ et toutes choses seroient consistentes. [De la main de Huygens: Mais si cela n'eust pas esté ainsi l'Equation auroit esté intraitable.]

[De la main de Huygens: Apres avoir trouvé le terme generateur de deux termes correspondants de l'equation des tangentes, non pas entierement, mais seulement les x et y qui y entrent, on trouvera les autres lettres, en prenant le diviseur commun des deux termes correspondants apres en avoir osté tous les x et les y , ou je comprends aussi les z et les u . Ainsi dans le premier de ces deux Exemples, apres avoir trouvé que le terme generateur des termes $3aayz$ et $-aaxu$, doit avoir $\frac{-y}{x^3}$, on trouve qu'il

faut encore y mettre aa dans le numerateur. et on aura $-\frac{aay}{x^3}$.

Icy le terme generateur $-\frac{b}{x^2y}$ se trouve de ce qu'il y doit entrer x^{1+g} qui fait x^{-2} .

Et de plus y^{3+h} qui fait y^{-1} , c'est à dire $\frac{1}{x^2y}$, a quoy ajoutant dans le numerateur la lettre b , commun diviseur des deux termes correspondants \wedge (sans compter les x et y)[on] a $-\frac{b}{x^2y}$. Et il y a le signe $-$, parce que les x sont au diviseur, et que le terme correspondant ou il y a z est avec $+$, ce qui est de mesme dans le premier exemple.]

§ 14. De la main de Fatio:

Equation des tangentes que l'on propose $\frac{aau}{y^3} - \frac{z}{x} - \frac{aaz}{y^2x} = 0$.

Dans cette Equation il ne faut pas croire que les deux premiers termes doivent indifferemment être marquez d'un petit trait (\frown); car ainsi la courbe deviendrait

¹⁷) Manuscrit G, f. 102 r (p. 102 de Huygens).

intraitable. Le plus feur est de rechercher quels doivent être les termes correspondans entre eux; or un des correspondans contient toujours la lettre z et l'autre la lettre u ; dans les lignes geometriques ou qui ne sont pas exponentiales les deux correspondans contiennent le même nombre de dimensions de x , et le même nombre de dimensions de y . Ils sont de plus divisibles par les memes lettres connues. [De la main de Huygens: Or tout cela convient à ces deux termes extremes. Donc ils sont correspondans, non obstant que dans le terme $\frac{aau}{y^3}$ il n'y ait que l'inconnue y ni aussi

dans le terme $\frac{aaz}{y^2x}$ (car le x efface le z); ce qui est digne d'être remarqué puis qu'il est contre la regle generale, qui demande que dans les termes correspondans les lettres x et y entrent toutes deux. Cela sera ainsi dans cette Equation si on la multiplie par x , ou x^4 . Mais il n'est pas necessaire, parce qu'on n'a qu'à suivre la methode generale, dont on a vu un exemple à la page precedente.]

$z . \lambda :: - 1 . + 1$ $x^g y^h$ transformateur
 $0 + g . - 2 + h :: - 1 . + 1$ $h \infty 0$ parce qu'autrement la transformation
 $g = 2 - h$. Sed $h \infty 0$ introduiroit y dans le terme pur $-\frac{z}{x}$.
 $g = 2$

Ergo le transformateur x^2 .

$-\frac{1}{2} \frac{aaxx}{yy} - \frac{1}{2} xx$ termes generateurs dans l'Equation de la Courbe. qui est la mesme que celle de la page precedente. [Voyez le § 11].

§ 15¹⁸⁾. De la main de Fatio:

Equation à une Courbe [la circonférence de cercle]

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad \text{donc } x = \frac{a^2 - y^2}{x} \& y = \frac{a^2 - x^2}{y}.$$

$2xz + 2yu = 0$ Equation à la tangente. Et substituant [pour déguiser la soustangente] les valeurs de x et de y

$$\frac{2a^2z - 2y^2z}{x} + \frac{2ua^2 - 2ux^2}{y} = 0$$

$2a^2zy - 2y^3z + 2ua^2x - 2ux^3 = 0$. Donc substituant la valeur de y dans le 1^{er} terme et celle de x dans le 3^e

$$\frac{2a^2za^2 - 2a^2zx^2}{y} - 2y^3z + \frac{2ua^2a^2 - 2ua^2y^2}{x} - 2ux^3 = 0$$

A. $2a^4zx - 2a^2zx^3 - 2y^4xz + 2uy^4a^4 - 2ua^2y^3 - 2ux^4y = 0$

B. $z . u :: - 2a^4y + 2a^2y^3 + 2x^4y . 2a^4x - 2a^2x^3 - 2y^4x$

C. $:: - y \times a^4 - a^2y^2 - x^4 . + x \times a^4 - a^2x^2 - y^4.$

¹⁸⁾ Manuscrit G, f. 102 v. (p. 103 de Huygens).

Il n'y a ici aucune paire de termes qui puissent être gemeaux ensemble. Et il n'y a aucune transformation possible qui rende tous les termes marquables ou purs.

— $a^2y^2 - x^4 = a^2x^2 - y^4$ [voyez l'explication de cette équation que Huygens donne un peu plus loin]

$$x^4 - y^4 = a^2x^2 - a^2y^2. \text{ Donc divisant par } x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 = a^2. \text{ Cette Equation donneroit } xz + uy = 0 \text{ pour}$$

l'Equation de la tangente.

Je substitue $x^2 + y^2$ dans l'Equation A par tout où se trouve a^2 et j'ai

$$2x^5z + 4x^3y^2z + 2y^4xz, - 2zx^5 - 2y^2zx^3, - 2y^4xz, + 2uyx^4 + 4uy^3x^2 + 2uy^5, - 2uy^3x^2 - 2uy^5 - 2ux^4y = 0$$

$$+ x^3y^2z - 2y^2zx^3 + 2uy^3x^2 = 0$$

Divisant par $2x^2y^2$

$$2xz - xz + uy = 0$$

$$xz + uy = 0.$$

[De la main de Huygens: Quand l'équation vient comme icy en A, je la reduis a une proportion de z à u , comme en B; et j'examine quels sont les diviseurs des deux membres de cette proportion. Je trouve qu'ils ont esté composez par des multiplications telles qu'on voit en C. Maintenant si $-y$ estoit egal à $+x$, la proportion de z à u se reduiroit a celle—cy: z à u comme $a^4 - a^2y^2 - x^4$ à $a^4 - a^2x^2 - y^4$. Et si $a^4 - a^2y^2 - x^4$ estoit egal à $a^4 - a^2x^2 - y^4$, la mesme proportion se reduiroit à celle ci $z.u :: -y. + x$, ce qui donneroit $zx + uy = 0$. Voions ce qui arriveroit en supposant $a^4 - a^2y^2 - x^4 = a^4 - a^2x^2 - y^4$. On auroit [De la main de Huygens:

$$+ a^2y^2 + x^4 \propto a^2x^2 + y^4 \text{ et par consequent}$$

$$\frac{x^4 - y^4 \propto a^2x^2 - a^2y^2}{x^2 + y^2 \propto a^2, \text{ d'où resulte aussi l'équation des tangentes } zx + uy \propto 0.}$$

$$\text{auroit } \frac{x^4 - y^4 \propto a^2x^2 - a^2y^2}{x^2 + y^2 \propto a^2, \text{ d'où resulte aussi l'équation des tangentes } zx + uy \propto 0.}$$

tes $zx + uy \propto 0$.

Or, il arrive aussi en substituant dans l'Equation A, au lieu de a^2 la valeur $x^2 + y^2$, qu'on revient en fin à conclure $zx + uy = 0$. Qui rend l'Equation de la courbe $x^2 + y^2 \propto a^2$. C'est icy un cas singulier.]

§ 16¹⁹⁾. Exemple de substitution double pour deguiser l'Equation de la Tangente. Voyez devant cecy pag. 98 et suivantes²⁰⁾.

Equation de la Courbe $xyy - aay + x^3 \propto 0$. Au § 13 il étoit déjà question de la courbe $-aay + xy^2 \pm \frac{a}{b}x^3 = 0$. Equation de la Tangente selon la regle de Mr. Fatio

¹⁹⁾ Manuscrit G, f. 106 v (p. 111 de Huygens). La date du 25 Apr. 1691 se trouve sur la f. 104 v.

Comparez sur la f. 106 v la note 9 de la p. 87 du T. X.

²⁰⁾ C. à. d. les §§ 7 et suiv.

$$yyz + 3xxz + 2xyu - aa u \propto 0$$

$$z.u :: aa - 2xy.yy + 3x^2$$

Substitution pour un $x \propto \frac{aay - x^3}{yy}$

$$z.u :: aa - \frac{2aay + 2x^3}{y}.yy + 3x^2$$

Q $\underbrace{zy^3}_{\lambda} + 3\underbrace{zxy}_{\lambda} + \underbrace{a^2yu}_{\lambda} - 2\lambda^3u \propto 0$ Equation deguifée de la tangente.

$$\underbrace{z}_{\lambda} + \frac{3\lambda x^2}{y^2} + \frac{aay}{y^2} - \frac{2\lambda^3 u}{y^3} \propto 0. \text{ On a divisé l'equation}$$

par y^3 pour rendre le premier et troisieme terme purs.

Les termes qui doivent estre marquez d'un trait $\underbrace{\hspace{1cm}}$ ne sont pas tant ceux qui sont purs c'est a dire qui n'ont pas conjointement z avec y ou u avec x , que ceux qui n'ont parmi les autres termes de l'Equation des Tangentes aucuns termes qui puissent estre gemeaux avec eux. Et il est tousjours facile de reconnoitre si un terme proposé dans une Equation des Tangentes a un gemeau avec luy ou non, parce qu'il faut qu'ils contiennent toutes les mesmes lettres, (en comptant les z pour x et les u pour y) excepté les nombres qui les multiplient, scavoir aux courbes geometriques.

$$x.\lambda :: 3. - 2. \quad x + \frac{x^3}{yy} - \frac{aa}{y} = q \quad \text{Termes generateurs.}$$

Le premier terme generateur x vient de z premier terme de l'Equation changée, le second $\frac{x^3}{yy}$ vient de $\frac{3\lambda x^2}{yy}$ en changeant un z en x et divisant apres cela par l'exposant de x . Le troisieme $-\frac{aa}{y}$ vient de $\frac{aay}{y^2}$, en changeant un u du numérateur en y et divisant en suite par l'exposant de y qui est -1 , parce que $\frac{aay}{y^2}$ fait $\frac{aa}{y}$.

Ces termes generateurs de l'Equation de la courbe peuvent estre egaux à rien, ou à une quantité positive ou negative. Icy en les supposant egaux à rien, et en reduisant l'equation, on a $xyy + x^3 - aay \propto 0$, qui estoit l'Equation de la courbe d'ou l'Equation de la Tangente a esté tiree. Mais l'Equation de la Tangente se feroit encore tiree de l'une de ces deux autres Equations de Courbe, scavoir $xyy + x^3 - aay - b^3 \propto 0$ ou $xyy + x^3 - aay + b^3$ qui sont des courbes differentes de l'autre.

N.B. Jusqu'icy la methode de Mr. Fatio reussit fort bien.

Voicy une seconde substitution dans l'Equation marquée **Q**. qui estoit $zy^3 + 3zxy + a^2yu - 2x^3u \propto 0$. Substitution pour un $y \propto \frac{aay - x^3}{xy}$.

$$R \quad zy^3 + 3zaxy + \frac{a^4uy - aaux^3}{xy} - 2x^3u \infty 0$$

$\underbrace{zy^4} + 3\underset{\wedge}{zax^3yy} + \underbrace{a^4uy} - \underbrace{aaux^3} - \underset{\wedge}{2x^4uy} \infty 0$. Intraitable apres deux substitutions l'une de y l'autre de x . Elle est intraitable par ce qu'il n'y a point de multiplicateur qui rende purs les trois termes marquez \wedge , ni qui fasse qu'il y en ait deux entre eux de correspondans, parce que ne l'estant pas ils ne peuvent le devenir. Quand mesme ces trois termes marquez seroient rendus purs, il se trouveroit plus de trois termes avec des inconnues dans l'Equation de la Courbe.

N.B. Si on substitue encore la valeur $y \infty \frac{x^3 + xyy}{aa}$ dans le terme a^4uy , elle devient traitable. de quoy la raison est peut estre, parce que le terme a^2yu dans l'equation Q est n^e des deux termes xyy et $aa y$ de l'Equation de la Courbe, ce qui paroît de ce que ce terme a^2yu est resté comme difference des termes $-aa y$ et $2a^2uy$, qui ont leur origine des dits termes xyy et $aa y$. Il semble donc qu'apres avoir substitué dans le terme a^2yu un y qui est n^e du terme xyy , (ce qui rend l'equation intraitable) il faut encore substituer dans le terme a^4uy de l'Equation R, un y n^e du terme $aa y$ de l'Equation de la Courbe. et que par la l'on rende l'Equation de la Tangente derechef traitable.

Equation Q. Substitution pour un $x \infty \frac{aay - xyy}{xx}$.

$$zy^3 + \frac{3aaz^2y^2 - 3xzy^3}{x} + aayy - 2x^3u \infty 0$$

$$+ \underset{\wedge}{3aaz^2y^2} - \underbrace{2xzy^3} + \underset{\wedge}{aaxuy} - \underbrace{2x^4u} \infty 0$$

Equation traitable apres deux substitutions differentes de la valeur x . Icy les deux termes marquez \wedge deviendront purs en multipliant l'equation par $y^{-3} x^{-4}$ ²¹). les deux autres demeurent correspondans. comme il est aisé de voir en comptant les z pour des x , et les u pour des y ²²).

Equation transformée

$$\underset{\wedge}{\frac{3aaz}{yx^4}} - \underbrace{\frac{2z}{x^3}} + \underset{\wedge}{\frac{aau}{y^2x^3}} - \underbrace{\frac{2u}{y^3}} \infty 0$$

²¹) Phrase corrigée par Fatio. Huygens avait écrit (ce qui revient au même): en divisant l'equation par y^3x^4 .

²²) Fatio ajoute: Aussi étant correspondans d'abord ils le demeurent necessairement apres la division par x^ex^h . ou la multiplication par $x^{-e}y^{-h}$.

De la main de Fatio: Cette Equation ne sera traittable qu'en cas qu'elle soit immediate c'est à dire que les termes λ aient un generateur qui les rende immediatement. Car la transformation qui a été faite étoit la seule qui pût reussir. Il faut donc voir si, pour les termes λ , on a $x.\lambda :: 3.1$. Or cela est ainsi, car dans le generateur immediat le nombre des dimensions étant necessairement le même que dans les correspondans, on trouve pour le generateur des λ que x et λ font -3 et -1 [en marge **de la main de Huygens:** Il faut voir seulement si les termes \curvearrowright peuvent venir d'un même generateur] ce qui est consistant avec la proportion $x.\lambda :: 3.1$. Mais si au lieu de $\frac{aaa}{y^2x^3}$ on avait eu $\frac{2aaa}{y^2x^3}$ on auroit eu $x.\lambda :: 3.2$ ce qui auroit marqué que l'equation étoit intraitable. [**De la main de Huygens:** Les termes generateurs sont icy $\frac{-aa}{x^3y} + \frac{1}{xx} + \frac{1}{yy} \propto q$ qui sont tirez des termes de l'equation transformée, selon la regle ordinaire].

§ 17²³⁾. Le § 17 ne nous est pas compréhensible. Le calcul est incorrect. Nous n'avons pourtant pas voulu le supprimer puisqu'il fait voir que Fatio, ou, si l'on veut, Fatio et Huygens, essayèrent un instant, sans aucun succès, d'appliquer la méthode aux courbes transcendentes. Le point d'interrogation ajouté par eux (par Fatio) à une équation du § 18, indique qu'ils se rendaient compte de leur manque de succès.

De la main de Fatio: Equation de la Tangente $\frac{ax^4y^2z - b^3x^3yu}{x^3y^2}$ commun diviseur composé des puissances de x et de y .

$$ax^4y^2z - b^3x^3yu = 0.$$

$$x.\lambda :: ax^2.b^3$$

$$\frac{ax^2.yb^3}{xax^2yb^3} \propto q. \text{ Courbe}$$

que l'on peut avec Monsieur Leibnitz nommer exponentiale [Leibnitz se sert aussi de l'expression „equation transcendente”; voyez la p. 517 du T. IX].

$ax^2xax^2 - 1zyb^3 - b^3xax^2yb^3 - 1u \propto 0$ On voit que Fatio n'est pas en état (s'il l'eût été, cela eût été bien surprenant) de différencier correctement la fonction xax^2 .

$$\frac{ax^2ax^2 + 1zyb^3 - b^3xax^2uyb^3 - 1}{axx - b^3y - 1u} \propto 0$$

$$axx - b^3y - 1u \propto 0$$

$$z.u :: \frac{b^3}{y} - ax$$

$$z.u :: b^3 . axy$$

$$\underbrace{x^2z}_{\lambda} + \underbrace{ax^4y^2z}_{\lambda} - \underbrace{b^3x^3yu}_{\lambda} = 0$$

[**De la main de Huygens:**
divise per xax^2yb^3 .

De la main de Huygens:

$$\frac{b^3x^3y}{ax^4y^2}$$

$$\frac{b^3.x^3y}{axy.x^3y} \text{ in}$$

aequatione data tangentis]

²³⁾ Manuscrit G, f. 107 r (p. 112 de Huygens).

$$z : \lambda :: ax^2 : b^3 :: \frac{2b^3}{ax^2} \cdot 2$$

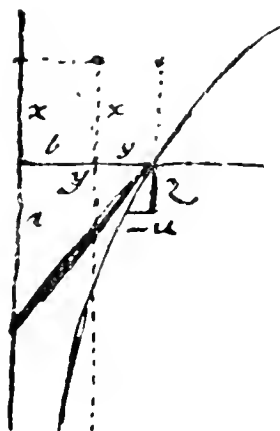
$$\frac{2b^3}{x^{axx}y^2}$$

qui sont les dimensions de y , qu'il faut garder pour conserver le terme marqué dans sa pureté.

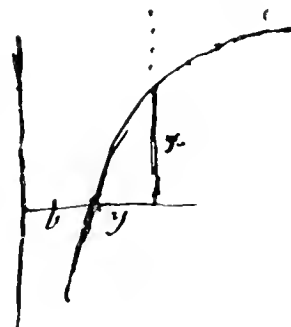
§ 18 ²⁴). De la main de Fatio:

Propriété de la tangente de la ligne Logarithmique [Fig. 116]

[Fig. 116]



$$z : u :: a : y$$



[En marge de la main de Huygens: parce que u est conté pour y , il a falu compter aussi z pour x .]

La lettre a désigne la sous-tangente qui est constante pour la logarithmique, ce qui caractérise cette courbe.

$$\frac{zy}{\lambda} + \frac{au}{\lambda} = 0$$

$$z : \lambda :: x : a$$

$$x^x y^a = q?$$

Equation de la Courbe, mais comme il paroît

elle est exponentiale. Calcul apparemment erroné, non moins que celui du § 17.

Dans la suite Fatio est plus heureux: il réussit à trouver une forme non-exponentielle de la courbe par un développement en série antérieur à l'intégration. Il s'agit au fond, comme on voit, du développement en série déjà obtenu par Mercator (Pièce VII à la p. 260 qui précède) de $\ln(1 + \frac{y}{a})$ ou, pour $a = 1$, de $\ln(1 + y)$.

$$z + \frac{au}{y} = 0$$

²⁴) Manuscrit G, f. 107 v (p. 113 de Huygens).

Soit le y de la courbe $= b + y$ nouveau: par là on détermine le nouvel y [Fig. 116 et Fig. 117].

$$\frac{au}{y} [\text{devient}] \frac{au}{b+y}$$

$$\left[z + \frac{au}{y} \text{ devient } \right]$$

$$z + \frac{au}{b} - \frac{auy}{bb} + \frac{auy^2}{b^3} - \&c = 0$$

[L'intégration donne]

$$x + \frac{ay}{b} - \frac{ay^2}{2b^2} + \frac{ay^3}{3b^3} - \&c = q.$$

Equation de la courbe par une suite

infinie de termes qui ne sont point exponentiaux. Le 1^{er} y est changé en $b + y$.

$x + \frac{ay}{b} + \frac{ay^2}{2b^2} + \frac{ay^3}{3b^3} + \&c = q$. Equation de la même courbe mais qui naît en faisant le premier $y = b - y$ nouveau.

Si on commence les x et les y en A [Fig. 117], où la tangente fait un angle de 45° avec la courbe Logarithmique, on aura $b = a$.

De plus si x est infiniment petit on aura encore $x = y$.

$$x + y + \frac{y^2}{2a} + \frac{y^3}{3a^2} + \&c = q.$$

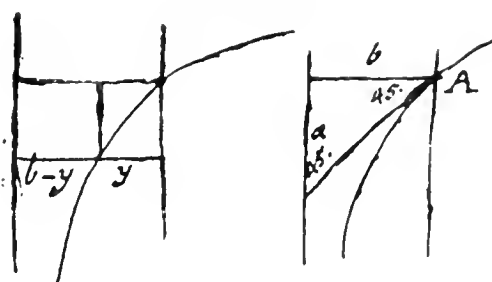
$$y + y + \frac{y^2}{2a} + \frac{y^3}{3a^2} + \&c = q. \text{ qui est zero comme il}$$

est évident.

$$x + y + \frac{y^2}{2a} + \frac{y^3}{3a^2} \&c = 0.$$

$$x = -y - \frac{y^2}{2a} - \frac{y^3}{3a^2} \&c. \text{ Il faut faire } a = 1.$$

[Fig. 117]



§ 19²⁵⁾. Aequatio Parabolæ $ax - yy \propto 0$. $\frac{2yy}{a}$ fubtangens simplex. Jam pro yy pone ax . $\frac{2ax}{a}$ five $2x$ fubtangens implicita.

²⁵⁾ Manuscrit G, f. 109 r (p. 116 de Huygens).

$$\begin{array}{r} z \cdot u : 2x \cdot y \\ zy \propto 2ux \\ \hline \frac{zy}{\lambda} - \frac{2ux}{\lambda} \propto 0 \end{array}$$

$$z : \lambda : 1 : -2$$

$\frac{x}{y \cdot y} - \frac{1}{a} \propto 0$ quia tantum duo existunt termini correspondentes absque alio, non opus est hic Transformatorem quarere, sed sufficit, cum sit z ad λ ut 1 ad -2 , ponere terminum generatorem in æquatione curvæ $\propto \frac{x}{y \cdot y}$, cui necessario addendus $-\frac{1}{a}$.

Sit tamen $x^2 y^h$ transformator.

$$\begin{array}{r} 1 + g \cdot 1 + h : 1 : -2 \\ \hline -2 - 2g \propto 1 + h \\ \hline -2g - 3 \propto h \\ \hline -3 \propto h. \end{array}$$

Possum ponere $g \propto 0$ quia nullus est, in æquatione tangentis $zy - 2ux \propto 0$, terminus præter duos correspondentes. Ergo $-3 \propto h$, eoque transformator $x^2 y^h \propto \frac{1}{y^3}$, et æquatio transformata

$$\frac{z}{y \cdot y} - \frac{2ux}{y^3} \propto 0$$

Hinc enim $\frac{x}{y \cdot y}$ terminus generator in æquatione curvæ quæsitæ.

Terminus generator $\frac{x}{y \cdot y}$ ex termino æquationis transformatæ $\frac{z}{y \cdot y}$ habetur mutando z in x et dividendo per exponentem quem tunc habet x , qui est hic 1. Idem terminus generator haberetur ex termino $-\frac{2ux}{y^3}$. mutando nempe u in y unde fit $-\frac{2x}{y \cdot y}$, et dividendo tunc per exponentem literæ y , qui hic est -2 . Nam $-\frac{2x}{y \cdot y}$ divisum per -2 facit $+\frac{x}{y \cdot y}$, eundem nempe terminum generatorem.

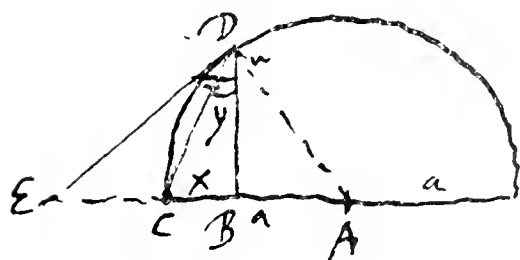
Ex hoc enim [termino $\frac{x}{y \cdot y}$] duo $\frac{z}{y \cdot y} - \frac{2xu}{y^3}$, primus mutando x numeratoris in z , et multiplicando per 1 exponentem ejusdem x , alter multiplicando per -2 exponentem u in termino $\frac{x}{y \cdot y}$, et mutando unum y numeratoris in u : sed quia, in numérateur terminum $\frac{x}{y \cdot y}$, non est y , oportet ut ibi y apponatur quod mutatur in u ; simulque in denominatore adjiciatur unum y . atque ita fit $-\frac{2xu}{y^3}$.

Quia autem solus terminus generator $\frac{x}{yy}$ invenitur, qui non potest efficere æquationem curvæ, oportet quantitatem aliquam cognitam quæ easdem dimensiones habeat ab ipso subtrahere. Atque ita facere $\frac{x}{yy} - \frac{1}{a} \propto 0$. Unde $ax - yy \propto 0$ æquatio parabolæ.

§ 20²⁶). Oportet valorem x vel y substitui in eo tantum termino subtangentis qui ortus est à termino æquationis lineæ curvæ ex quo iste valor x , vel y desinitus fuit; alioqui fit æquatio tangentis intractabilis quantum ad methodum Dⁱ. Fatij.

Exempli gratia fit CD circumferentia [Fig. 118]. $CB \propto x$. $BD \propto y$. $AC \propto a$.

[Fig. 118]



Æquatio curvæ

$$\begin{aligned} 2ax - xx &\propto yy & x &\propto \frac{yy + xx}{2a} \\ -yy + 2ax - xx &\propto 0 & 2a &\propto \frac{yy + xx}{x} \\ \frac{2yy}{2a - 2x} &\left| \frac{yy}{a - x} \right. & \text{subtangens simplex BE.} \\ \text{BE } \frac{yy}{a - yy - xx} &\left| \frac{2aay}{2aa - yy - xx} \right. & \text{BE sub-} \end{aligned}$$

tangens implicita per substitutionem valoris x in termino divisoris $-x$, qui ortus est ex termino $-xx$, cum valor x sit ex termino $2ax$.

Huygens parle de cette soustangente (l'appelant pourtant par erreur „subnormalis“; comparez le § 22 qui suit) dans sa lettre à Hubertus Huighens du 12 février 1692, T. X, p. 247, où nous citons dans la note 16 la présente page du Manuscrit G.

$$z - u - 2ay - 2aa - yy - xx$$

$$2aaz - zyy - zxx - 2aay \propto 0 \quad \text{æquatio tangentis}$$

intractabilis cum nulli termini correspondentes infint, nec omnes puri possint effici

In subtangente implicita substituaturo porro, pro $2a$ numeratoris, valor ejus

$$\frac{yy + xx}{x} \text{ ortus ex termino } 2ax. \text{ fit } \frac{y^3 + xxyy}{2aax - yyx - x^3} \text{ subtangens.}$$

$$z.u = y^3 + xxyy - 2aax - yyx - x^3$$

$$2aazx - zyyx - zxx - uy^3 - uxyy \propto 0 \quad \text{æquatio tan-}$$

gentis tractabilis. Hic sunt duo termini correspondentes notati λ , et reliqui tres puri.

²⁶) Manuscrit G, f. 109 v (p. 117 de Huygens).

$x \cdot \lambda : -1. -1$ Nullus verò transformator quia si quis effret, is terminorum purorum trium aliquos impuros redderet, hoc est x et y continentes.

Fit ergo, secundum regulam, terminus generator correspondentium duorum $-\frac{1}{2}xxyy$, terminorum vero purorum generatores $+aaxx - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4$.

Ergo $-\frac{1}{2}xxyy + aaxx - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4 \propto 0$

$$4aaxx \propto x^4 + 2xxyy + y^4$$

$$2ax \propto xx + yy \quad \text{æquatio curvæ.}$$

In hoc exemplo singulare est, quod ad æquationem pervenitur, ex qua utrimque radix extracta dat æquationem curvæ quæsita.

Similiter ut hic, invenio quoque contingere in subtangente curvæ pag. 111, quæ est $\frac{2xyy + aay}{yy + 3xx}$, in qua si substituatur pro y in termino aay , valor ejus inventus

ex termino xyy æquationis curvæ $xyy - aay + x^3 \propto 0$ [équation déjà considérée dans le § 16, emprunté à la p. 111 de Huygens] fit æquatio tangentis intractabilis

$$2xy^2 + 3x^2y^2 + 2x^2y^3u - a^2yu + aax^3u \propto 0.$$

Si vero hic porro in termino $-a^2yu$ qui est ab aay , substituatur, pro uno a^2 , valor ejus $\frac{xyy + x^3}{y}$, inventus ex termino aay : redditur æquatio tangentis tractabilis $zy^2 +$

$3zaxxy + 2xy^3u - aayyu \propto 0$ reformanda divisione per yy , ut duo termini non correspondentes fiant puri.

§ 21²⁷). AB [Fig. 119] est curva. DAC recta. BC applicata. Si DC, DA, DE sint proportionales, erit EB tangens hyperboles ut notum ex Conicis²⁸). Ex hac proprietate invenienda est natura curvæ AB, nempe hyperboles.

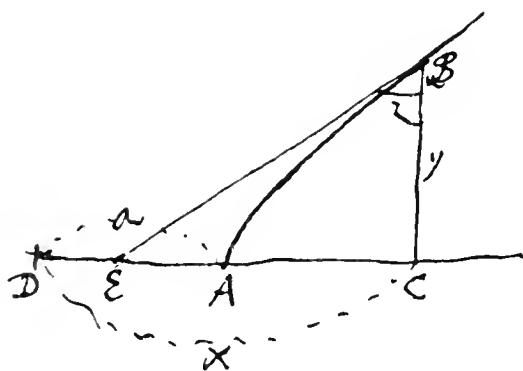
Sit $DA \propto a$, $DC \propto x$, $CB \propto y$.

$$DC \cdot DA : DA \cdot DE$$

$$x \cdot a : a \left/ \frac{aa}{x} \right. \left. \right\} s. \\ \text{ex } DC \cdot x$$

$$zu. = \frac{xx - aa}{x} EC - y$$

$$2xy - uxx + uaa \propto 0 \quad \text{æquatio tan-}$$



²⁷) Manuscrit G, f. 110 r (p. 118 de Huygens).

gentis. $z : \lambda : 1. - 1$. Sit $x^g y^h$ transformator, in quo g est exponens x , et h exponens y .
 $g + 2. h + 1 : 1. - 1. - g - 2 \propto h + 1$.

Sed $g \propto 0$ quia alias introduceretur x in terminum purum aaa . Ergo $-3 \propto h$.
 Ergo transformator $x^g y^h \propto \frac{1}{y^3}$. Et æquatio transformata $\frac{zx}{y^3} - \frac{uxx}{y^3} + \frac{uaa}{y^3} \propto 0$. In
 termino $\frac{zx}{y^3}$ mutetur z in x et tunc dividatur per exponentem x qui erit 2. fitque

$\frac{xx}{2yy}$ terminus generator duorum correspondentium $\frac{zx}{y^3}$ et $-\frac{uxx}{y^3}$. Deinde in termino
 $\frac{uaa}{y^3}$ mutetur u in y , fit $\frac{aa}{yy}$ et dividatur per exponentem y qui est -2 , fit $-\frac{aa}{2yy}$,

alter terminus quæsitæ æquationis, generator nempe termini $\frac{uaa}{y^3}$. quæ itaque æquatio

est $\frac{xx}{2yy} - \frac{aa}{2yy} \mp \frac{a}{b} \propto 0$. Apparet enim terminum aliquem cognitum hic
 adponendum, quia alioqui fieret $xx \propto aa$, quæ non est æquatio ullius lineæ curvæ.
 Potest autem ratio a ad b esse quælibet data, vel etiam æquales a et b . Itaque jam

$$xx - aa \mp \frac{2a yy}{b} \propto 0.$$

Quod si ponatur $-\frac{2a yy}{b}$, erit æquatio hyperbolæ; si vero $+\frac{2a yy}{b}$, erit ellipsis
 vel circuli, ut facile apparet. Sed hic ponendum $-\frac{2a yy}{b}$, quia xx majus positum fuit
 quam aa . Nam ita fit $xx - aa \propto \frac{2a yy}{b}$, at in ellipsi $aa - xx \propto \frac{2a yy}{b}$.

Quod si ex æquatione simplici hyperbolæ, $xx - aa - \frac{2a ay}{b} \propto 0$ quærat^{ur} primò
 subtangens EC, ea fit $\frac{4a yy}{2bx}$ five $\frac{2a yy}{bx}$, ubi si substituatur valor yy , qui ex hac æqua-
 tione est $\frac{bxx - baa}{2a}$, fiet $\frac{bxx - baa}{bx}$ five $\frac{xx - aa}{x}$ subtangens implicita per sub-
 stitutionem valoris yy , quæ superius data erat.

²⁸⁾ D est par hypothèse le centre de l'hyperbole, et $DA = a$ ce que nous appelons la moitié du grand axe. Apollonios, Conica, Lib. I, XXXVII (texte latin de Heiberg): „Si recta hyperbolam vel ellipsim vel ambitum circuli contingens cum diametro concurrit, et a puncto contactus ad diametrum recta ordinate ducitur, recta ab ordinate ducta ad centrum sectionis abscisa cum recta a contingenti ad centrum sectionis abscisa spatium comprehendet æquale quadrato radii sectionis”, etc.

Quæritur natura seu æquatio curvæ AB.

$$\begin{array}{cc} \text{DC} & \text{CB} \\ z \cdot u : 2x + \frac{x^3}{y \cdot y} \cdot y & \\ z \cdot u : 2xyy + x^3 \cdot y^3 & \\ \frac{zy^3}{\lambda} - \frac{2xyy}{\lambda} u - \frac{x^3}{\phi} u \propto 0 \text{ æquatio tangētis.} & \end{array}$$

Hic quidem duo termini correspondentes habentur, sed reliquus — x^3u non est purus, quia et x habet et y , pro quo nempe censetur u ;

Sed dividendo æquationem per x^3 fiet pro termino — x^3u , purus u . Ergo eo facto fit

$$\frac{zy^3}{x^3} - \frac{2yyu}{xx} - u \propto 0 \quad \text{ubi duo priores termini,}$$

et si correspondentes sint, tamen ab eodem termino 'generatore oriri non potuerunt, nam $\frac{zy^3}{x^3}$ venit a generatore $\frac{-x^3}{2x^2}$, nempe multiplicando per — 2, exponentem x , et mutando unum x numeratoris in z , (sed quia non habetur x in numerator generantis apponitur ipsi x et in z mutatur, simulque unum x in denominatore additur) unde fit $\frac{y^3z}{x^3}$. Atqui alter terminus correspondens $\frac{-2yyu}{xx}$ venit a generatore

$-\frac{2y^3}{3xx}$ multiplicando nempe per 3 exponentem y et unum y numeratoris in u . Viden-

dum itaque an adhuc amplius transformari possit æquatio $\frac{zy^3}{x^3} - \frac{2yyu}{xx} - u \propto 0$.

$z \cdot \lambda : 1. - 2$ Sit transformator $x^g y^h$.

$g - 2 \cdot h + 3 : 1. - 2$ $g - 2$, quia in termino $\frac{zy^3}{x^3}$ exponens x est — 2 propter

$- 2g + 4 \propto h + 3$ $\frac{z}{x^3}$ seu $\frac{x}{x^3}$ seu $\frac{1}{xx}$.

$- 2g + 1 \propto h$ Sed g est $\propto 0$, quia alias transformator induceret x in terminum purum u . Ergo transformator $x^g y^h \propto y$.

$$\frac{zy^4}{x^3} - \frac{2y^3u}{xx} - uy \propto 0 \quad \text{æquatio transformata, ubi jam}$$

duo termini correspondentes et tertius — uy purus.

Ergo generator duorum est $\frac{-y^4}{2xx}$, et $\frac{-yy}{2}$ alter, quibus necessario addendus terminus aliquis cognitus, ac simplicissimus quidem $+\frac{1}{2}aa$, unde fit æquatio

$$y^4 + yyxx - aaxx \propto 0,$$

curvæ unicæ quæ problemati convenit. Hæc curva est ejusmodi, ut ductâ ab A vertice recta AB, et huic normali BE, hæc ipsa semper eidem lineæ a æqualis est. Hanc Gutschovius Slufio proposuit, Slufius mihi, cujus quadraturam ex circuli quadratura pendere inveni [voyez sur ce sujet la note 15 de la p. 246 du T. X, où nous avons cité ce passage]. Nempe si APF sit circuli quadrans, radio AP \propto BE seu a , et ducatur BKG parallela et GH perpend. AC, fieri spat. BKA \propto segmento GPH. Vid. Lib. B, circa med. [Manuscrit B, p. 125 et 126, datant du 15 septembre 1662].

Ut ostendatur porro curvam cujus æquatio $y^4 + yyxx - aaxx \propto 0$ dare subtangentem $2x + \frac{x^3}{yy}$, dividenda tantum æquatio hæc per xx , unde fit $\frac{y^4}{xx} + yy - aa \propto 0$. Unde secundum regulam formata subtangens erit

$$\frac{-4y^4}{xx} - 2yy \quad \text{hoc est } 2x + \frac{x^3}{yy}.$$

Nota diviforem hunc esse $\frac{-2y^4}{x^3}$, quia terminus $\frac{y^4}{xx}$ multiplicandus fuit per exponentem quem in eo habet x , qui exponens est hic -2 . ac deinde dividendus per x . unde fit $-\frac{2y^4}{x^3}$. hæc nempe secundum regulam tangentium.

Nam aliter quoque ex æquatione $y^4 + yyxx - aaxx \propto 0$, formatâ subtangente simplici $\frac{-4y^4 - 2yyxx}{2yyx - 2aax}$ et in termino $-2aax$ substituendo valorem aa , ex ipsa

æquatione inventum, nempe $aa \propto \frac{y^4 + yyxx}{xx}$ habebimus $\frac{-4y^4 - 2yyxx}{2yyx - \frac{2y^4}{x} - 2yyx}$,

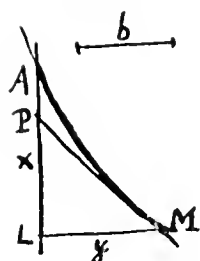
hoc est $2x + \frac{x^3}{yy}$ subtangentem eandem.

§ 23³⁰). Non reperi adhuc, licet in multis exemplis sim expertus, æquationes tangentium intractabiles ultro sese offerentes. Sed tantum datâ operâ tales fieri videntur, eo modo quo dixi pag. 117 in principio [§ 20] nempe per substitutiones quasdam quantitatum.

Ecce exempla quædam ubi semper tractabiles fiunt æquationes tangentium, five subtangentes; etsi hæ non sint simplices tamen, quales ex æquatione curvæ describuntur.

³⁰) Manuscrit G, f. 111 r (p. 120 de Huygens). Nous avons cité cette page dans la note 11 de la p. 223 du T. X.

[Fig. 121]



AM [Fig. 121] est curva. b recta data. AL recta $\propto x$. LM applicata $\propto y$. PM tangens. subtangens PL $\propto \frac{bx + xx}{2b + x}$.

Huygens proposera cette sous-tangente à Leibniz dans sa lettre du 1 janvier 1692 (T. X, p. 223), disant que la méthode de Fatio conduit aisément à l'équation de la courbe correspondante (savoir l'hyperbole).

$$\frac{bx + xx}{2b + x} \propto y \quad z \propto u$$

$$bx + xx \cdot 2by + xy \propto z \propto u$$

$$\text{æquatio tangentis } \frac{2byz + xyz}{\lambda} - \frac{bxu - xzu}{\lambda} \propto 0. \text{ hic duo}$$

paria terminorum correspondentium.

En marge: Termini correspondentes sunt in quibus eadem potestates quantitatum x et y reperiuntur; sed ita ut etiam z pro x habeatur et u pro y . — Methodus Fatii aliquatenus exponitur. vide pag. 98 [§ 9 qui précède].

Quia termini correspondentes $2byz$ et $-bxu$ ab eodem termino genitore orti sunt, necesse est in hoc termino genitore exponentem $\tau\sigma x$ esse ad exponentem $\tau\sigma y$ ut 2 ad -1 , hoc est ut numeri his terminis præfixi, nam $2byz$ habet 2, et $-bxu$ censetur habere -1 . Ergo $z : \lambda : 2 : -1$. Sed hi termini non possunt, quales hic sunt, ex uno eodemque termino genitore oriri: poterunt autem certo modo in potestates x vel y utriusque ducti. Itaque quærendus est transformator totius hujus æquationis tangentis qui transformator fit $x^g y^h$, ubi g et h sunt ignoti adhuc exponentes $\tau\sigma x$ et y . Ergo cum in termino $2byz$ sive etiam $-bxu$, habeatur jam nunc unum x , (nam z est pro x), facta transformatione erit in ipso exponens $\tau\sigma x \propto 1 + g$. Similiterque cum in alterutro istorum terminorum habeatur jam nunc unum y ; (nam et u est pro y) facta transmutatione erit in ipso exponens $\tau\sigma y \propto 1 + h$. Atqui diximus in termino horum genitore communi esse exponentem $\tau\sigma x$ ad exponentem $\tau\sigma y$ sicut 2 ad -1 . Ergo erit

$$1 + g \text{ ad } 1 + h \text{ ut } 2 \text{ ad } -1.$$

$$\text{Ergo } \frac{-1 - g \propto 2 + 2h}{\frac{-3 - g}{2} \propto h}$$

Confidero deinde terminos reliquos correspondentes xyz et $-xzu$, in quorum communi genitore exponens $\tau\sigma x$ ad exponentem $\tau\sigma y$ debet esse ut 1 ad -1 , quia hi censentur numeri ipsis præfixi. Itaque hic z ad λ ut 1 ad -1 .

Quia autem in terminorum utrovis est xx et y , erit in ipsis, post transformationem ex ductu $x^g y^h$, exponens $\tau\sigma x \propto 2 + g$, et exponens $\tau\sigma y \propto 1 + h$.

$$\text{Ergo } 2 + g \text{ ad } 1 + h \text{ ut } 1 \text{ ad } -1$$

$$\text{unde } -2 - g \propto 1 + h$$

$$\text{et } -3 - g \propto h. \text{ Sed erat } h \propto \frac{-3 - g}{2}.$$

$$\text{Ergo} \quad \frac{-3 - g}{2} \propto \frac{-3 - g}{2}$$

$$\text{Ergo} \quad -3 \propto g \quad \text{Ergo } h \propto \frac{-3 + 3}{2} \propto 0. \text{ Ergo}$$

transformator $\frac{1}{x^3} \propto x^g y^h$.

Nam quia in transformatore hoc invenitur exponens g $\tau\omega$ x esse -3 , hoc significat divisionem per x^3 , five multiplicationem in $\frac{1}{x^3}$. Exponens autem h $\tau\omega$ y est $\propto 0$. ideoque transformatio non auget nec diminuit exponentem $\tau\omega$ y qui est in æquatione ante transformationem.

Erat æquatio ista $\frac{2byz}{\lambda} + \frac{xyz}{\varphi} - \frac{bxu}{\lambda} - \frac{xxu}{\varphi} \propto 0$ quæ ducta in transformatorem $\frac{1}{x^3}$ facit $\frac{2byz}{x^3} + \frac{yz}{xx} - \frac{bu}{xx} - \frac{u}{x} \propto 0$. In qua æquatione termini bini quique manent necessario correspondentes, quia tales erant ante ductum in $\frac{1}{x^3}$. Nunc autem duo notati λ poterunt habere genitorem communem, itemque duo reliqui notati φ . Nempe secundum regulam, in termino $\frac{2byz}{x^3}$, mutato z in x , et tunc dividendo per exponentem x , qui erit -2 , quia xx est in divisore, fiet $\frac{by}{xx}$ pro generatore duorum notatorum λ . Similiterque in termino $\frac{yz}{xx}$ mutando z in x et tunc dividendo per exponentem x qui erit -1 , quia x erit in divisore, fiet $\frac{y}{x}$ pro generatore duorum notatorum φ .

En marge: Nota ex termino $-\frac{by}{xx}$ fieri in æquatione terminum $\frac{2byz}{x^3}$ multiplicando ipsum per exponentem literæ x , hoc est per -2 , et mutando z in x ; sed quia non invenitur z in $-\frac{by}{xx}$, addendum est in numeratore, et x in divisore, et sic fit $\frac{2byz}{x^3}$.

Ergo duo termini in æquatione curvæ quæsitæ sunt $\frac{by}{xx}$ et $\frac{y}{x}$ quibus necessario adjungendus terminus aliquis cognitus totidem dimensionum, ut $\frac{b}{a}$, atque ita tota æquatio curvæ fit $\frac{by}{xx} - \frac{y}{x} + \frac{b}{a} \propto 0$. quæ reducta facit

$$\begin{aligned} \text{Ergo } & \frac{-x^3yy}{x^4 + bx^3 + bccx + bbcc} - y = z - u \\ & -x^3y - x^4 + bx^3 + bccx + bbcc = z - u \\ & zx^4 + zbx^3 + zbccx + zbbcc + uy \propto 0. \end{aligned}$$

Hic nulli sunt termini correspondentes cum unus tantum fit in quo y . Sed video facta divisione per x^3 , omnes terminos evadere puros, hoc est tales ut tantum habeant x vel y . Ergo hoc facto fit $zx + zb + \frac{zbcc}{xx} + \frac{zbbcc}{x^3} + uy \propto 0$.

Neque aliud hic requiritur, cum ex singulis hisce terminis singuli describantur æquationis curvæ. Nempe

$$\frac{1}{2}xx + bx - \frac{bcc}{x} - \frac{1}{2}\frac{bbcc}{xx} + \frac{1}{2}yy \propto 0.$$

Et hæc quidem curva satisfait quæsito, quia dat subtangentem eandem datæ. Sed et alijs duabus curvis eadem constructio tangentis convenit, quia liberum est huic æquationi apponere terminum aliquem cognitum vel affirmativum vel negativum. ac si quidem adponatur $+\frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc$, tunc demum æquatio oritur Conchoidis, nempe

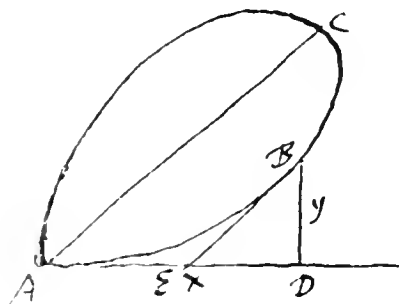
$$\frac{1}{2}xx + bx - \frac{bcc}{x} - \frac{1}{2}\frac{bbcc}{xx} + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc \propto 0$$

sive $x^4 + 2bx^3 - 2bccx + xxxy + bbxx - ccxx \propto 0$, nam hæc calculo facile invenitur.

Le cas de la conchoïde est le dernier des exemples de la méthode de Fatio que Huygens donne dans sa lettre au Marquis de l'Hospital du 23 juillet 1693, citée aussi au début du § 3 qui précède. De l'Hospital — voyez ce que nous disons sur lui à la fin de notre Avertissement — peut répondre (10 août 1693, T. X, p. 485) que pour lui ce cas est si simple „qu'il n'est besoin d'aucune methode pour [le] refoudre”.

§ 25³³⁾. AB [Fig. 123]. Curva cujus diameter AC, faciens angulum CAD 45 gr.

[Fig. 123]



AD $\propto x$. BD $\propto y$. a linea data.

Æquatio curvæ [„folium Cartesii”]

$x^3 + y^3 - xya \propto 0$. Divide per xy .

$\frac{xx}{y} + \frac{yy}{x} - a \propto 0$. $\frac{-3y^3 + xya}{3xx - ya}$

subtangens simplex. Substituto [in subtangente simplici] utrobique

³³⁾ Manuscrit G, f. 112 v (p. 123 de Huygens).

valore ya qui est $\frac{x^3 + y^3}{x}$ fit $\frac{x^4 - 2xy^3}{2x^3 - y^3}$ subtangens implicita ex qua fit invenienda æquatio Curvæ.

$$\begin{array}{l} \frac{x^4 - 2xy^3}{2x^3 - y^3} \text{ — } y \text{ — } z \text{ — } u \\ x^4 - 2xy^3 \text{ — } 2x^3y - y^4 \text{ — } z \text{ — } u \\ \underset{\circ}{2x^3zy} - \underset{\lambda}{zy^4} \text{ — } \underset{\circ}{x^4u} + \underset{\lambda}{2xy^3u} \propto 0 \text{ æquatio Tangentis.} \\ x^5y^h \text{ transformator.} \quad \lambda \quad x : \lambda : -1.2 \quad \text{Ergo} \\ \underset{\circ}{x} : \lambda : 2. -1 \quad g + 1. h + 4 : -1.2 \quad -2g - 6 \propto \frac{-g-6}{2} \\ g + 4. h + 1 : 2. -1 \quad \frac{2g+2}{h} \propto -h-4 \quad \frac{-2 \propto g}{-2 \propto g} \\ \frac{-g-6}{2} \propto h \quad h \propto -2g-6 \quad \text{Ergo } h \propto -2 \\ \text{Terminus } 2x^3zy \text{ transformatus } \frac{2x^3zy}{xxyy} \Big| \frac{2zx}{y} \text{ generator } \frac{xx}{y}. \\ \text{Terminus } -zy^4 \text{ transformatus est } \frac{-zyy}{xx} \text{, ejus generator } \frac{yy}{x}. \end{array}$$

Ergo termini æquationis $\frac{xx}{y} + \frac{yy}{x} - a \propto 0$. Æquatio Curvæ $x^3 + y^3 - xya \propto 0$.

Nam terminus aliquis cognitus $-a$ necessario addendus quia priores ambo habent $+$.

§ 26³⁴). Ici Huygens, sans abandonner tout-à-fait les z, u , commence, comme on voit, à se servir des notations dx, dy de Leibnitz dans le problème inverse des tangentes: voyez ce que nous avons dit au début du § 3 sur les notations dx, dy et z, u . Dans sa lettre du 23 juillet 1693 au Marquis de l'Hôpital il écrit dx et dy dans toutes les équations différentielles.

$$\begin{array}{l} \frac{2x dx}{y} - \frac{yy dx}{xx} - \frac{xx dy}{yy} + \frac{2y dy}{x} \propto 0 \\ 2x^3y dx - y^4 dx - x^4 dy + 2xy^3 dy \propto 0 \end{array}$$

$\frac{-3y^3 + xya}{3xx - ya}$ subtangens simplex paginae præcedentis [§ 25].

$$\frac{x^3 + y^3 - xya \propto 0}{3xx - ya}$$

$$3y^3 \propto -3x^3 + 3xya.$$

$$\frac{+3x^3 - 2xya}{3xx - ya} \text{ — } y \text{ — } z \text{ — } u$$

$3x^3u - 2xyau - 3yxaz + ay^2z \propto 0$ æquatio tangentis [apparemment intraitable dans cette forme].

³⁴) Manuscrit G, f. 112 v et 113 r (p. 123 et 124 de Huygens).

$$[\text{Transformator}] x^g y^h \quad - 2xxy + aax - 3aay - 2xyy - dx - dy \\ - 2xxydy + aaxdy - 3aaydx + 2yyxdx \propto 0 \text{ æquatio} \\ \text{differentialis.}$$

$$\begin{array}{rcl} \kappa . \lambda : + 2. - 2 & \kappa . \lambda : - 3. 1 & g \propto - 4, h \propto 0, \\ g + 2. h + 2 - 2. - 2 & g + 1. h + 1 = - 3. 1 & \text{transformator } \frac{1}{x^4}. \\ \hline g \propto - h - 4 & g \propto - 4 - 3h & \end{array}$$

$$-\frac{yy}{xx} + \frac{aay}{x^3} \mp 1 \propto 0$$

$$\text{vel } xyy - aay \mp x^3 \propto 0.$$

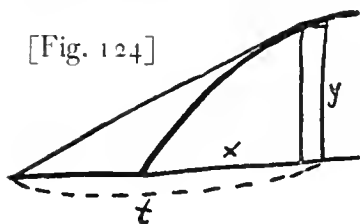
IV

METHODUS LEIBNITIJ¹⁾.

Dec. 1691

Huygens exécute quelques calculs en vue de sa réponse à Leibniz du 1 janvier 1692 (T. X, p. 221). Consultez aussi les notes que nous avons ajoutées à cette lettre.

[Fig. 124]

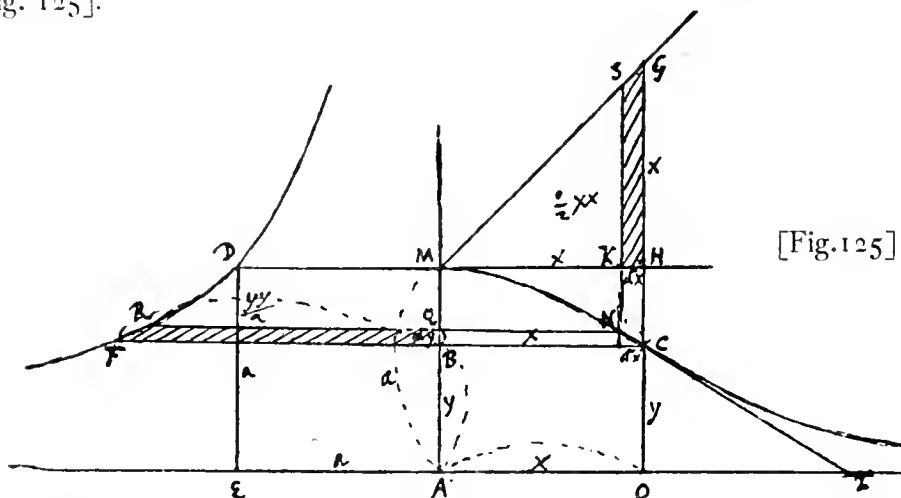


19 Dec. 1691. Methodus Leibnitij. qua ex data subtangente investigatur curva ei conveniens. Leibniz avait expliqué sa méthode et ses notations dans la lettre à Huygens d'octobre 1691 (T.X, p. 197).

$t : y :: d\bar{x} : d\bar{y}$ [Fig 124]. subtangens $t \propto y d\bar{x} : d\bar{y}$ sive $\frac{y d\bar{x}}{d\bar{y}}$ formula generalis. $d\bar{x}$ vel dx significat

Leibnitio incrementum lineæ x sive differentiolam duarum inæqualium proximarum x . $d\bar{y}$ vel dy similiter incrementum lineæ y . $aa : y$ significat $\frac{aa}{y}$.

Sit $t \propto 1 : x$ sive $\frac{aa}{x}$ subtangens data. Poterat pro aa esse ab . MC est curva [Fig. 125].



[Fig. 125]

¹⁾ Manuscrit H, p. 8 (ce manuscrit n'a pas d'autre numération que celle de Huygens). Cette page a été citée dans les notes 5 de la p. 222 et 18 de la p. 247 du T. X.

CO applicata ejus, AO absciffa. CT tangens in C. AO $\propto x$. OC $\propto y$. a linea data.
OT $\propto t$ subtangens, semper est $\frac{aa}{x}$. Quæritur natura ac constructio curvæ MC.

$$\frac{aa}{x} \propto y d\bar{x} : d\bar{y}$$

and $y : y \propto x dx$

$$\int \overline{a a d \bar{y}} : y \propto \int \overline{x d \bar{x}} \propto \frac{1}{2} x x.$$

$$\frac{aa}{x} - y - dx - dy$$

$$\frac{aa}{x} \propto \frac{ydx}{dy}$$

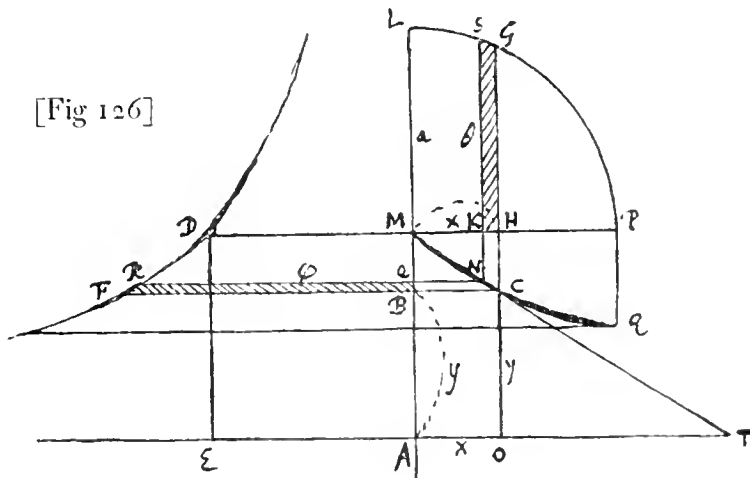
$$\frac{aady}{y} \propto xdx$$

$\frac{aa}{x} \text{ --- } y \text{ --- } dx \text{ --- } dy$ Hic [Fig. 125] $\int \overline{aad\bar{y}} : y$ seu summa omnium
 $\frac{aa}{x} \propto \frac{ydx}{dy}$ $\frac{aad\bar{y}}{y}$ est spatium hyperbolicum ut FBMD. Nam
 $\frac{aad\bar{y}}{y} \propto xdx$ ut y ad a , hoc est ut AB ad AM, ita a five MD
 ad BF $\propto \frac{aa}{y}$ quæ ducta in BQ $\propto d\bar{y}$, hoc est, in
 differentiolam $\tau\omega y$, facit spatiolum BR $\propto \frac{aad\bar{y}}{y}$ quod æquale spatiolo HS $\propto xdx$.

unde et summæ $\int \frac{aady}{y} \propto \int x dx$ five $\frac{1}{2}xx$. Hic jam subtangens OT $\propto \frac{aa}{x}$.

DF est hyperbola ad asymptotos AM, AE, cujus quadratum AMDE. MG facit angulum GMH dimidium recti. Jam ducta GHC parallela MA, oportet in ea punctum curvæ C ita situm esse ut ducta CBF parallela AO, fiat spatium hyperbolicum BFDM æquale spatio seu triangulo GHM. Si ergo possim triangulo GHM abscindere æquale spatium hyperbolicum BFDM, hoc est si detur quadratura hyperbolæ, potero construere curvam MC. Poterat et FBC prima duci, in qua punctum C ita accipiendum ut ducta CG fiat triangulum GMH æquale spatio BFDM.

Si subtangens $t \propto 1 : \sqrt{1 - xx}$ hoc est si $t \propto \frac{aa}{\sqrt{aa - xx}}$ [Fig. 126]



$$\frac{\frac{aa}{\sqrt{aa-xx}} \propto y d\bar{x} : d\bar{y}}{aad\bar{y} : y \propto d\bar{x} : \sqrt{aa-xx}} \\ \int aad\bar{y} : y \propto \int d\bar{x} \sqrt{aa-xx}$$

Hæc curva MC construi poterit datis quadraturis Hyperbolæ et Circuli. Oportet enim punctum ejus quodlibet C ita esse positum ut ductis CF, CG, spatium hyperbolicum MDFB fiat æquale spatio circulari MLGH. Et semper adeo spatium BR æquale spatio HS; hoc est $aad\bar{y} : y \propto d\bar{x} \sqrt{aa-xx}$. Jam erit subtangens OT five $t \propto \frac{aa}{\sqrt{aa-xx}}$. Patet $aad\bar{y} : y$, ut in superiori exemplo, esse spatium BR hyperbolicum; et $d\bar{x} \sqrt{aa-xx}$ esse spatium circulare HS.

Locus est methodo huic ut ait Leibnitius, quodocunque quantitas subtangentem datam constituens oritur ex ductu vel divisione quantitatum quæ præter datas quantitates tantum x vel y habent, non utrumque simul. Sic subtangens $\frac{aa}{\sqrt{aa-yy}}$ non admittitur, nec $\frac{ax+yy}{b}$; nec $\frac{ax+yy}{a}$. quæ postrema Fatij methodum admittit. estque subtangens parabolæ.

Methodus hæc in eo posita est, ut ad æquationem perveniat in qua ex una parte non habeatur nisi x et $d\bar{x}$; ex altera non nisi y et $d\bar{y}$, præter quantitates cognitæ, nec succedit nisi cum hoc fieri potest; cum vero potest, deducitur problema ad quadraturas.

Il est vrai que Leibnitz n'avait pas fait connaître sa méthode en entier; voyez les p. 224 et 227 du T. X.

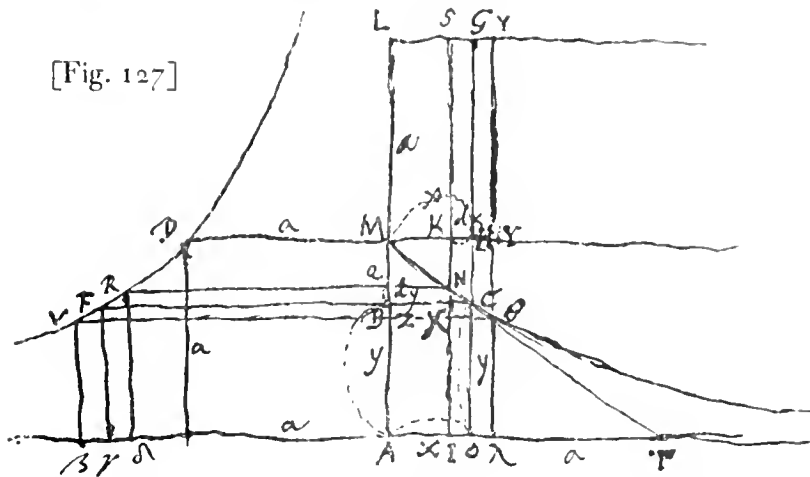
Nous empruntons encore à la p. 9 du Manuscrit II ce qui se rapporte à la logarithmique. $t \propto y d\bar{x} : d\bar{y}$ formula generalis. Ergo $d\bar{x} \propto d\bar{y} t : y$ formula cum t darur per y , vel cum $t \propto a$. Sit $t \propto a$, semper subtangens data [comparez le § 18 qui précède].

$d\bar{x} \propto d\bar{y} a : y$ five $ad\bar{x} \propto aad\bar{y} : y$. Hic altero a multiplicavi ut fieret $\int aad\bar{y} : y$ spatium hyperbolicum. Poterat et per b pro a .

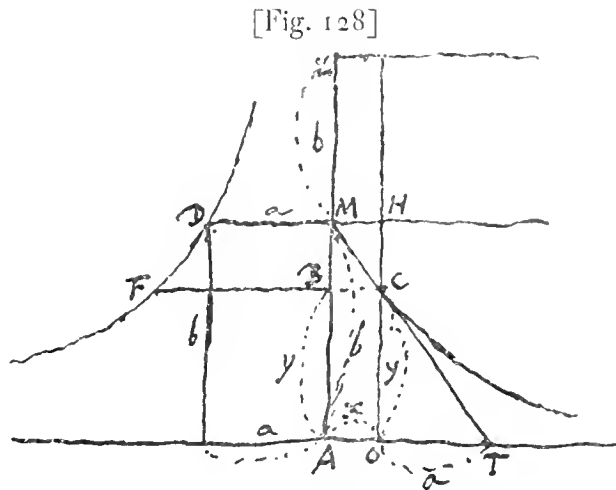
$$\frac{\int ad\bar{x}}{\text{rectangulum}} \propto \frac{\int aad\bar{y} : y}{\text{spatium hyperbolicum}}$$

Ad æquationem $x \propto \int d\bar{y} a : y$ producit Leibnitius. ex qua obscura adhuc manet curvæ constructio. Imo ne a quidem adsumit, sed ponit $t \propto 1$, unde ipsi æqualis $x \propto \int d\bar{y} : y$. Unde concludit curvam quæsitam pendere à quadratura hyperbolæ quod plane obscurum est unde constat.

Hæc curva MC [Fig. 127], quæ est Logarithmica, construi poterit data quadratura hyperbolæ. Oportet enim ejus punctum quodlibet C ita esse positum ut ductis



CF, CG, spatium hyperbolicum MD^hFB, æquetur rectangulo IHL, adeoque semper spatium BR rectangulo minimo HS. Hoc est semper $aady : y \propto adx$. Unde patet si æqualia sint spatiola BR, ZF, etiam æqualia debere esse spatiola KG, GY, ideoque et lineolas IO, Oλ. Spatiola autem BR, ZF sunt æqualia quando proportionales sunt



RQ, FB, VZ; tuncque etiam proportionales sunt Rδ, Fγ, Vβ, hoc est NI, CO, βλ. Ergo ea est natura curvæ MC^h, ut si NI, CO, βλ proportionales sint, simul rectæ IO, Oλ sint æquales. quam scimus esse proprietatem Logarithmicæ, cujus asymptotos AT.

Et hujus quidem subtangens, ut OT , semper fiet æqualis a . Angulus quem curva facit ad MA est semirectus. Quod aliter fuisset [Fig. 128] si multiplicassem utrinque per b , unde $b\bar{d}\bar{x} \propto b\bar{a}\bar{d}\bar{y} : y$. Tunc enim rectangulum hyperbolæ fuisset ab et curva MC exisset à termino rectæ b , si hæc in asymptoto AL accepta fuisset, ut in hac figura.

NB. Potest quidem hæc Curva Logarithmica per puncta quotlibet construi absque quadratura Hyperbolæ, sed non ita ut subtangentem habeat datæ huic æqualem, quod hic fecimus.

—

V.

À PROPOS DE LA MÉTHODE DU MARQUIS DE L'HOSPITAL ¹⁾.

1692

Huygens prépare la réponse à de l'Hospital du 22 octobre 1692 (T. X, p. 325). Voyez les notes que nous avons ajoutées à cette lettre.

§ 1. Comment il a pu trouver qu'à la foutangente $\frac{y \sqrt{aa + yy}}{a}$ appartenait la courbe $2yzz \propto aay + 2aaz \sqrt{2}$? J'ay eu de la peine à prouver que cela est ainsi. Je le prouve en tirant de cette courbe la foutangente par la règle des Tangentes, vient $\frac{4yzz - aaz \sqrt{2}}{2zz - aa}$, qui doit être la même que $\frac{y \sqrt{aa + yy}}{a}$. Ce que je trouve être ainsi, en substituant 3 fois des valeurs, suivant l'équation donnée de la courbe. Une autre preuve est icy à cette page:

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{-2yzy + aay + 2aaz \sqrt{2} \propto 0}{-2zz + aa + \frac{2aaz \sqrt{2}}{y} \propto 0} & \text{per } y & \\
 \text{Subtangens ex regula post divisionem per } y & & \\
 \frac{+4zz - \frac{2aaz \sqrt{2}}{y}}{\frac{+2aaz \sqrt{2}}{yy}} & & \\
 \frac{+2zyy - aay \sqrt{2}}{+aa \sqrt{2}} \text{ Substit. valorem } z \propto \frac{aa \sqrt{2} + \sqrt{2} a \sqrt{aa + yy}}{2y} & & \\
 \frac{+yaa \sqrt{2} + \sqrt{2} a y \sqrt{aa + yy} - aay \sqrt{2}}{+aa \sqrt{2}} & & \\
 \frac{y \sqrt{aa + yy}}{a} & \text{fubtangens implicita.} &
 \end{array}$$

¹⁾ Manuserit H, p. 103.

Ou, en ôtant les incommensurables, $aa y + 2 a a z \sqrt{2} \propto 2 y z z$. Que l'on mène à présent deux parallèles quelconques AFI, BGH à l'asymptote TE. Et ayant pris $TE \propto a$, parametre ou souteangente; $EL \propto FI$; $EK \propto GH$; et mené les droites TG, TF, et les parallèles LD, KC qui rencontrent la Logarithmique aux points D, C; je dis que la portion AB de cette Logarithmique est égale à $TG - TF + LD - KC$.

Demonstration. Ayant pris l'arc BM infiniment petit, et mené MO parallèle à BH, l'on nommera, comme fait Mons^r. Leibnitz, BN ou HP, dy ; MN dx ; et l'on aura par la propriété de la Logarithmique $dx \propto \frac{ady}{y}$, d'où l'on tire BM ou $\int \frac{ady}{y} \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$\propto \frac{dy \sqrt{aa + yy}}{y} \propto \frac{aady + yy dy}{y \sqrt{aa + yy}}$: or il est clair que la somme des $\frac{y dy}{\sqrt{aa + yy}}$ dans la portion AB $\propto TG - TF$. de sorte qu'il ne reste plus qu'à démontrer, que la somme des $\frac{aady}{y \sqrt{aa + yy}} \propto LD - KC$: ce que je prouve ainsi. Soit prise KQ $\propto OP$, et soit menée QS. l'on trouvera par la Methode des Tangentes de Barrou ou de M^r. Leibnitz, que OP ou KQ $\propto \frac{a^2 dy \sqrt{2} + aady \sqrt{2aa + 2yy}}{2yy \sqrt{aa + yy}}$. Or par la propriété de la Logarithmique RS $\propto \frac{a \text{ in KQ}}{EK} \propto \frac{aady}{y \sqrt{aa + yy}}$. Donc la somme des RS c'est à dire LD — KC \propto à la somme des $\frac{aady}{y \sqrt{aa + yy}}$ dans la portion AB. Donc &c.

Ayant examiné cette Construction et Demonstration, je les ay trouvées bonnes, et l'invention admirablement belle et subtile. Voir pag. 99, 100, 101, 102, 103, item 160³⁾ ou est ma solution. Il aura trouvé que la construction de la courbe dont $\frac{ay \sqrt{aa + yy}}{aa}$ est souteangente, dependoit de la quadrature de l'hyperbole, et qu'ainsi on la peut construire par le moyen de la Logarithmique. Or elle sera reduite à la quadrature de l'hyperbole, si la quadrature de la courbe $\theta \theta x x a a + \theta \theta x^4 \propto a^6$ se reduit à celle de l'hyperbole.

En marge: Au lieu de dy je mets λ , au lieu de dx je mets z , ce qui est plus commode. Comparez à la p. 509 qui précède le § 1^{er} de la Pièce III (theorema Barrovij).

En marge: Notez que parce que $ET \propto a$, il s'en suit que GT est parallèle à celle qui toucheroit la courbe en B, et qu'ainsi $G\beta$ est égale et parallèle à BM. d'où il

³⁾ Ce sont toutes des pages du Manuscrit H. Les p. 99 et 101 ont été citées respectivement aux p. 325 et 327 du T. X, et la p. 160 (solution définitive du problème de la rectification de la logarithmique) y a été publiée aux p. 358—360.

paroît que menant \mathcal{H} perpendiculaire sur $G\beta$, la partie $G\mathcal{H}$ fera $\frac{ydy}{\sqrt{aa + yy}}$. Et on voit aisément que la somme de toutes celles cy fera $\propto TG - TF$.

Voyez en outre sur la rectification de la logarithmique l'article de Huygens publié dans la livraison de février 1693 de l'„Histoire de Ouvrages des Sçavans" (T. X, No. 2793, à la p. 407) que nous citons aussi à la fin de la Pièce VI qui suit.

VI.

LE PROBLÈME DE LA CHAÎNETTE, ETC.

1691 et 1693

Nous avons publié dans les Tomes IX et X — voyez e.a. ce qui a été dit à la p. 500 (note 3) du T. IX d'un article de 1900—1901 de D. J. Korteweg — un grand nombre de passages, tirés des manuscrits, sur le problème de la chaînette; on peut consulter là-dessus, outre les Tables des „matières traitées” de ces deux Tomes, le § 7 de la p. 513 qui précède et la Table à la fin du présent Tome qui donne la liste des pages des Manuscrits F, G, H et I utilisés dans les Tomes IX et X.

Parmi ces Pièces on trouve au T. X les deux articles suivants de Huygens publiés par lui-même.

T. X, p. 95, No. 2681: *Clarissimis et Eruditione conspicuis viris Aëtorum Eruditorum auctoribus Lipsiæ, Hagæ Comitum 5 Maj. 1691*, lettre imprimée dans la livraison de juin 1691 (p. 281—282) des „*Acta Eruditorum*” sous le titre *Christiani Hugonii, Dynastæ in Zulechem* ⁴⁾ *solutio ejusdem problematis*.

T. X, p. 407, No. 2793: Lettre à H. Basnage de Beauval, imprimée au mois de février (p. 244—257) dans le fascicule de décembre 1692, janvier et février 1693 de l’„*Histoire des Ouvrages des Sçavans*”. Cette lettre ne traite d’ailleurs pas exclusivement de la chaînette, mais aussi de la traîtrice, de la rectification de la courbe logarithmique (comparez la fin de la Pièce V qui précède) et de la quadrature du „*folium Cartesii*”.

⁴⁾ Ceci est une erreur de la rédaction des *Acta Eruditorum*. En 1687, après la mort de son père Constantyn, Huygens avait échangé le titre de Seigneur de Zuylichem contre celui de Seigneur de Zeelhem. Il attire lui-même l’attention sur cette erreur dans une lettre de 1691 (T. X, p. 134).

VII.

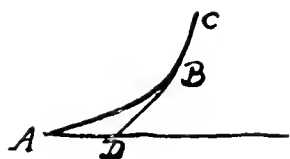
SOLUTION D'UN PROBLÈME MATHÉMATIQUE PROPOSÉ PAR JEAN BERNOULLI.

[Sept. 1693]

T. X, p. 512, No 2823: C. H. Z. de Problemate Bernouliano in actis Lipfienfibus hujus anni pag. 235 propofito, article publié dans les „Acta Eruditorum” d’octobre 1693.

Il s’agit du problème formulé comme fuit par de l’Hofpital (T. X, p. 454): „La courbe ABC [Fig. 130] a une propriété telle, que chacune de fes touchantes BD eft toujours à la partie AD de l’axe prife entre fon origine A et la rencontre D de la touchante, en raifon de p à q . On demande la nature de cette ligne ou la maniere de la decrire”.

[Fig. 130].



Voyez dans le T. X, outre le No. 2823, le No. 2821, où nous avons publié les calculs de Huygens du Manufcrit I qui fe rapportent à ce problème.

[Sept. 1694]

L’article No. 2875 de la p. 673 du T. X: C. H. Z. Constructio univerfalis Problematis a Clariffimo Viro, Jo. Bernoulio, fuperiori anno menfe Majo propofiti, publié en feptembre 1694 dans les „Acta Eruditorum”, fe rapporte au même fujet ¹⁾.

¹⁾ Il en eft de même de la lettre du 1 octobre 1693 de Huygens à de l’Hofpital (T. X, p. 534, No. 2828).

L’article de feptembre 1694 eft immédiatement fuivi dans les Acta Eruditorum par une courte Pièce tirée par Leibniz d’une lettre de Huygens. Elle fe rapporte à la courbure des voiles d’un vaisseau d’après Jacques Bernoulli et eft intitulée Excerpta ex epiftola C. H. Z. ad G. G. L. (T. X, No. 2874).

VIII.

A PROPOS DES „REFLECTIONS UPON ANCIENT AND
MODERN LEARNING” DE 1694 DE W. WOTTON.

[1694 ou 1695] ¹⁾

Reflexions upon Ancient and Modern Learning. by Will. Wotton. at the sign of the Tempel [sic], near the Inner-Temple-Gate, in Fleetstreet. 94.

Il y a un discours inferè de M. Edmond Halleij. of Ancient and Modern Astronomy and Optics. Il appelle les quarts de Cercle avec des verres de lunette Instruments of the production of Grefhams: Il ne parle point des nouveaux ni vieux Satellites. Il loue M. Newton. St. Paul Neile ²⁾. Φιλόπατρις comme tous les Anglois.

Il y a aussi un discours de Mr. John Craige ³⁾ touchant l'Arithmetique et Geometrie. Il loue Newton Leibniz, moy et autres: Il dit que des Cartes n'a pas compris l'intention des anciens dans le Probleme de Pappus, et que Newton l'a resolu comme il faut.

Il estime grandement la methode de Cavallerius qui a mon avis n'est pas une methode de demontrer, mais de montrer qu'on peut former une demonstration ⁴⁾. Et Archimede ne l'a pas ignoree ⁵⁾, comme dit aussi Wallis ⁶⁾.

¹⁾ Manuscrit I, p. 130 (le manuscrit n'a pas d'autre pagination que celle de Huygens). La p. 131 porte la date du 29 janvier 1695 (voyez sur cette page la p. 338 du T. XIX).

C'est une des dernières pages que Huygens ait écrites, du moins dans le Manuscrit I. Les p. 132—134 traitent d'un sujet astronomique, le reste du Manuscrit est en blanc.

²⁾ Voyez e.a. sur Neile astronome quelques pages de notre T. XV, sur Neile mathématicien la note 1 de la p. 210 du T. XVIII.

³⁾ On peut voir dans notre T. X que Huygens connaissait les œuvres mathématiques de Craig ou Craige qui avaient vu le jour en 1685 et 1693.

⁴⁾ Nous avons relevé ce passage à la p. 479 de l'Avertissement. Voyez aussi sur les „démonstrations”, c. à. d. les „démonstrations formelles”, les notes 31 des p. 181—182 et 104 de la p. 215 qui précèdent. Nous y renvoyons e. a. à la p. 337 du T. XIV.

⁵⁾ Voyez encore sur ce sujet la sentence de Huygens, datant sans doute de 1659, que nous avons publiée à la p. 286 du T. XVII en l'intitulant: „Remarque générale sur le calcul de la grandeur d'une ligne, d'une surface ou d'un volume en partant p. e. de la considération de la pesanteur:

L'auteur montre qu'il est savant en anatomie et rapporte toutes les nouvelles découvertes par le menu.

Dans sa dernière lettre, celle du 4 mars 1695, à son frère Constantyn (se trouvant en ce temps à Londres en sa qualité de secrétaire du roi Guillaume), Huygens recommande la lecture du livre de Wotton.

méthode d'Archimède". Nous rappelons que le manuscrit de la Méthode d'Archimède (voyez e. a. sur cet écrit la p. 178 qui précède) n'a été découvert qu'au début de notre, e. à. d. du vingtième, siècle; mais l'application de cette méthode au cas de la parabole dont Huygens parle à la p. 286 du T. XVII (application à laquelle Archimède avait donné la forme d'une démonstration rigoureuse) faisait partie des œuvres connues du géomètre grec; or, la connaissance de ce seul cas a permis à quelques mathématiciens du dix-septième siècle d'appliquer cette méthode infinitésimale à d'autres problèmes: voyez, aux p. 298 et 299 de notre T. XI, faisant partie des „Theoremata (de Huygens de 1651) de Quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro", les figures où des segments d'hyperbole ou d'ellipse sont attachés à des fléaux de balances fictives et tenus en équilibre par des triangles.

- *) Dans la „Dedicatio" à W. Oughtred de son „Arithmetica infinitorum" de 1655 Wallis écrit: „Ineunte anno 1650 incidi in Torricellii scripta Mathematica... ubi inter alia Cavallerii *Geometriam Indivisibilibum* exponit... visum erat mihi... eo spectare non pauca quæ apud... Archimedes passim exstant... Et quidem si unius Parabolæ quadratura Archimedes tantum nobilitaverit... gratum illud orbi Mathematico futurum satis præsenſi, si etiam ejusmodi figurarum infinita genera quadranda docerem". Etc.

Dans une lettre à Leibniz du 16 janvier 1699 („Opera math." III, 1699, p. 693) Wallis écrira: „Quod tuus *Calculus Differentialis* multa habet cum aliorum sensis communia, etiam ipsius *Archimedis*; tu (pro candore tuo) libere profiteris: Non tamen est inde minus æstimandus. Nam multa sunt, quorum prima fundamenta fuerint Veteribus non ignota; ita tamen intricata & difficultatis plena, ut sint ea nostra ætate reddita multo dilucidiora & usibus aptiora".

Nous saisissons cette occasion pour rappeler — puisque les logarithmes jouent un assez grand rôle dans le présent Tome — que les mérites de Torricelli ressortent aussi de l'article de 1900 de G. Loria „Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logaritmica" que nous avons cité à la p. 441 du T. XIV; nous ajoutons qu'on trouve le nom de Cavalieri, en même temps que ceux de Galilée et de Neper, à la p. 82 du T. XIX où il est question (p. 82 et 83) de la courbe logarithmique et de ce que nous avons appelé la „méthode des fluxions" de Huygens de 1668.

RÈGLES DE L'ACCOMPAGNEMENT



Avertissement.

Un an après la mort de son père que eut lieu pendant le séjour de 1686—1687 de Fatio de Duillier en Hollande, Huygens fixa sa résidence à Hofwyck près de la Haye¹⁾. C'est là sans doute qu'il rédigea définitivement le *Traité de la Lumière*²⁾ et le *Discours de la Cause de la Pesanteur* et qu'il exécuta la plupart des calculs des 7 ou 8 dernières années de sa vie sur la dioptrique³⁾, le mouvement périodique des horloges⁴⁾ et la géométrie infinitésimale⁵⁾.

Nous aimons à croire qu'il ne se borna pas, en fait de musique, à écrire le *Nouveau Cycle Harmonique* ainsi que d'autres pièces théoriques⁶⁾ mais qu'il continua aussi à pratiquer lui-même ce noble art⁶⁾ et peut-être à chanter comme il l'avait fait dans sa jeunesse⁷⁾.

¹⁾ Voyez sa lettre de mai 1688 à son frère Constantyn (T. IX, p. 295).

²⁾ T. XIX.

³⁾ T. XIII.


⁴⁾ T. XVIII, p. 546 — 596. Sur l'origine des recherches sur les mouvements oscillatoires on peut consulter e. a. le dernier alinéa de la p. 486 du T. XVIII et la p. 357 du T. XIX.

⁵⁾ Présent Tome.

⁶⁾ Voyez e. a. les p. 104 et 161 qui précèdent.

⁷⁾ Voyez la p. 356 du T. XIX.

Fondée par son père en 1640, la maison de campagne Hofwyck avait été de tout temps un temple de musique. On y entendait fréquemment le son des violes, des espinettes et des luths, celui du clavecin, des théorbes et des guitares. Nous terminons ce volume par la publication des dernières feuilles — non datées il est vrai — du portefeuille „Musica”, nous figurant que c’est à Hofwyck que Huygens les rédigea.



RÈGLES DE L'ACCOMPAGNEMENT ¹⁾.

1. La main droite doit tousjours [corrigé au crayon en : d'ordinaire] faire 3 parties [ajouté au crayon : et quelques fois quatre].
2. Il ne faut pas faire la 5 de la main gauche sans ajouter la tierce.
3. Dans les basses fort basses on ne fait point d'accord de la main gauche que l'octave seulement.
4. On monte rarement plus haut que le dernier mi.
5. Il ne faut pas escarter beaucoup la main droite de la gauche [ajouté au crayon : en accompagnant].
6. Quand le chant monte hant, il est bon d'accompagner vers le haut du clavier.
7. Il ne faut pas lever les deux mains a la fois pour reprendre plus haut, mais faire demeurer la basse pendant que la main droite prend le mesme accord, qu'elle faisoit, à un endroit plus haut. car chaque accord se prend en 3 différentes manieres de la main droite.
8. D'ordinaire il faut accompagner la basse de la 5^e et 3^e.
9. Seulement sur un mi ou ci ou sur une dièse la 6^e et 3^e d'ordinaire est meilleure mais quand il y a un $\frac{1}{2}$ marqué au dessus c'est signe qu'il faut l'accompagner de la 5 et 3.
10. Quand on fait la 6^e il n'est pas bon de redoubler l'octave de la basse en bas sur tout au second temps de la mesme 6^e. Il faut remplir avec la main gauche les parties vuides vers en haut, et frapper la 3^e ou la 6^e pres de la basse pour le second temps.

¹⁾ Dernières feuilles du Portef. „Musica”. Nous publions les règles — en leur donnant le titre „Règles de l'accompagnement” — dans l'ordre indiqué par les chiffres de Huygens. Nous y ajoutons le facsimilé d'une autre feuille du Portef. „Musica”. On y lit: Accords parfaits, scavoir de quinte et tierce, et imparfaits de 4 et 6^e, avec leurs agreements. Ils se font de trois manieres, et en montant plus haut sur le clavier on fait les repetitions de ces 3 manieres. Comme ces accords sont icy sur ut de la basse, ils se font de mesme sur ro, mi, fa, fol, la, ça. — Cadences en 4 temps avec leurs agreements. Agreements = Cieraden (p. 69, note 9). Voyez sur le „nom particulier” qu'on peut donner „a chacun des 12 tons de l'octave” les p. 129 et 167 qui précèdent.

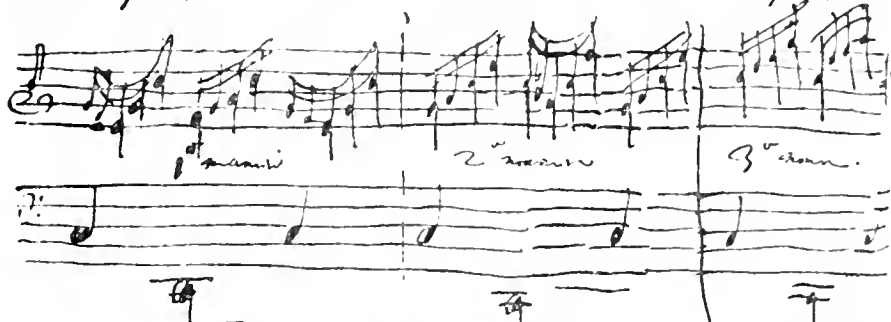
- 10 [bis]. Sur un ci il ne faut pas que le dessus face l'octave mais il faut l'accompagner de la 6 et 3 [corrigé au crayon en: .. l'octave quand on l'accompagne de la 6 mineure].
11. Devant l'octave il faut presque toujours que la 6^e soit majeure.
12. La fausse quinte ²⁾ s'accompagne de la 6 mineure et de la 3.
13. Le triton ²⁾ s'accompagne de la 6^e majeure et 2^e majeure.
14. La 7^e s'accompagne de la 5 et 3 majeure ou mineure, quelque fois de la 10 et 8 seulement excepté sur ut ou fa au ton naturel [ajouté au crayon: ou l'octave ne peut pas estre].
[Le bout de phrase: „excepté etc.” a été ajouté plus tard en remplacement de quelques autres mots biffés ³⁾. A la fin Huygens a ajouté encore au crayon: on doit omettre la 5].
15. La 2^e doit estre accompagnée de la 4 et 5 [ajouté au crayon: ou de la 4 et 6 majeure. et la 2^e se peut redoubler [corrigé au crayon en: se redouble(r) d'ordinaire]. la note d'après descend d'ordinaire d'un demiton et les touches de la 4 et 5 precedente font contre cette derniere basse la 6 et 5.
16. [Alinéa biffé au crayon]. Dans la 7^e majeure, c'est a dire qui se fait sur fa ou ut dans le ton naturel l'on ne redouble point l'octave, et ainsi il faut l'accompagner de la 3^e majeure et 9^e ou de la 5 et 3 seulement.
17. Quand la basse va descendre d'un semiton, et à un accord parfait comme aux cadences, il n'y faut point d'8^e.
On fait ces cadences en faisant la 7^e et puis la 6 contre la premiere note de la basse. [Les mots: „6 contre . . . la basse” ont été biffés au crayon et remplacés par le seul mot „sauve” (?)] Ou en sauvant la 7 au dessus [ajouté au crayon, en remplacement de quelques mots biffés: et alors] au lieu d'octave, on adjoute la fausse quarte [corrigé au crayon en: adjoute le triton]. [Biffé au crayon: aux autres cas on redouble la 3, ou la 6.] Mais quand la note de basse a la quelle on descend sera accompagnée de la 6^e, alors l'on peut [corrigé au crayon en: doit] faire l'octave dans l'accompagnement de celle qui precede.
18. Quand le dessus fait la 3^e ou la 6^e contre la basse, les deux mains peuvent [ajouté au crayon: quelques fois] monter ensemble. Et quoyque les parties du milieu semblent faire 2 octaves ou 2 quintes, elles n'en font pas, parce qu'elles se croisent. mais le dessus contre la basse ne doit jamais faire 2 octaves ni 2 quintes, parce qu'on ne peut pas faire monter aucune partie plus haut que le dessus, ni descendre au dessous de la basse [le dernier bout de phrase: „parce qu'on . . . la basse” a été biffé au crayon].
19. Sur la 7 mineure l'on redouble l'octave de la basse, mais non pas sur la 7 majeure.
- 19.1. L'on ne redouble jamais la 7^e.

²⁾ Sur la fausse quinte et le triton on peut consulter e. a. la note 1 de la p. 165 qui précède.

³⁾ Après le mot „seulement” Huygens avait d'abord écrit: quelque fois de la 3 maj. et 9^e, excepté sur mi ou ci, dans le ton naturel.

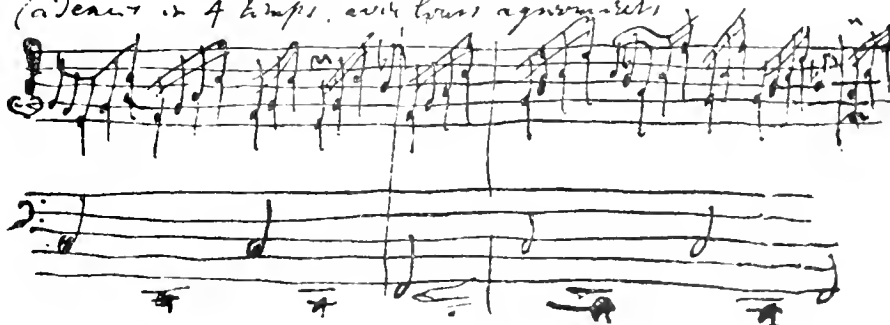
20. Sur une dièse qui ne fait qu'un temps et dont on monte à la note prochaine, il est presque toujours bon de faire la fausse quinte.
- 20.1. On ne redouble pas la basse quand c'est une feinte. pour le second temps quand la basse est une feinte ou un ci on fait la fausse quinte de la main droite.
21. Dans la mesure à deux temps, sur une o on bat quelques fois deux fois l'accord, quelques fois on ne redouble qu'une des parties basses.
22. Sur le point au commencement d'une mesure on redouble tout l'accord, autrement seulement une des parties basses.
23. Sur la blanche d'une mesure à 3 temps on rebat pour le second temps une des parties basses, et s'il y a un point en suite, on rebat pour cela l'accord entier.
24. On ne doit pas frapper l'accord sur une crochue quand elle finit un des 4 temps de la mesure, mais quand elle en commence un. [Ajouté au crayon: l'on fait pour- tant souvent de la main droite une tierce contre la crochue qui finit un temps laissant les autres doigts sur l'accord ou ils estoient].
25. On ne doit pas pointer les notes dans l'accompagnement quoyqu'on les voye pointees dans les parties qui chantent.

Accords parfaits, savoir de quois se-baser, &c imparfaits



de 4 et 6^e avec leurs agréments. Ils se font de trois manières; et se montent plus haut sur le clavier ou font les répétitions de ces 3 manières. Comme ces accords sont sur ut de la basse. ils se font de même sur re, mi, fa, sol, la, sa.

(à deux et 4 temps, avec leurs agréments)



TABLES.

I. PIÈCES ET MÉMOIRES.

	Page.
HOMMAGE DE HUYGENS A THÉOCRITE [1688].....	1—2
MUSIQUE ET MATHÉMATIQUE.....	3—13
AVERTISSEMENT.....	5—7
I. Critique du livre de 1655 de M. Meibomius „De proportionibus dialogus” [1656].....	8—11
II. Musique et logarithmes chez Huygens [1661].....	12
III. La composition ou addition des rapports [1662].....	13
MUSIQUE.....	15—173
AVERTISSEMENT GÉNÉRAL.....	17—19
TITRE.....	21—22
I. Théorie de la consonance.....	23—39
Avertissement.....	25—29
A. Origine du chant. Rapport des longueurs des cordes consonantes suivant Pythagore, etc. [1661?].....	30—37
B. Autres considérations sur la gamme diatonique, produit d'intervalles con- sonants. Les demitons chromatiques modernes.....	38—39
II. La division du monochorde [1661].....	41—60
Avertissement.....	43—47
A. Copie d'une partie d'un écrit d'un des deux frères Hemony intitulé „Vanden Beyert” (c.à.d. du carillon).....	48
B. Divisio Monochordi I.....	49—56
C. Divisio Monochordi II.....	56—58
Appendice à la Pièce C [1676].....	59—60
III. Pièces sur le chant antique et moderne.....	61—82
Avertissement.....	63—67
A. Le tempo giusto.....	68—69
B. Les divers modes.....	69—76
C. Différences de hauteur, par rapport aux tons des instruments, résultant de la justesse du chant.....	76—77
D. Les anciens connaissaient-ils le chant polyphone?.....	78—81
E. Mérite des „Belgæ”, suivant Guicciardini, dans l'établissement ou ré- tablissement du chant polyphone.....	82
IV. Notes se rapportant à des écrits de musicologues anciens.....	83—105
Avertissement.....	85—88
Texte.....	89—103

	Page.
<i>Appendice</i> . „Tons de ma flute”. La lirène (?)	104—105
V. Notes se rapportant à des écrits de musicologues modernes	107—137
Avertissement	109—110
Texte	111—137
VI. Le (nouveau) cycle harmonique	139—173
Avertissement	141—146
<i>A.</i> Divisio octavar in 31 intervalla aequalia (per logarithmos) [1661]	147—149
<i>B.</i> Table intitulée „Division de l’octave en 31 parties égales”	149—150
<i>C.</i> Commentaire sur une table	151—153
<i>D.</i> Projet d’une lettre à Bafnage de Beauval	153—155
<i>E.</i> Cycle harmonique par la division de l’octave en 31 dièses, intervalles égaux	155—164
<i>F.</i> Lettre à Bafnage de Beauval touchant le cycle harmonique (connue sous le nom de Novus Cyclus Harmonicus) [1691]	164
<i>G.</i> Quelques notes se rapportant à la division de l’octave en 31 intervalles égaux	165—167
<i>Appendice I.</i> L’idée de la περιχώλωσις, etc. (programme de la Pièce E) ..	168—170
<i>Appendice II.</i> Tableau comparatif de 11 ou 30 moyennes proportionnelles d’après différents calculateurs	171—173
HUYGENS ET EUCLIDE	175—191
AVERTISSEMENT	177—182
TITRE	183
I. A propos de l’ouvrage projeté d’un mathématicien inconnu se proposant de corriger les <i>Eléments</i> d’Euclide [1672 ou 1673?]	185—187
II. L’incommensurable [1675]	188—189
III. Le corps, la surface, la ligne, le point [1690]	190—192
MATHEMATICA VARIA: LES MANUSCRITS	193—196
HUYGENS À L’ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES. COMMUNICATIONS SUR DES SUJETS DE MATHÉMATIQUE	197—365
AVERTISSEMENT	199—222
TITRE	223
I. Règle pour trouver les logarithmes [1666 ou 1667]	225—227
II. Demonstratio regulæ de maximis et minimis [1667]	228—241
III. Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum [1667]	242—255
IV. De curvis paraboloidibus et hyperboloidibus [1667]	256—257
V. Examen du livre de Wallis „ <i>Arithmetica infinitorum</i> ” de 1655 [1667]	258
VI. Insuffisance de la démonstration de Gregory de l’impossibilité de la quadrature du cercle [1668]	259
VII. Sur la quadrature arithmétique de l’hyperbole par Mercator et sur la méthode qui en résulte pour calculer les logarithmes [1668]	260—264
VIII. Problema Alhafeni [1669 ou 1670?]	265—271

	Page.
IX. Constructio loci ad hyperbolam per asymptotos [1670?]	272—281
X. Sur les lieux plans d'Apollonios [1678]	282—284
XI. Rectification et quadrature de l'épicycloïde [1678—1679]	285
XII. Sur les équations solides [1680]	286—287
XIII. Théorème sur les points d'intersection des coniques dont les axes sont paral- lèles ou à angles droits [1680]	288—290
<i>Appendice I</i> à la Pièce I. Logarithmes et suites géométriques [1661?]	291—294
<i>Appendice II</i> à la Pièce I. Règle pour trouver les logarithmes [1661]	295—297
<i>Appendice I</i> à la Pièce II. A propos de l'ouvrage de 1659 „de maximis et minimis etc.” de Viviani [1660]	298—299
<i>Appendice II</i> à la Pièce II. Cônes maximaux [1669]	300—301
<i>Appendice</i> à la Pièce III. Tangente à la courbe hyperboloïde de Ricci [1666]	302
<i>Appendice I</i> à la Pièce VI. Premières réflexions sur la „Vera circuli et hyper- bolæ quadratura” de 1667 de Gregory [1667 ou 1668]	303—307
<i>Appendice II</i> à la Pièce VI. Projet d'une réplique à la réponse de Gregory à la critique de Huygens [1668]	308—309
<i>Appendice III</i> à la Pièce VI. Calculs au sujet des approximations de Gregory dans le cas du cercle [1668]	310—315
<i>Appendice IV</i> à la Pièce VI. Nouvelles approximations pour le cercle [1668]	316—322
<i>Appendice V</i> à la Pièce VI. Calculs au sujet des approximations de Gregory dans le cas de l'hyperbole [1668]	323—327
<i>Appendice I</i> à la Pièce VIII. Ratio constructionis problematis Alhazeni [1672]	328—329
<i>Appendice II</i> à la Pièce VIII. Solution préférée du problème d'Alhazen [1673]	330—333
<i>Appendice</i> à la Pièce XII. Recherches se rapportant au problème des deux moyennes proportionnelles et plus généralement à des „solida problemata” [1682]	334—360
<i>Appendice</i> à la Pièce XIII. Démonstrations, l'une antérieure, l'autre posté- rieure à la rédaction de la Pièce XIII, du théorème sur les points d'inter- section etc. [A. 1680, B. ?]	361—365
LES TROIS GRANDS PROBLÈMES DE L'ANTIQUITÉ	367—404
AVERTISSEMENT	369—377
TITRE	379
I. Huygens et Hobbes [1666]	381
II. Une quadrature approchée du cercle [1668]	382—387
III. Le développement du „numerus impossibilis” (π) en série par Leibniz [1674]	388
IV. Du livre de Wallis, <i>Historia Algebrae anglicæ</i> . Développement du „numerus impossibilis” (π) en une fraction continue [1686 ou 1687]	389—394
V. <i>Progressio optima ad quadrandum circulum ac non tantum Leibnitiana multo citius appropinquans sed et Newtonianam post se relinquens simpliciorque ea ac commodior</i>	395—400

	Page.
VI. Huygens et Hubertus Huighens [1692]	401
VII. Investigatio duarum mediarum	402—403
MATHEMATICA VARIA 1666—1681	405—444
AVERTISSEMENT	407—410
TITRE	411
I. A Paris (mai 1666—août 1670)	413—420
I, 1. De combinationum mirandis [1668]	413—416
I, 2. Trois problèmes sur les triangles [1668 ou 1668—1669]	417—418
<i>Appendice</i> . „Sur la 15. proposition” [de Frenicle]	419—420
II. A la Haye (septembre 1670—juin 1671)	
III. A Paris (juillet 1671—juillet 1676)	421—441
III, 1. Question des signes dans les équations de géométrie analytique [1673]	421
III, 2. Trois problèmes sur le triangle [1673—1674]	422—431
III, 3. Un théorème sur la tangente à l'ellipse [1674 ou 1675]	432
III, 4. Un problème sur le quadrilatère, avec extension du théorème trouvé en cette occasion sur le quadrilatère inscrit dans une circonférence de cercle, à un polygone inscrit quelconque [1675]	433—440
III, 5. Les „quantitez imaginaires” [1675]	441
IV. A la Haye (juillet 1676—juin 1678)	442—443
IV, 1. Questions se rapportant au traité „Van rekeningh in spelen van geluck” [1676]	442
IV, 2. Question des signes dans les équations de géométrie analytique [1676 ou 1677]	442—443
V. A Paris (juillet 1678—août 1681). Question se rapportant au traité „Van rekeningh in spelen van geluck” [1679]	444
MATHEMATICA VARIA 1681—1695	445—476
AVERTISSEMENT	447—449
TITRE	451
I. A propos du „pendulum cylindricum trichordon” (sinusoïde et parabole, courbes osculatrices) [1683]	453—454
II. Démonstration de théorèmes trigonométriques [1687, 1680]	455—461
III. Question se rapportant au traité „Van rekeningh in spelen van geluck” [1688]	462
IV. Examen curvæ lineæ quam Cartesius regulæ et fili ductu describere docet, an sit eadem atque ovalium ipsius prima [1690]	463—466
V. Surface obtenue par la révolution de la parabole autour d'une tangente au fommet [1691]	467—468
VI. Développée du „folium Cartesii” [1691]	469
VII. Solide de révolution obtenu par la rotation de la cycloïde autour de son axe [1691]	470
VIII. Calcul de logarithmes en partant de la considération de l'hyperbole équilatère	

	Page.
[1691].....	471—473
IX. Cycloïde et cissoïde; solides de révolution et centres de gravité [1691 ou 1692]	474—475
X. Calcul du rayon de courbure minimal de la courbe logarithmique [1692] ...	476
PROBLÈMES ET MÉTHODES MODERNES.....	477—554
AVERTISSEMENT	479—488
TITRE	489
I. Fatio de Duillier et Huygens. Méthode des tangentes pour les „curvæ filares” de Tschirnhaus, ou plutôt pour les courbes données en coordonnées bipolaires, tripolaires, etc., les poles étant situés sur une ligne droite [1687].....	491—504
II. Solution du problème proposé par M. Leibnitz dans les nouvelles de la République des Lettres du Mois de Septembre 1687 [sur la courbe de descente uniforme] [1687].....	505
III. Fatio de Duillier et Huygens. Règle pour trouver l'équation d'une courbe lorsque la sous-tangente est donnée en coordonnées cartésiennes (problème inverse des tangentes” ou „problème des tangentes renversées”) [1691]....	506—541
IV. Methodus Leibnitij [1691].....	542—546
V. A propos de la méthode du Marquis de l'Hôpital [1692]	547—550
VI. Le problème de la chaînette, etc. [1691 et 1693].....	551
VII. Solution d'un problème mathématique proposé par Jean Bernoulli [1693 et 1694]	552
VIII. A propos des „Reflections upon ancient and modern learning” de W. Wotton [1694 ou 1695].....	553—554
RÈGLES DE L'ACCOMPAGNEMENT	555—561
AVERTISSEMENT	557—558
TEXTE.....	559—561

II. PERSONNES ET INSTITUTIONS MENTIONNÉES.

Dans cette liste on a rangé les noms sans avoir égard aux particules *de, a, van* et autres.
Les chiffres gras désignent les pages où l'on trouve des renseignements biographiques ¹⁾.

Académie de Caen. 227.

Académie de Montmort. 191.

Académie (française) des Sciences. 130, 145, 178, 186, 196, 197, 206, 207, 211—213, 216, 220, 221, 223—290, 295, 296, 333—335, 375, 407, 408, 410, 419, 481.

Accademia dei Lincei. 123.

Accademia (Reale) d'Italia. 121.

Adam (Charles). 18, 34, 209.

Abrens (H.L.). 1.

Akademie der Wetenschappen (Koninklijke). 6, 32.

Akademie der Wissenschaften (Sächsische). 126.

Alencé (Joachim d'). 207, 597.

Alhazen. 196, 207, 218, 223, 265—271, 328—333, 422.

Alypius. 86, 89, 92, **93**, 94, 96, 100, 126.

Ambros (A.W.). 65, 66, 129.

Apollonios Pergreus. 9, 178, 217, 221, 223, 282—284, 289, 298, 299, 332, 335, 341, 342, 359, 360, 363—365, 480, 531.

Arabes (les savants arabes). 299, 371, 373, 620. Voyez aussi Alhazen.

Aratos. 89.

Archibald (R. C.). 7, 177.

Archiloque. 80.

Archimède. 9—11, **125**, 180—182, 186, 187, 370, 480, 487, 504, 509, 553, 554.

Archytas. 620.

Aristide Quintilien. 26, 86, 89, **90**, 93, 95.

Aristote. 78, 86, 87, 89, 132, **178**, **179**, 181, 188, 192, **371**, 373, 620.

Aristoxène. 5, 7, 26, 33, 35, 78, 86, 91, 94—96, 113, 114, 121, 131, **144**, 155, 168.

Aristoxéniens (les). 31, 34, 35, 121.

Arrighettus (Andreas). 299.

Artusi (Giovanni M.). **24**, 109.

¹⁾ Voyez la note 1 de la p. 675 du T. XVIII.

- Asklepios. 5.
 Athenæus. 96, 131, 132.
 Aubry (A.). 620.
 Augustin (Saint) (Aurelius Augustinus). 120, 121, 128.
 Auzout (Adrien). 227.
 Avoye ou Auoye. 227.
 Aynfcom (Fr. X.). 9.
- Bacchius Senex. 86, 89, 94. **95.**
 Bach (Joh. Sebastian). 129, 144.
 Balfoort (Dirk J.). 64, 69.
 Ban ou Bannius (Joannes Albertus). **82.**
 Barrow (Isaac). 191, **371** - **373**, 488, 507, 509, 513, 549, 601, 605.
 Baryphonus. Voyez Pipegrop.
 Bafnage de Beauval. 22, 141, 145, 147, 153, 164, 481, 551, 606, 607, 609.
 Beaugrand (J. de). 34, 35, 143, 144, 171, 199.
 Beaune (Florimond de). 217, 274, 275, 582 (note), 609.
 Beda Venerabilis. **78.**
 Beeckman (Isaac). 34, 35.
 Bernoulli (Jacques). 390, 552, 621.
 Bernoulli (Jean). 481, 489, 552, 603, 609—611.
 Berthe (E.). 96.
 Beynum (Bertha van B. von Essen). 160.
 Bibliotheca monasterii Schenrentis. 81.
 Bibliotheca nazionale di Firenze. 65.
 Bibliothèque de l'université de Leiden. 381.
 Bibliothèque du couvent S. Salvator à Melfine. 126.
 Bibliothèque royale à Paris. 180.
 Bibliothèque royale de Hanovre. 375, 391.
 Bierens de Haan (D.). 32, 33, 35, **44**, 171, 458.
 Blankenburg (Quirinus G. van). **69**, 129.
 Boèce (Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius). 116.
 Borelli (G. A.). 298, 299.
 Bofmans (H.). 206, 390.
 Boffé (Abraham). 192, 220, 221.
 Boulliau (Himaël). 11, 34, 35, 144, 171, 172, 179, 180, 377.
 Brahmagupta. 439.
 Briggs (Henry). 6, 7, 199, 200, 202, 448, 600.
 Brocard (H.). 211, 620.
 Brouncker (William). 213, 373, 374, 394.
 Brown (Harcourt). 227.

- Brugmans (H. L.). 43, 154, 222.
 Brunet (Pierre). 178.
 Bruno (H.). 18.
 Bryennius (Manuel). 26, 89.
 Bürgi (Jost). 6.
 Buttler (Charles). 119.
 Cantor (Moritz). 221, 409.
 Carcavy (Pierre de). 195, 209, 211.
 Cardanus (Hieronymus). 389.
 Cartes (René des). **17**, 18, 34, **67**, 143, 178-180, 199, 209-211, 216, 217, 228, 230, **242**, **243**,
 274, 275, 284, 335, 337, 343, 361, 389, 437, 448, 451, **463-466**, 469, 480, 484, 485,
 489, 499, 538, 551, 553, 605, 608, 611.
 Caffini (J. D.). 179.
 Catelan (Fr. ? de). 390, 608.
 Cavalieri (Bonaventura). 201, 202, 215, 553, 554.
 Ceulen (Ludolf van). 188, 439.
 Chalcidius. 178.
 Chilmead (Edm.). 89.
 Christ (W.). 132.
 Cicéron (Marcus Tullius Cicero). 125.
 Clærbergen (Ph. E. Vegelin van). 433, 434.
 Clavius (Christoffel). 8.
 Clerfèlier (Cl.). 211.
 Coets (H.). 597, 598.
 Collins (J.). 375, 620.
 Combarieu (J.). 178.
 Copernic (Nicolaus Copernicus). 179.
 Coufin (Jean?). 7.
 Craig (John). 553.
 Crama (non pas Cramers). 49.
 Croifet (Alfred). 80.
 Croifet (Maurice). 80.
 Cyfatus (J. B.). 81.

 Daniel (le prophète). 131.
 Dati ou Datus (Carolus). 298, 299.
 Davenant (Edward). 393.
 Démocrite. **179**.
 Defargues (Girard). 191, 192, 220, **221**, 402, 407.
 Descartes. Voyez Cartes (des).
 Deventer (Ch. M. van). 584 (note).

- Didymus. 114.
 Diels (H.). 99.
 Diophante. 188, 371, 597.
 Doncker (H.). 457.
 Duhamel (J. M. C.). 211.
 Duillier (N. Fatio de). 376, **396**, 484-489, 491-504, 506-541, 544, 557, 597, 601-603, 608.
 Dupont (N.). 154, 157, 158, 160.
 Dupuy. Voyez Pitteanus.
 Düring (I.). 5, 79, 90-93, 95, 99, 100.
 Durven (les van). 88.
 Dijksterhuis (E. J.). **581**, **621**.
- Ecchellenfis (Abraham). 299.
 Einstein (Alfred). 137, 145.
 Eitner (R.). 45.
 Elft (J. van der). 109, 110, **128-129**, 618.
 Eneström (G.). 6.
 Epicure. **179**, 180.
 Epigonus. **96**.
 Eratosthène. 10, 89-92, **128**, 334.
 Etats de Hollande et de Westfrise. 69.
 Euclide. 5, 7-13, 86, 89, 94, 95, 97, 98, 131, 175, **177-180**, 181-192, 199, 200, 434.
 Euler (Leonhard). 145, 200.
 Euthymius (personnage fictif). 9, 10.
 Eutokios. 9, 11, 287.
- Faber Stapulensis (I.). 28, 617.
 Fano (Fabio). 121.
 Fatio de Duillier. Voyez Duillier.
 Ferdinando II de Medicis. 298.
 Fermat (Pierre). 204, 208-212, **221**, 228-230, 232, 233, 242, 243, 245, 248, 249, 300, 302, 335, 390, 407, 606, 608, 619, 620.
 Fétis (F. J.). 7, 145.
 Fogel (Martin). 227.
 Frédéric III, roi de Danemarck etc. 8.
 Frenicle de Bessy (B.). 407, 408, 410, 411, 419.
 Friedländer (Paul). 126.
- Galeus. Voyez Gallé.
 Galilei (Galileo). 18, 30, 33, **69**, 89, 178, 179, 299, 554.
 Galilei (Vincentio, père). 33, **65**, 89, 96, 109, 121.

- Gallé (Jean). 34, 35, 171, **173**.
 Gallois (Jean). 259.
 Gassend ou Gassendi (Pierre). 179.
 Gaudence ou Gaudentius. 86, 89, 93-95, 98, 99.
 Gellibrand (Henry). 199.
 Genebrardus (Gilbert). 119.
 Gent (P. van). 375, **483**, 484.
 Gerhardt (C. I.). 391, 393.
 Gevaert (Fr. A.). **86**.
 Gibel (Otto). **133**, 134.
 Gilbert (W.). 81.
 Girard (Albert). 33, 64, **217**, 363, 371.
 Glareanus (H. L.). **70**, 71, 116.
 Gogavinus (A.). 96.
 Graaf, Graaff ou Graef (A. de). 457, 598.
 Graindorge (André de). 227.
 Gravelaar (N. L. W. A.). 6.
 's Gravefande (G. J.). 164.
 Grégoire de Saint-Vincent. 9, 200—202, 205, 206, 212, 214, 221, 264.
 Gregory ou Gregorius (David). 177, 488, 608.
 Gregory ou Gregorius (James). 188, 212—214, 223, 259, 303—327, 369, 374, **375**, 386, 388, 449, 604, 609, 620.
 Gresham College. 553.
 Groffi. Voyez L. da Viadana.
 Guicciardini (Lodovico). 21, 64, 66, 82.
 Guido Aretinus. 109, 119, 120, **123**, 124—126, 128.
 Guillaume. Voyez Willem III.
 Gutschovius (G. van Gutschoven). 534, 609.
 Gyfelynck (H. J.). 49.

 Halley (E.). 553.
 Händel (G. Fr.). 129.
 Harduinus (J.). 132.
 Heiberg (J. L.). 6, 177, 187, 199, 206, 289, 332, 364, 509, 531.
 Heinfius (Nicolas). 298.
 Helmholtz (H. von). 36.
 Hemony (François). 49.
 Hemony (frères). 17, 18, 21, 28, 29, 43, 44, 48, 49.
 Hemony (Pierre). **41**.
 Henry (Ch.). 209, 211.
 Hérigone (Pierre). 7, 199, 202—204, 208, 209, 212, 616, 619.

- Hermotimus (personnage fictif). 9—11.
 Héron d'Alexandrie. 131, 132, 192.
 Hiéron, roi de Syracuse. 1, 130.
 Hiller (Ed.). 178.
 Hippocrate. 605.
 Hire (Philippe de la). 207, 212, 216, 217, **219—222**, 256, 335, 364, 408.
 Hobbes (Thomas). 13, 258, 379, **381**.
 Horace (Quintus Horatius Flaccus). 132, 219, 416.
 Horrocks (Jeremias). 393.
 Hortley (Samuel). 376, 391, 392.
 Hospital (G. E. A. Marquis de l'). 195, 271, 474, 487—489, 510, 538, 539, 547—550, 552, 598, 605—611.
 Hudde (Johan). 195, 208, 210, 228—230, 233, 242, 243, 300, 437.
 Huighens (Hubertus). 379, 401, 482, 483, 529, 532, 605.
 Hutton (Charles). 205, 206.
 Huygens (Constantyn, frère). 220, 554.
 Huygens (Constantyn, père). 17, 26, 28, 33, 34, 46, 64, 66, 82, 161, 170, 199, 209, 551, 557, 558, 617.
 Huygens (Lodewyk). 161, 191.
 Institut archéologique liégeois. 173.
 Institut de France. 211.
 Ioannes XX (pape). 124.
 Janus (Carolus von Jan). 89.
 Jean (pape). Voyez Ioannes.
 Jean (Saint, apôtre). 120, 125.
 Jeans (James). 144.
 Jonckbloet (W. J. A.). 82.
 Jordan (M. C.). 372.
 Kaibel (G.). 132.
 Kapfberger (Johann Hieronymus von). **127**.
 Kepler (J.). 179, 294.
 Kircher (Athanasius). 85, 89, 110, **123-128**.
 Knott (C. G.). 6.
 Korteweg (D. J.). **551**.
 Lalovera (A. de Lalouvére). 620.
 Land (J. P. N.). **44**, 58, 82, 144, 145, 149.
 Lange (W.). 9.
 Leeuwenhoeck (Antony van). 88.

Lefèvre d'Etaples. Voyez Faber Stapulensis.

Leibniz (G. W.). 188, 195, 374, **375**, 376, 379, 388, 389, 391, 395, 398, 400, 409, 441, 454, 472, 475, 479-481, 483-489, 501-503, 505, 506, 510, 511, 513, 517, 525, 535, 539, 540, 542-546, 549, 552-554, 598-605, 608, 618, 621, 622.

Leopoldo de Medicis. 298, 302.

Lepaige (C.). 172, 219.

Lobkowitz (J. C.). 204.

Loria (Gino). 465.

Loulié (E.). 69.

Lucrèce (Titus Lucretius Carus). 179, 180.

Magalotti (Laurentius). 299.

Maillard ou Maillart (Pierre). 109, **118-120**.

Maire (le). **120**.

Manetti (Braccio). 299.

Maroles (de). 597.

Marchetto. **144**.

Mariotte (E.). 407, 417.

Maferes (Fr.). 205, 206, 261, 302.

Mathematical Association of America. 7.

Maubuisson (de). 422, 428, 429.

Maurolycus (Fr.). 199.

Meibomius (Marcus). 5-7, **8**, **9**, 10, 11, 13, 86, 90, 92-100, 131, 155, 214.

Menæchme. 287, 371.

Menge (H.). 94, 97, 98, 131.

Mercator (Nicolaus). 7, 11, 200, 201, **214**, 215, 223, 260-264, 297, 302, 448, 526.

Merfenne (Marin). 17, 18, 26-29, 33-35, 37, 43, 64-69, 80, **86**, 87, 109, 110, 114, **120-122**, 124, 126, 141-144, 149, 156-158, 162, 163, 168-173, **179**, 195, 199-200, 205, 206, 209, **214**, 294, 296, 297, **409**, **410**, 619.

Méfomède. **89**.

Metius (A. A.). 392.

Mieli (Aldo). 178.

Ministère (français) d'instruction publique. 211.

Moll (W.). 69.

Monforte (A.). 440.

Montalent (de). 44, 46.

Montmort (H. L. II. de). 191.

Moray (Robert). 12, 18, 145.

Muris (Johannes de). **124**, 129.

Muziekhistorisch Instituut à Utrecht. 46.

Mylon (Cl.). 221.

- Neidhardt (J. G.). 145.
 Neile (Paul). 553 ¹⁾.
 Neper ou Napier (John). **6**, 173, 199, 370, **447**, 459, 554, 600.
 Newton (Isaac). **374**, 376, 379, 391, 393, 395, 396, 448, 449, **153**, 485, 486, 488, 514, 553.
 Nicomaque (Nikomachos Gerafenus). 5, 86, 89—91, 99.
 Nicomedes. 537.
 Niquet (V.). 227.
- Oldenburg (Henricus). 195, 196, 207, 218, 313, 328, 374, 376, 388, 391, 483, 621.
 Oosterwijk (S. H.). 291.
 Ostwald (W.). 192.
 Oughtred (W.). 554.
 Ovide (Publius Ovidius Naso). 416.
- Paige (C. le). Voyez Lepaige.
 Papin (D.). 483.
 Pappos. 9, 284, 425, 432, 553.
 Pafaro (Domenico de). 161.
 Pascal (Blaise). 390, 407, 408, 448, 453 475.
 Perrault (Claude). **85**, 86, 109, 129, **130—133**, 319.
 Perrault (Pierre). 131.
 Philippe II, roi d'Espagne. 82.
 Philolaus. 99.
 Philosophes grecs (les). 372.
 Pindare. 85, 89, 110, **126**, 131, 132.
 Pipegrop (Heinrich). 133, **134**.
 Platon. 11, 18, 180.
 Platoniciens (les). 179.
 Plaute (Titus Marcus Plautus). 81.
 Pline (Cajus Plinius). 132.
 Plutarque. 80, 179.
 Pollux (Julius). 96.
 Porphyre. 5, 93.
 Poterie (A. de la). 192.
 Poudre (M.). 192.
 Prag (A.). 390.
 Prestet (J.). 608.
 Ptolémée (Klaudios Ptolemaios). 5, 26, 27, 33, 43, 63, 75, 78—80, 86, 88, 90—96, 99—102, 112, 114, 117, 169, 178, **180**, 212.

¹⁾ Dans le T. XVIII (p. 682, ligne 1) il faut corriger Neile (W.) en Neile (P.).

Puteanus (Eric). **119**.

Putte (van de). Voyez Puteanus.

Pythagore. 21, 25, 27, 28, 30, 32, 50—52, 87, 90, 91, 115, 121, 155, 189.

Pythagoriciens (les). 79, 179.

Reinach (Th.). 96, 114.

Ricci (M. A.). 302.

Richer (Jean). 227.

Riemann (K. W. J. Hugo). 7, 137, 141, 145, 158.

Roberval (Gilles Personne de). 206, 407, 408, 619, 621.

Rome (A.). **126**.

Römer (Ole). 195, 216, 407, 434, **440**, 485.

Rook (L.). 215.

Royal Society. 391, 393.

Royal Society of Edinburgh. 6.

Salinas (Francesco). 18, 35, **45**, 46, 78, 109, 110, **111—111**, 115, 116, 118, 122, 142, 143, 149, 154—158, 162, 168.

Salmon (Thomas). 109, **136**, 137.

Sant' Angiolo (cardinal). 89.

Sarafa (A. A. de). 200, 202, 206.

Scaliger (Josephus Justus). 371, 372, 620.

Schlick (Arnolt). 45, 46, 157.

Scholes (Percy A.). 63.

Schooten (Fr. van). 8, 201, 202, 204, 208, 209, 212, 217, 219, 221, 228, 230, 233, 275, 283, 361, 363, 373, 389, 437, 484, 619.

Schott (G.). 433, 434.

Schuh (F.) **259**, 364, 369, 374.

Schütte (Fr.). 465.

Sémiramis. 1.

Senti (H.). 154.

Seth Ward. Voyez Ward.

Shore (John). **87**.

Sherwin (H.). 205.

Simplicius. 620.

Simpson (Christopher). 109, **130**.

Slufius (René de Slufe). 196, 218, **219**, 242, 243, 329, 334, 335, 340, 358—360, 370, 403, 534, 609.

Smith (D. E.). 6.

Smits van Waesberghe (J.). 75.

Snellius (Willebrord). 439.

Societas Iesu. 186.

Société historique néerlandaise des sciences médicales, exactes et naturelles. 504.

Socrate. 99.

Stevin (Simon). 17, 18, 27, 28, 32—35, 44, 64, 65, 141, 143, **144**, 169, 171, 217,

371—373, 620.

Stirling (James). 409.

Tacquet (André). 185, **186**, 187.

Tannery (Paul). **6**, 12, 18, 34, 177, 199, 206, 209, 211, 221, 619.

Tannery (M.^{me} Paul). 27, 34, 67.

Theo Alexandrinus. 9.

Théobald (évêque). 124.

Théocrite. **1**, 2, 88, 177, 178.

Theo Smyrnæus. 5, 10, 11, 177, 180, 377.

Thévenot (Melchisédec). 221.

Titelouze (J.). 27, 114, **120**.

Torricelli (Evangelista). 123, 554.

Tschirnhaus (E. W.). 222, 375, 483—487, 489, 492, 502—504, 597, 602.

Université de Cambridge. 391.

Université de Leiden. 381, 620.

Université de Louvain. 126.

Université d'Oxford. 380.

Universités du moyen-âge. 6.

Uylenbroek (P. J.). 485, 491, 493, 505.

Vas Nunes (A.). 49.

Vaumelle (Pierre de). 216.

Vegelin. Voyez Claerbergen.

Vereeniging voor Noord-Nederlands (ou: voor Nederlandsche) Muziekgeschiedenis. 44, 82.

Verheijen (Abraham). 35.

Viadana (Lodovico), ou L. Grossi da Viadana. 129, **618**.

Vicentino (N.). **144**, 157.

Vieta ou Viete (François). 217, 389, 480.

Virgile (Publius Virgilius Maro). 416.

Vitellio. 270, 330.

Vitruve (Marcus Vitruvius Pollio). 9.

Viviani (Vincenzio). 69, 298, 299, 606.

Vlaeq ou Vlack (Adriaen). 147, 204, 448, 456—460.

Volder (B. de). 597.

Vollgraff (J. A.). **594**.

Vossius (G. J.). 85.

Vossius (Ifaac). 85, 109, 131.

Voye (de la). 227.

Vries (H. de). 221.

Waard (C. de). **27**, 34, 67, 209, 211.

Wallis (John). 7, 13, 26, 63, 78—80, 88, 90—93, 95, 99, 100, 102, 202, 204, 205, 210,

212—217, 223, 258—261, 370, 372—374, 376, 379, 381, 389—394, 408,

448, 449, 454, 475, 488, 513, 553, 554.

Ward (Seth). 215.

Weissenborn (H.). 483.

Werckmeister (Andreas). 18, 88, 100, 109, 110, **133**, 134, 135.

Westphal (R.). 78, 114.

Whewell (W.). 191, 372, 509.

Willem III, stadhouder, roi d'Angleterre. 554.

Witt (Johan de). 210, 216, **217**, 220, 221, 233, 249.

Worp (J. A.). 33.

Wotton (W.). 489, 553, 554.

Wren (Christopher). 216.

Zacharias (M.) 192.

Zarlino (Gioseffo). 18, 35, **45—46**, 47, 54, 65, 70, 78, 101, 109—111, 113, **114—118**, 121,

129, 154, 155, 158, 160, 162, 168, 171, 294.

Zeuthen (H. G.). 6, 199, 206.

III. OUVRAGES CITÉS.

Les chiffres gras désignent les pages où l'on trouve une description de l'ouvrage.

Les chiffres ordinaires donnent les pages où il est question de l'ouvrage, ou qui contiennent, dans le cas de Huygens la reproduction de l'ouvrage¹⁾.

Ch. Adam, Voyez *des Cartes*.

Alhazen, *Opticæ Thesaurus*, trad. et éd. *F. Risner*, 1572. 270, 330.

Alypius, *Introductio musica*, **93**, 100.

„ Voyez *Musici scriptores græci*, éd. *C. Janus*.

A. H. Ambros, *Die Entwicklung des geregelten mehrstimmigen Gefanges*, 1864. **63**.

„ *Gefehichte der Musik*, 1864. **63**, 66.

„ *Zur Lehre vom Quintenverbot*. 129.

Apollonios, *Conica*, 217, 289, 298 et 299 (édition projetée de *G. A. Borelli* et *A. Ecchellenfis*), 332, 335, 341, 342, 359, 360, 364, 365, 530, 531. (éd. *J. L. Heiberg*, 1891: **289** 332, 364, 365, 530, 531).

„ Voyez *Borelli* et *Viviani*.

Aratos, *Φαινόμενα καὶ Διαστημεία*, éd. *J. Fell*, 1672. 89.

R. C. Archibald, *Mathematicians and Music*, 1923/1924. 7, 177.

Archimède, *De conoidibus et sphaeroidibus*, 186, 187.

„ *De sphaera et cylindro*. 509.

„ *La Méthode* (Πρὸς Ἐρατοσθένην ἔργοις). 178, 554.

„ *Manuscrit de la Méthode*. 554.

„ *Opera omnia*, éd. *J. L. Heiberg*, 1910-1913. 187.

„ *Quadratura parabolæ*. 554.

Aristides Quintilianus, *De Musica* lib. III, éd. *M. Meibomius*. **90**, 93, 95.

„ „ *Oeuvres de musique* (manuscrit). 89.

Aristote, *Catégories*. 620.

„ *De Coelo*. 178.

„ *Meteorologica*. 181.

„ *Phyica*. 181, 192.

„ *Politica*. 78.

¹⁾ Dans le T. XIX nous avons omis par mégarde dans la liste III:

G. G. Leibniz, *Discours de métaphysique*, 1686. 165.

Vincent de Beauvais, *Speculum naturale*. 388.

Aristote, *Problemata*, 87.

„ Voyez *Musici scriptores græci*, éd. C. Janus.

„ Voyez *Simplicius*.

Aristoxène, *Harmonicorum elementa*, éd. M. Meibomius, 1652. 91, 94, 96, 131.

G. M. *Artusi*, *L'arte del contrapunto*, ridotta in tavola, 1586—1589 et 1598. 74.

„ *L'Artusi*, ovvero delle imperfettioni della moderna musica, 1600—1603. 74.

Afklepios, *Commentaire sur l'Arithmétique de Nicomaque*. 5.

Athenæus, *Dipnosophistarum libri*, éd. G. Kaibel, 1887. 131, 132.

A. Aubry, *Sur l'origine de la versiera* (note dans les *Oeuvres de Fermat*). 620.

St. *Augustin*, *De Musica*, 1569. 121.

„ *Opera omnia*, T. I, 1877. 121.

Auteurs néerlandais (16^e, 17^e et 18^e siècles) sur les sciences mathématiques etc. 458.

Fr. H. *Aynscom*, *Expositio et deductio geometrica*, 1656. 9.

Bacchius Senex, *Voyez Musici scriptores græci*, éd. C. Janus.

D. J. *Balfourt*, *Het muziekleven in Nederland in de 17de en 18de eeuw*, 1938. 61.

„ *Quirinus Gideon van Blankenburg*, 1938. 69.

Joan Albert *Ban*, *Zangh-bericht*, 1642. 82.

„ *Zangh-bloemfel*, 1642. 82.

I. *Barrow*, *Lectiones geometricæ*, 1669. 373, 488, 509.

„ *Lectiones mathematicæ*, 1664. 192, 372, 373.

„ *The mathematical works*, éd. W. H. *Hewell*, 1860. 192, 372, 509.

Baryphonus (H. *Pipegrop*), *Ifagoge musica*, 1609. 134.

Fl. de *Beaune*, *In geometriam Renati Descartes notæ breves*, 1659. 275.

Beda *Venerabilis*, *Historia ecclesiastica gentis Anglorum*. 78.

„ *Oeuvres*. 78.

I. *Beeckman*, *Lettre à Merfenne*, 1629. 31.

Jacques *Bernoulli*, *Demonstratio rationum, quas habent series numerorum etc.* 1686. 390.

„ *Narratio controversiæ inter Dn. Hugenum & Abbatem Catelanum agitata de centro oscillationis*, 1686. 390.

„ *Solutio problematis Fraternalis*, 1693. 610.

„ *Constructio curvæ accessus et recessus æquabilis etc.* 1694. 621.

Jean *Bernoulli*, *Solutio problematis funicularii*, 1691. 603.

„ *Solutio problematis Cartesio propositi Dn. de Beaune* ¹⁾ [et nouveau problème proposé par l'auteur], 1693. 489, 609—611.

E. *Bethe*, *Voyez Pollux*.

B. *Beynum-von Effen*, *Bouw en Geschiedenis van het klavier*, 1932. 160.

¹⁾ Voyez sur le problème de Fl. de Beaune les premières lignes de la p. 449 du T. X. Il en est question (Table IV qui suit) à la p. 15 du Manuscrit I.

- D. Bierens de Haan*, Bibliographie néerlandaise historique-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs font nés aux 16^e, 17^e et 18^e siècles sur les sciences mathématiques et physiques avec leurs applications, 1881—1883. 158.
- „ Voyez *Stevin*.
- Q. G. van Blankenburg*, Clavecimbel en orgelboek der gereformeerde psalmen en kerkzangen, 1732. 69, 129.
- „ Elementa musica etc., 1739. 69.
- A. M. T. S. Boethius*, De institutione musica. 87.
- G. A. Borelli*, Edition de 1661 des Conica d'Apollonios. 298, 299. Voyez aussi *Apollonios*.
- H. Bosmans*, Sur l'œuvre mathématique de Blaise Pascal, 1924. 390.
- A. Boffe*. Voyez *Desfargues*.
- I. Boulliau*, Astronomia philolaica, 1645. 179.
- „ Voyez *Ptolémée*.
- „ Voyez *Theo Smyrneus*.
- H. Briggs*, Arithmetica logarithmica, 1624. 202. Voyez aussi *Vlacq.*
- „ Trigonometria britannica. (*Gellibrand* et *Briggs*), 1633. 448. Voyez aussi *Gellibrand*, même ouvrage.
- H. Brocard*, La quadrature de la verliera (note dans les Oeuvres de *Fermat*). 620.
- H. Brown*, L'Académie de physique de Caen (1666—1675) d'après les lettres d'*André de Graindorge*, 1938. 227.
- H. L. Brugmans*, Le séjour de Chr. Huygens à Paris etc. 1935 (voyez aussi *Chr. Huygens*). 43, 222.
- P. Brunet* et *A. Mieli*, Histoire des sciences; antiquité, 1935. 178.
- M. Bryennius*, Harmonika (manuscrit). 26, 89.
- „ „ éd. *J. Wallis*, 1699. 26.
- Bucolicæ græci*, éd. *H. L. Ahrens*, 1909. 1, 2.
- Ch. Buttler*, The principles of musick, in singing and setting; with the twofold use thereof, ecclesiastical and civil, 1636. 119.
- M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III, 1901. 409.
- R. des Cartes*, Geometria, éd. *F. v. Schooten*, 1659 et 1683. 217, 228, 230, 275, 284, 361, 363, 389, 437, 463, 484.
- „ La Géométrie, 1637. 216, 284, 337, 343, 448, 463.
- „ Lettre à Conft. Huygens, 1635. 34.
- „ Lettres à M. Merenne, 1630, 1634 et 1638. 18, 34, 67, 209.
- „ Lettres, éd. *Cl. Clerfeliér*, T. III, 1667. 211.
- „ Oeuvres, éd. *Ch. Adam* et *P. Tannery*, 1897—1913. 18, 34, 67, 209.
- „ Principia Philosophiæ, 1644. 17.
- „ Voyez *van Schooten*.
- de Catelan*, Logistique pour la science générale des lignes courbes, 1691. 608.
- B. Cavalieri*, Directorium generale uranometricum, 1632. 202.
- „ Geometria indivisibilia, 1635. 554.
- L. van Ceulen*, De arithmetische en geometrische fundamenten, 1615. 188.

- L. van Ceulen*, De circulo & adscriptis liber, trad. et éd. par *H. Snellius*, 1619. **439**.
- Cicéron (M. Tullius Cicero)*, De oratore. 125.
- Chr. Clavius*. Voyez *Euclide*.
- Cl. Clerfeliier*. Voyez *des Cartes*.
- J. Combarieu*, Histoire de la musique des origines au début du XX^e siècle, 1920. **178**.
- J. Combarieu*, La musique et les philosophes antiques, 1920. **178**.
- J. Craig*, Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi, 1685. 553.
- „ Tractatus mathematicus de figurarum curvilinearum quadraturis et locis geometricis, 1693. 553.
- „ Voyez *H. Otton*.
- A. et M. Croiset*, Histoire de la littérature grecque, 1914. **80**.
- J. B. Cyfatus*, De loco, motu, magnitudine et causis cometæ, qui sub finem anni 1618 et initium anni 1619 in cælo fulsit, 1619. **81**.
- Daniel*. Voyez *Livre de Daniel*.
- G. Defargues*, Broüillon project d'exemple d'une maniere universelle touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'architecture, etc. 1640. 191.
- „ Broüillon project d'une atteinte aux evenemens du rencontre du cone avec le plan (copie de 1679 par *Ph. de la Hire*; l'édition originale était de 1639). 192, 221. Voyez aussi *M. Zacharias*, édition allemande de 1922.
- „ Manière universelle de Defargues pour pratiquer la perspective etc. par *M. Boffé*, 1648. 220.
- „ Oeuvres, réunies et analysées par *M. Poudra*, 1864, 192.
- R. Descartes*. Voyez *des Cartes*.
- H. Diels*, Fragmente der Vorfokratiker, 1922. 99.
- Diophante*, Algèbre, éd. française de *S. Stevin*. **371**.
- J. M. C. Duhamel*, Mémoire sur la méthode des maxima et des minima de Fermat (et observations de Brocard sur ce mémoire). **211**.
- N. Fatio de Duillier*, Publications de 1687 et 1689 dans la „Bibliothèque universelle et historique”. 484; dont la première est intitulée: Reflexions sur une methode de trouver les tangentes de certaines lignes courbes, laquelle vient d'être publiée dans un livre intitulé Medicina Mentis [voyez *Tschirnhaus*]. 485.
- H. Dupont*, Geschichte der musikalischen Temperatur, 1935. 154, **157**, 158, 160.
- I. Düring*, Ptolemaios und Porphyrios über die Musik, 1934. 93.
- „ Voyez *Ptolémée*.
- E. J. Dijksterhuis*, De elementen van Euclides I et II (T. I et III de la „Historische bibliotheek voor de exacte wetenschappen”), 1929—1930 ¹⁾. **11**, 187. Voyez aussi *Euclide*.
- „ De versiera, 1932. **621**.

¹⁾ Le dernier Appendice du livre, où l'auteur cite e. a. Ch. M. van Deventer qui s'intéressait à la musicologie, traite brièvement du *λόγος*, du *διάστημα* etc.

A. Echellenfis. Voyez *Apollonios*.

Alfred Einfelein. Voyez *Riemann*.

R. Eitner. Voyez *Schlick*.

J. van der Elst, Notæ augustinianæ five musices figuræ etc., 1657. 128.

„ Den ouden ende nieuwen grondt vande musijcke, 1662, **128**, 129.

G. Enefström. Voyez *Bibliotheca mathematica*.

Eratoſthène, Carminum reliquiæ, éd. *E. Hiller*, 1872. **178**.

„ Fragmenta, éd. *J. Fell*, 1672. 89.

Euclide, Écrits optiques. 177.

„ Eléments. 5, 8, 185, 192, 434; 8 et 9 éd. *Chr. Clavius* (1589, 1607); **11** et 187 éd. *E. J. Dijkſterhuis* (voyez aussi *Dijkſterhuis*); 185, **186**, 187 éd. *J. Tacquet* (voyez aussi *Tacquet*).

Euclide, Introductio harmonica, éd. *M. Meibomius*, 1652. 94, 97, 98, 131, 177; éd. *H. Menge* 131.

„ Liber de canonis sectione, 9, 12, 177.

„ Phenomena, ex traditione. *Fr. Maurolyci*. 199.

„ Quæ superſunt omnia, éd. *D. Gregory*, 1703. 177.

„ Scripta musica, éd. *H. Menge*. 94, 97, 98.

„ Voyez *Musici ſcriptores græci*, éd. *C. Janus*.

L. Euler, Oeuvres. 145, 200.

I. Faber Stapulenſis. De musica, 1552. 617.

„ „ Ouvrages ſur la muſique. 28.

J. Fell. Voyez *Aratos*, *Eratoſthène* et *Méſomède*.

P. Fermat, Manuſcrits. 204, 209, 335.

„ Oeuvres, éd. *P. Tannery*, *Ch. Henry* et *C. de H'ard*, 1891—1922. 209, **211**, 620.

„ Varia opera, 1679. 209, 211.

„ Voyez *Aubry* et *Brocard*.

F. J. Fétis, Biographie univerſelle des muſiciens, 2^{ème} édition, 1864. 7, 145.

P. Frenicle de Beſſy, Abregé des combinaifons, 1893 et 1729. **110**.

„ „ Traité des triangles rectangles en nombre, 1676—1677 et 1729. **119**.

P. Friedländer, Die Melodie zu Pindars erſtem Pythiſchen Gedicht. **126**.

Galileo Galilei, Dialogo intorno ai due maſſimi ſiſtemi del mondo, Tolemaico e Copernicano, 1632. 179.

„ „ Manuſcrit. 178.

Vincenzio Galilei, Dialogo della muſica antica et della moderna, 1581, 1602 et 1934. 89, 96, **121**.

„ „ Diſcorſo intorno all' opere di meſſer Gioſeffo Zarline etc. 1589. **65**.

„ „ Manuſcrits. **65**.

J. Gallé, Nouveau epitome d'arithmetique, 1616. 173.

„ Nouvelle invention d'apprendre l'arithmétique par le moyen de dix petits batons etc. 1635. 173.

Gaudentius, Harmonica introductio. **93**, 95, 99.

„ Voyez *Musici ſcriptores græci*, éd. *C. Janus*.

- H. Gellibrand*, *Trigonometria britannica* (*Gellibrand* et *Briggs*), 1633. 199. Voyez aussi *Briggs*, même ouvrage.
- G. Genebrard*, *Ouvrages*. 119.
- C. I. Gerhardt*, Voyez *Leibniz*.
- Fr. A. Gevaert*, *Histoire et théorie de la musique de l'antiquité*, 1875. 86.
- O. Gibel*, *Introductio musicæ didacticæ*, 1640. 133.
- „ *Proportiones mathematico-musicæ*, 1666. 133.
- W. Gilbert*, *Tractatus sive physiologia nova de magnete etc.* 1600. 81.
- J. Girard*, *Invention nouvelle en l'algebre*, 1629. 363.
- „ Voyez *Stevin*.
- H. L. Glareanus*, *Dodekachordon*, 1547. 70.
- A. de Graindorge*, Voyez *Brown*.
- N. L. H. A. Gravelaar*, *John Napier's werken*, 1899. 6.
- Grégoire de St. Vincent*, *Opus geometricum*, 1647. 9, 200, 201, 205, 206, 213, 214, 264.
- D. Gregory ou Gregorius*, Voyez *Euclide*.
- J. Gregory ou Gregorius*, *De verâ circuli et hyperbolæ quadraturâ*, 1667. 259, 303, 311, 312, 323, 325, 388.
- „ „ *Exercitationes geometricæ*, 1668. 604.
- „ „ *Geometriæ pars universalis*, 1668. 620.
- „ „ *Lettre à Collins*, 1670/1671. 375, 620.
- „ „ *Polémique avec Huygens au sujet de la „vera circuli etc. quadratura“*, 1668 et 1669. 259, 307, 308, 313.
- L. Guicciardini*, *Descrittione di tutti i paesi bassi, altrimenti detti Germania Inferiore, etc.* 1567, 1581 et 1588. 21, 82.
- Guido Aretinus*, *Introductorium, ou: Micrologus de disciplina artis musicæ*, 11^{ième} siècle. 124.
- E. Halley*, Voyez *Hutton*.
- J. L. Heiberg*, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*, 1882. 177.
- „ Voyez *Apollonios* et *Archimède*.
- H. v. Helmholtz*, *Die Lehre von den Tonempfindungen*, 1870. 36.
- P. (?) Hemony*, *Vanden Beyart, copie (d'après un manuscrit?)*. 18, 21, 48.
- Ch. Henry*, Voyez *Fermat*.
- P. Hérigone*, *Cours mathématique*, 1634—1644. 7, 199, 202—204, 208, 209, 616, 619.
- G. Hiller*, Voyez *Eratoſthène*.
- Ph. de la Hire*, *La construction des équations analytiques*, 1679. 335.
- „ *Nouveaux éléments des sections coniques; les lieux géométriques; la construction ou effection des équations*, 1679. 217, 220, 221, 335.
- „ *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques etc.*, 1673. 221.
- „ Voyez *Desargues*.
- Th. Hobbes*, *De corpore*, 1655. 381.
- „ *De principiis et ratiocinatione geometrarum etc.* 1666. 381.

- Th. Hobbes*, *Examinatio et emendatio mathematicæ hodiernæ etc. (dialogi fex)*, 1660. 13, 381.
 „ *Opera philosophica etc.* 1668, 381.
 „ *Problemata physica una cum magnitudine circuli*, 1662. 381.
 „ *Quadratura circuli, cubatio sphaeræ, duplicatio cubi*, 1669. 381.
Horace (Q. Horatius Flaccus), *Carmina*. 132.
 „ *Epistolæ*. 219.
J. Horrocks, *De rationum et fractionum reductione*, 1678. 393.
 „ *Opera posthuma*, 1673 et 1678. 393.
S. Horstley. Voyez *Newton*.
J. Hudde, *Epistola secunda de maximis et minimis*, 1659. 437.
Ch. Hutton, *Introduction historique à Sherwin's „Mathematical tables”, ainsi qu'à la collection des „Scriptores logarithmici” publ. par Fr. Masères, 1785 et 1791. 205. Voyez Masères et Sherwin.*
Chr. Huygens, *Anecdota*, 195.
 „ *Astroscopia compendiaria*, 1684. 88.
 „ *Chartæ astronomicæ*. 203.
 „ *Chartæ mathematicæ*. 8, 207, 229, 243, 265, 328, 330, 364, 388, 418, 425, 433.
 „ *Constructio universalis problematis a Jo. Bernoulio propofiti*, 1694, 481, 552.
 „ *Cosmotheoros*. 110, 178.
 „ *Critique de Hobbes*. 13.
 „ *De circuli magnitudine inventa*, 1654. 259, 310, 311, 313, 316—318, 325, 369, 370, 374, 382, 385, 386, 388, 391—393.
 „ *De combinationum mirandis*. 408, 413—416.
 „ *De coronis et parheliis*. 203, 616 (note).
 „ *De motu corporum ex percussione*. 291, 372.
 „ *De motu naturaliter accelerato*. 204.
 „ *De problemate Bernouliano anni 1693. 1693. 481, 552, 610, 611 (voyez aussi Constructio universalis etc.)*.
 „ *Descriptio automati planetarii*. 394.
 „ *Deux démonstrations du théorème concernant les quatre points d'intersection de deux coniques à axes parallèles (éd. F. Schuh, 1921)*. 364.
 „ *Discours de la cause de la pesanteur*, 1690. 178, 447, 448, 557, 619.
 „ *Divisio Monochordi*. 18, 21, 29, 49—58.
 „ *Excerpta ex epistola C. H. Z. ad G. G. L.*, 1694. 552, 622.
 „ *Ἐξέτασις*, 1651. 202.
 „ *Experimenta circa electrum*. 618.
 „ *Fundamentum regulæ ad inveniendos logarithmos*. 205.
 „ *Horologium oscillatorium*, 1673. 185, 187, 206, 216, 285, 448, 479, 503.
 „ *Journal de voyage à Paris et à Londres (éd. H. L. Brugmans, 1935)*. 43, 49, 154, 191, 209, 212, 221, 222.
 „ *Lettre à H. Bafnage de Beauval*, 1692. 481, 550, 551, 606, 609.

Chr. Huygens, Manuscrits A—K. 195.

- „ Manuscrit A. 203, 298, 299, 616 (note), 619.
- „ Manuscrit B. 13, 205, 225, 413, 534.
- „ Manuscrit C. 210, 225—227, 229, 231, 233, 256—257, 303, 417.
- „ Manuscrit D. 218, 261, 263, 265, 267, 275, 287, 300, 308, 310, 316, 317, 323—325, 330, 369, 382, 385, 388, 413, 417, 418, 421, 422, 425, 426, 428.
- „ Manuscrit E. 104, 109, 121, 207, 219, 286, 287, 361, 363, 423, 431—433, 437, 440—442, 456.
- „ Manuscrit F. 179, 334, 335, 341, 359, 389, 393, 394, 455, 456, 458, 459, 464, 480, 491—493, 495—497, 500, 551, 597—598.
- „ Manuscrit G. 109, 112, 128, 129, 190, 375, 376, 395—397, 398, 463, 467, 471, 472, 475, 480, 487, 499, 502—508, 511, 513, 514, 516—518, 520—522, 525—527, 529, 532, 534, 537—540, 551, 598—604, 605, 609, 618.
- „ Manuscrit H. 221, 471, 472, 474, 480, 509, 542, 544, 547, 549, 551, 604, 608.
- „ Manuscrit I. 479, 480, 551—553, 582 (note), 604, 608—611.
- „ Manuscrit K. 616 (note), 619.
- „ Manuscrit 11. 269, 287, 330, 334, 336, 341, 359.
- „ Manuscrit 12. 208.
- „ Manuscrit 13. 44, 55—58.
- „ Manuscrit 14. 177, 291, 294.
- „ Nouveau Cycle Harmonique. 7, 18, 19, 22, 28, 36, 110, 112, 113, 129, 139—173, 557.
- „ Opera varia, 1724. 141, 164, 230, 241, 243, 270, 275.
- „ Opuscula postuma. 1703. 394.
- „ Physica Varia. 109, 130, 186, 188.
- „ Pièces sur le chant antique et moderne. 21, 68—82.
- „ Polémique avec J. Gregory au sujet de la „vera circuli etc. quadratura”, 1668. 213, 223, 259, 303—327, 369, 374, 386, 449.
- „ Portefeuille Musica. 1, 17, 18, 19, 30, 44, 47, 48, 50, 58, 59, 63, 68—70, 73, 76, 78, 80, 88—90, 100, 102, 105, 111, 112, 114, 118, 120, 123, 129, 133, 147, 149, 151, 153—155, 164, 165, 168, 169, 205, 295, 558, 559.
- „ Solution du problème proposé par Leibniz en 1687 sur la courbe de descente uniforme, 1687. 481, 505, 600, 601.
- „ Solutio ejusdem problematis, c.à.d. du problème de la chaînette, 1691. 481, 551, 603.
- „ Testament. 195, 196.
- „ Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro, 1651. 215, 324, 554.
- „ Théorie de la consonance. 21, 30—39, 114.
- „ Traité de la lumière, 1690. 222, 448, 479, 503, 504, 557, 619.
- „ Van rekeningh in spelen van geluck, 1657. 408, 411, 442, 444, 451, 462.
- „ Varia. 195, 196.

Chr. Huygens, Voyez *Jacques Bernoulli*.

„ Voyez *H. L. Brugmans*.

„ Voyez *D. J. Korteweg*.

„ Voyez *J. P. N. Land*.

„ Voyez *H. Oldenburg*.

„ Voyez *F. Schuk*.

„ Voyez *P. J. Cuylenbroek*.

„ Voyez *J. A. Tollgraaf*.

Const. Huygens, Compositions musicales, 66.

„ Correspondance et œuvre musicales, éd. *H. J. A. Jonckbloet* et *J. P. N. Land*, 1882. 82.

„ Ghebruik, en Onghebruik van 't orgel in de kerken der Vereenighde Nederlanden, 1660. 64.

„ Lettres, éd. *J. A. Horp*, T. III, 1891. 33.

„ Pathodia sacra et profana occupati, 1647 et 1882. 617.

C. von Jan ou *Janus*, Voyez *Mulici scriptores græci*.

St. Jean, Voyez *Apocalypse de St. Jean*.

J. Jeans, Science and music, 1938. 141.

H. J. A. Jonckbloet, Voyez *Const. Huygens*.

M. C. Jordan, Cours d'analyse, 1893. 372.

J. Kepler, Chilias logarithmorum, 1624. 294.

A. Kircher, Musurgia universalis, 1650. 110, 123, 124—127.

D. J. Korteweg, La solution de Christiaan Huygens du problème de la chaînette, 1900—1901. 551.

A. de Lalouvière ou *Lalovera*, Quadratura circuli, 1651. 620.

J. P. N. Land, Het toontstelsel van Chr. Huygens, 1891. 44, 58, 82, 144, 145, 149.

„ Joan Albert Ban en de theorie der toonkunst. 82.

„ Voyez *Const. Huygens*.

H. Lange, Epistola ad Meibomium, 1656. 9.

J. Lefèvre d'Étaples, Voyez *Faber Stapulensis*.

G. H. Leibniz, Der Briefwechsel mit Mathematikern, éd. *C. J. Gerhardt*, 1899. 331, 393.

„ De vera proportionem circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus, 1682. 388.

„ Differtatio de arte combinatoria, 1666 et 1690. 400.

„ Lettres à Oldenburg, 1674. 388. 621.

„ Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, 1686. 454.

„ Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus etc. 1684. 185.

„ Problème proposé en 1687 sur la courbe de descente uniforme. 486, 489, 497, 600.

„ Quadratura arithmetica (manuscrit de 1675). 375, 388.

„ Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum quæ centrum habent etc. 1691. 375.

- C. Lepage*, Notes pour servir à l'histoire des mathématiques dans l'ancien pays de Liège. **173**.
 „ Voyez *Slusius*.
G. Loria, Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logarithmica, 1900. 554.
 „ Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte, éd. allemande de *Fr. Schütte*, 1902. **165**.
E. Loulié, Eléments ou principes de musique, 1696 et 1698, **69**.
P. Maillart, Les tons, ou discours sur les modes de musique, et les tons de l'église. **118**, **119**.
Fr. Mascheroni, Scriptorum logarithmici, 1791—1807. **205**, 261, 302.
Fr. Maurolycus, Voyez *Euclide*.
M. Meibomius, Antiquæ musicæ auctores septem, 1652. 8, 86, 87, **90**, 91, 93—100, 155.
 „ De fabrica triremium, 1671. 9.
 „ De proportionibus dialogus, 1655. 5, 7, **8**, 9, 13.
 „ Observationes ad loca quædam librorum decem M. Vitruvii de Architectura. 9.
 „ Responsio ad Langii epistolam, 1657. 9.
H. Menge, Voyez *Euclide*.
N. Mercator, Logarithmotechnia, 1667, 1668, 1674 et 1791. 11, 201, 214, **261**, 296, 302.
 „ Some illustrations of the Logarithmotechnia, 1668. **261**.
M. Merfenne, Ballistica, 1644. 173.
 „ Cogitata physico-mathematica, 1644. 199, 214.
 „ Correspondance, éd. *M.^{me} P. Tannery* et *C. de Haard*, II, 1933. 27, 34, 67.
 „ De la vérité des sciences, 1625. 66, 67, 86, 409, 410.
 „ Harmonicorum libri, 1635. 409, 410.
 „ Harmonie universelle, 1636. 26, 28, 29, 33, 37, 65, 68, 87, 120, 122, 124, 126, 142, 144, 163, 171, 199, 409, 410.
 „ Nouvelles observations physiques et mathématiques, 1636. 34.
 „ Novarum observationum phys. math. T. III, 1647. 201.
 „ Questions harmoniques, 1633. **115**, 121, 179.
 „ Questions inouyes ou recreation des sçavans, 1633. 179.
 „ Questions théologiques, physiques, morales et mathématiques, 1634. 28, 33.
 „ Traité de l'harmonie universelle, 1627. 28.
 „ Traité des consonances, des dissonances, des genres, des modes et de la composition, 1636. 26, 33, 34, 37, 69, 70, 120, 126, 141, 142, 149, 162, 169.
 „ Traité des instruments, 1636. 29, 34, 35, 37, 121, 122, 142.
 „ Traitez de la nature des sons et des mouvements etc. 1636. 26, 87, 124.
 „ Traitez de la voix et des chants, 1636. 410.
 „ Universæ geometriæ mixtæque mathematicæ synopsis, 1644. 199.
Mésomède, Hymnes à Calliopé, à Phébus, et à Némésis. **89**.
A. Mieli, Voyez *Brunet*.
J. de Muris, Musica practica, 1321. 124.
 „ Musica speculativa, 1323. 124.
 „ Quæstiones super partes musicæ. 129.

- Musici scriptores græci *Aristoteles, Euclides, Nicomachus, Bacchius, Gaudentius, Alypius* avec Supplementum (Melodiarum reliquiæ), éd. C. Janus, 1895—1899. **89**.
- J. G. *Neidhardt*, Sectio canonis harmonici, 1724. 145.
- J. *Neper* (ou *Napier*) Mirifici logarithmorum canonis descriptio, 1614. 6, 447, 459.
- „ Voyez *Gravelaar*.
- „ Voyez *Napier Tercentenary Memorial Volume*.
- I. *Newton*, Lettres à Oldenburg, 1676. 374, 376, 391, 393.
- „ Philosophiæ naturalis principia mathematica, 1687. 448, 485, 486.
- „ Opera quæ exstant omnia, éd. S. *Horsley*, 1779. 376, 391, 392.
- Nicomache* (*Nicomachus Gerasenus*), Arithmétique. 5.
- „ Harmonices manuale. **91**, 99.
- „ Voyez Musici scriptores græci, éd. C. Janus.
- II. *Oldenburg*, Excerpta ex epistolis nonnullis, ultrò citòque ab illustrissimis viris, Slufio & Hugenio, ad editorem scriptis, 1673. **218**.
- C. le *Paige*. Voyez *Lepaige*.
- Bl. *Pascal*, Lettre de A. Dettonville à Monsieur Huguens de Zulichem, en luy envoyant la dimension des lignes de toutes sortes de roulettes etc., 1659. 453.
- „ Voyez *Bosmans*. Il s'agit du Traité du triangle arithmétique de 1665.
- Ch. et P. *Perrault*, Oeuvres diverses de physique et de mécanique I, 1721. **129**.
- Cl. *Perrault*, De la musique des anciens, 1680. 130, **131**, 132, 133.
- „ Essais de physique, 1680—1688. 130.
- „ Le parallèle des anciens et des modernes, 1688—1697. 85.
- Pindare*, Carmina, éd. W. *Christ*, 1896. 132.
- „ Lettre à Hiéron. 131, 132.
- „ Ode (dite de P., fragment). 85, **89**, 110, **126**.
- „ Voyez *Friedländer*.
- II. *Pipegrop*. Voyez *Baryphonus*.
- Platon*, Voyez *Theo Smyrnaeus*.
- Plaute* (*T. Maccus Plautus*), Comoediæ (e. a. Mercator et Trinummus), éd. G. *Goetz*, 1906—1907. **81**.
- Pline* (*C. Plinius Secundus*), Historia naturalis, éd. J. *Harduinus*, 1783. 132.
- Plutarque*. De musica. 80, 179.
- J. *Pollux*. Pollucis Onomasticum, éd. E. *Bethe*, 1900. 96.
- Porphyre* ou *Porphyrios*, Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios, éd. J. *Düring* (grec et allemand), 1932. **5**.
- A. *Prag*, John Wallis (1616—1703), 1931. **390**.
- Protémée* (*Kl. Ptolemaios*), Harmonika. 27, 180; éd. A. *Gogavinus* (1562): 96; éd. J. *Wallis* (1682): 63, 78, 79, **80**, 88, 90—93, 95, 96, 99, **100**, 102, 212;
- „ éd. J. *Düring* (1930): 79, 90—93, 95, 99, 100.
- „ Manuscrits. 180.

- S. Stevin*, Libri geographiæ, 1608. 33, 371.
 „ Livres de géographie, éd. *J. Girard*, 1634. **61**.
 „ Oeuvres mathématiques augmentées par *J. Girard*, 1634. 33, 64, 371.
 „ Vande molens, manuscrit et éd. *D. Bierens de Haan*, 1884. 32.
 „ Vande spiegeling der finkonst, manuscrit. 27, 28, 32, 33, **31**, 35.
 „ Vande spiegeling der finkonst, éd. *D. Bierens de Haan*, 1884. **32**, 65, 171.
 „ Wiskonstige Ghedachtenissen, 1608. 33. Voyez aussi Hypomnemata mathematica.
 „ Voyez *Diophante*.
A. Tacquet, Elementa geometriæ planæ ac solidæ quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata, 1654 et 1665. 185, **186**, 187.
P. Tannery, Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure, 1902 et 1915. **6**.
 „ Lettre à H. Bofmans, 1902. **206**.
 „ Lettre à M. Cantor, 1891. **221**.
 „ Mémoires scientifiques, éd. *J. L. Heiberg* et *H. G. Zeuthen*, 1915—1934. **6**, 12, 199, 206, 221.
 „ Voyez *des Cartes* et *Fermat*.
M.^{me} P. Tannery. Voyez *Merfenne*.
Théocrite, Idylles. Voyez *Bucolicæ græci*.
Theo Smyrneus, Τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρῆσιν εἰς τὴν τοῦ Πλάτωνος διέγερσιν, éd. *I. Boulliau*, 1644. 5, 11, 177, 180, 377.
 „ Manuscrits. **180**.
J. Titelouze, Lettre à Merfenne, 1662. 27.
E. Torricelli, Opera mathematica. 1644. 554.
 „ Voyez *Loria*.
E. W. Tschirnhaus, Medicina mentis, 1687. 485, 502.
 „ Voyez *F. de Duëllier*, *de Volder* et *Vollgraff*.
P. J. Uylensbroek, Chr. Hugonii aliorumque seculi XVII virorum celeberrimarum exercitationes mathematicæ et philosophicæ, 1833. 485, **491**, 493, 505.
A. Vaz Nunes, Experimenteel onderzoek van klokken van F. Hemony, 1909. **49**.
A. Verheyen, Lettre à S. Stevin. **35**.
L. (da) Viadana, Opera omnia sacrorum concentuum etc. cum basso continuo et generali organo applicato etc., 1620. 618.
N. Vicentino, L'antica musica ridotta alla moderna prattica, 1555. 144, 157.
F. Vieta, Opera mathematica, éd. *F. van Schooten*, 1646. 217.
Virgile (*P. Virgilius Maro*), Aeneis. 416.
Vitellio, Opticæ libri X, éd. *F. Risner*, 1572. 270, 330.
Vitruve (*M. Vitruvius Pollio*), De Architectura. 9.
V. Viviani, De maximis et minimis geometrica divinitio in quintum Conicorum Apollonii Pergæi adhuc desideratum, 1659. **294**, 299.

- A. Vlacq*, Arithmetica logarithmica (*Briggs*), ed. fec. aucta per *Adr. Vlacq*, 1628. 147. Voyez aussi *Briggs*.
- „ Petites tables, éditions diverses, 1661, 1665, 1681 etc. 204, 448, **450—458**, 459, 460.
- B. de Volder*, Démonstration sur les „curvæ filares” de *Tschirnhaus*, 1687. 597.
- J. A. Vollgraff*, Démonstration mécanique des théorèmes de *Tschirnhaus* considérés dans le T. XX des Oeuvres Complètes de *Chr. Huygens*, 1940. **504**.
- „ Deux pages consécutives du Manuscrit G. de *Chr. Huygens*, 1940. **504**.
- H. de Vries*, *Defargues*, 1934. 221.
- „ Historische studien, 1934. **221**.
- C. de Waard*, Biographie de *Fr. v. Schooten*. **209**.
- „ Voyez *Fermat* et *Merfenne*.
- J. Wallis*, Adversus *Meibomium* de proportionibus tractatus elencticus, 1657. 13, 214.
- „ Appendix [ad *Ptolemæi Harmonika*]. De veterum harmonia ad hodiernam comparata, 1682. 80, **100**, 102.
- „ Arithmetica infinitorum, 1655. 213, 223, 258, 372, 373, 389—391, 513, 554.
- „ Arithmetica universalis, 1655. 372. Voyez les Additions et Corrections.
- „ Articles sur la musique. 212.
- „ A treatise of algebra both historical and practical. 1685. 374, 376, 379, 389—394, 449, 454.
- „ *Hobbiani puncti dispunctio*, 1657. 258.
- „ Lettre à *Leibniz*, 1693.
- „ *Mathesis universalis*, 1657. 202, 258, 620.
- „ *Opera mathematica*. 389, 391.
- „ *Opera mathematica*, I, 1695. 217, 373.
- „ „ „ II, 1693. 391.
- „ „ „ III, 1699. 554.
- „ *Thomæ Hobbes quadratura circuli etc. confutata*, 1669. 381.
- „ *Tractatus algebrae auctus*, 1693. 389, 488.
- „ *Tractatus de sectionibus conicis*, 1655. 215, 217, 258.
- „ *Tractatus duo de cycloide, de cissoide etc.*, 1659. 212, 258.
- „ Voyez *Bryennius* et *Ptolémée*.
- H. Weissenborn*, Lebensbeschreibung von *Ehrenfr. Walther von Tschirnhaus* auf *Kiefflingswalda*, und Würdigung seiner Verdienste, **483**.
- A. Werckmeister*, Musicalische Temperatur, 1691. 18, 100, **133**, 134, 135.
- R. Westphal*, *Aristoxenus* von *Tarent*, *Melik* und *Rhythmik* des klassischen Hellenentums, 1883. 78, 114.
- W. Whewell*, Voyez *Barrow*.
- J. de Witt*, *Elementa curvarum*, 1659. 216, **217**, 220, 221.
- J. A. Worp*, Voyez *Confli. Huygens*.
- W. Wotton*, Reflections upon ancient and modern learning, contenant e.a. un Discours de *J. Craig* touchant l'arithmétique et géométrie, et un discours de *E. Halley* of ancient and modern astronomy and optics, 1694. 489, 553, 554.

M. Zacharias (voyez aussi *Defargues*), Erster Entwurf eines Versuchs über die Ergebnisse des Zusammentreffens einer Kugel mit einer Ebene, traduction allemande de 1922 d'un ouvrage de *Defargues*, **192**.

G. Zarlino, Dimostrazioni harmoniche, 1571, 1573 et 1589. **15**, **16**, 115—118, 168, 171.

„ Istituzioni harmoniche, 1558, 1562, 1573 et 1589. **15**, 46, 101, 114—118, 162, 171.

„ Supplementi musicali, 1588, 1589. 35, **65**, 71, 114—116.

„ Traité sur la patience. 45.

„ Tutte l'opere, 1589. **15**, 114, 116.

„ Voyez *Vincentio Galilei*.

Acta Eruditorum. 19, 480, 486, 603.

„ 1682. 388.

„ 1684. 485.

„ 1685. 492.

„ 1686. 390.

„ 1689. 397.

„ 1691. 375, 481, 551.

„ 1693. 481, 552.

„ 1694. 481, 552, 621.

Apocalypse de Saint-Jean. 125.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, 1914. **259**.

Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, 1934.

126.

Bibliotheca mathematica, publ. p. *G. Eneström*. **6**.

Bibliothèque universelle et historique, 1687. 484.

„ „ 1689. 484.

Bulletin de l'institut archéologique liégeois, 1889. 173.

Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, T. XIV—XVI, 1881—1883. 458.

Catalogue de la vente des livres de Chr. Huygens, 1695. 46, 87, 116, 127, 180, 204, 389, 393, 447, 458.

Catalogue de la vente des livres de Const. Huygens, 1687. 28, 46.

Christiaan Huygens, revue, 1921. 364.

Die Haghe, annuaire, 1938. **69**.

Divers ouvrages de mathématique et de physique par MM. de l'Académie Royale des Sciences, 1693. 207, 219, 229, 243, 270, 271, 273, 410.

Euclides, revue, 1932/1933. **621**.

Histoire de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à son renouvellement en 1699. 1733. 220.

Histoire des ouvrages des sçavans, périodique, 1691. 141, 147, 164, 488.

„ „ 1693. 481, 550, 551, 606.

- Historische bibliotheek voor de exacte wetenschappen, 1929 et suiv. 584.
 Intermédiaire des mathématiciens, 1900. 199.
 Janus, archives internationales pour l'histoire de la médecine etc. 1940. **501**.
 Journal des Sçavans, 1668, 259, 303, 308, 311.
 „ „ 1685. 492.
 Livre de Daniel, traduction latine. 131.
 Livre d'hymnes du dixième siècle du couvent S. Salvador à Meffine. 124.
 Manuscrits provenant de Const. Huygens. 33.
 Mathematical association of America. 7.
 Mémoires de mathématique et de physique tirez du registre de l'Académie royale des sciences, 1692. 333.
 Memoires de l'Academie Royale des Sciences, depuis 1666 jusqu'à 1699, 1729. 410, 419.
 Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, 1864. 211.
 Monatshefte für Musikgeschichte, 1869. 45.
 Napier Tercentenary Memorial Volume, publ. p. C. G. Knott. **6**.
 Nieuw Nederlandsch biographisch woordenboek, 1927. 209.
 Nouvelles de la république des lettres, 1687. 481, 487, 505, 598.
 Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, N° 179, 192.
 Patrologia latina, T. XXXII, 1877. **121**.
 Philosophical Transactions. 1668. 259, 261, 302.
 „ „ 1673. 218.
 Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, 1931. **390**.
 Registres de l'Académie Royale des Sciences, 196, 206—208, 214, 215, 219, 225, 227, 229, 230, 241, 243, 256—261, 282, 285, 286, 288, 335.
 Revue des questions scientifiques, 1924. **390**.
 The American mathematical Monthly XXXI, 1924. 7.
 Tijdschrift der Vereeniging voor Noord-Nederlands Muziekgeschiedenis, 1891. 44, 82.
 Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 1899. **6**.
 Verslagen en mededeelingen der Koninklijke Akademie, Afd. Natuurkunde, 1884. 32.

IV. PAGES DES MANUSCRITS F, G, H ET I SE RAPPORTANT A DES
SUJETS DE MATHÉMATIQUE PURE QUI ONT ÉTÉ CITEES OU
PUBLIÉES, EN TOUT OU EN PARTIE, DANS LES TOMES IX ET
X CONTENANT LA CORRESPONDANCE ANNOTÉE ET
POURVUE D'APPENDICES DES ANNÉES 1685—1695¹⁾.

Manuscrit F, p. 235	publiée ²⁾ dans le T. IX, p. 117. Pièce de 1686 de l'atio de Duillier sur certaines épicycloïdes.
„ p. 261—265 citées ²⁾	„ „ T. IX, p. 132—133 [1687]. „Problème [diophan- tique] de Mr. de Maroles”.
„ p. 270—271 citées	„ „ T. IX, p. 174.
„ „ publiées	„ „ T. IX, p. 181—183. C'est la Pièce de mars 1687 réimprimée dans le présent Tome aux p. 491—493 (§1 et §2).
„ p. 277	publié „ „ T. IX, p. 167. Sommaire de la lettre envoyée par Huygens à J. d'Alencé le 20 juin 1687 avec les copies de certains traités devant être im- primés à Paris. Une autre partie de la p. 277 a été publiée dans le présent Tome (p. 500, note 9).
„ p. 278	citée „ „ T. IX, p. 187. A propos d'une démonstration de B. de Volder sur les „curvæ filares” de Tschirn- haus (juillet 1687).
„ p. 280	publiée „ „ T. IX, p. 198. Sommaire de la lettre du 27 août 1687 de Huygens à H. Coets sur un problème mathématique de ce dernier.
„ p. 281	citée „ „ T. IX, p. 202. Calcul se rapportant à celui de la p. 285 du Manuscrit.

¹⁾ Cette liste a été mentionnée à la p. 480 qui précède.

²⁾ „Publiée” veut dire „publiée *dans le texte* du T. IX ou du T. X”; „citée” veut dire „citée, ré-
sumée ou publiée *dans les notes* du T. IX ou du T. X”.

Manuscrit F , p. 285	publiée	dans le T. IX, p. 201—202 (appendice à la lettre à H. Coets du 27 août 1687). Sur le point d'inflexion de la conchoïde.
„ p. 297	publiée	„ „ T. IX, p. 224—226. „Solution du Probleme proposé par M. Leibnitz dans les nouvelles de la Republique des Lettres du Mois de Septembre 1687”. Comparez les p. 481 et 505 du présent Tome.

Manuscrit G ³⁾ , p. 9r		citée dans le T. X, p. 218 [1691]. Passage qui se rapporte au problème de la chaînette.
„ p. 37r ⁴⁾		citée „ T. X, p. 72.
„ „		publiée „ T. X, p. 73 (Appendice à la lettre à A. de Graaff de mars 1691). Rectification de la catacaustique du cercle pour le cas de rayons parallèles. Voyez sur cette Pièce les 4 dernières lignes de la p. 503 du présent Tome.
„ p. 50r et v,	citées	„ T. IX, p. 439—440. A propos de „la maniere du marquis de l'Hospital” pour trouver la place du centre d'oscillation dans le cas d'une série de poids punétiformes. Voyez sur cette maniere les p. 461—464 du T. XVIII. Ces pages du Manuscrit se rattachent à la lettre de Huygens à de l'Hospital du 6 juillet 1690.
„ p. 51v [Hg. 1],	citée	„ T. X, p. 245.
„ p. 51v et 52r [Hg. 1 et 2]		citées „ T. IX, p. 472. Voyez aussi sur ces deux pages le § 27 de la Pièce III à la p. 540 du présent Tome.
„ „	publiées	„ T. IX, p. 473—475 (Appendice à la lettre à Leibniz du 24 août 1690). Huygens choisit les formules de deux soufflangentes pour les proposer à Leibniz: voyez les l. 9—10 de la p. 487 du présent Tome.

³⁾ Nous citons tant la pagination générale que celle de Huygens. La page 1 de Huygens, que nous désignons par Hg. 1, correspond à la p. 51v de la pagination générale, etc.

⁴⁾ A la p. 72 du T. X le numéro de la page citée du Manuscrit G n'est pas indiqué.

Manuscrit G, p. 57v et 58r [Hg. 13 et 14]

- publiées dans le T. IX, p. 504 (§ II de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Rectification de la chaînette etc.
- „ p. 58r [Hg. 14], citée „ T. IX, p. 541.
- „ p. 59r [Hg. 16], publiée „ T. IX, p. 505 et 507 (§ III et VI de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Rectification de la chaînette. Quadrature de la surface de révolution de la même courbe etc.
- „ p. 59v [Hg. 17], publiée „ T. IX, p. 506 (§§ IV et V de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Rectification de la développée de la chaînette etc.
- „ p. „ „ publiée „ T. IX, p. 541—542 (§ I de l'Appendice à la lettre à Leibniz du 18 novembre 1690). Réduction, en deux étapes, de la quadrature de la courbe $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$ à celle de la courbe $x^2y^2 = 4a^4 - x^4$: ici la quadrature de la première courbe est réduite à une somme infinie de sécantes. Ceci fait partie des calculs sur la chaînette.
- „ p. 61r [Hg. 20], publiée „ T. IX, p. 507—509 (§§ VII et VIII de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Construction des courbes $x^2y^2 = a^2x^2 - a^2y^2$ et $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$, dont la quadrature sert à la rectification de la chaînette.
- „ p. 61v [Hg. 21], publiée „ T. IX, p. 509—510 (§ IX de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Calcul de nombres proportionnels à un certain arc, une certaine abscisse et une certaine ordonnée.
- „ p. 62v et 63r [Hg. 23 et 24]
publiées „ T. IX, p. 500—501 (Appendice I à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Explication d'un anagramme sur la solution du problème de la chaînette.
- „ p. 64r [Hg. 26] publiée „ T. X, p. 192—193 (Appendice à la lettre à Leibniz du 16 novembre 1691). Calcul d'une limite supérieure et d'une limite inférieure de

$$\int_0^{\varphi} \sec \varphi \, d\varphi.$$

Manuscrit G, p. 69r [Hg. 34bis]	citée	„ T. IX, p. 541.
„ p. „ „	publiée	„ T. IX, p. 542—543 (§ 11 de l'Appendice à la lettre à Leibniz du 18 novembre 1690). Réduction, en deux étapes, de la quadrature de la courbe $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$ à celle de la courbe $x^2y^2 = 4a^4 - x^4$. Une somme infinie de sécantes est réduite à la quadrature de la deuxième courbe. Ceci fait partie des calculs sur la chaînette.
„ p. 69v [Hg. 35]	publiée	„ T. X, p. 63—64 (§ 1 de l'Appendice II à une lettre à Leibniz du 26 mars 1691). Recherches qui ont mené aux résultats formulés dans l'anagramme proposé par Huygens à Leibniz dans cette lettre.
„ p. 71v et 72r [Hg. 39 et 40]	publiées	„ T. IX, p. 573—576 (Appendice à une lettre à Leibniz du 19 décembre 1690). Détermination de quelques courbes, les sous-tangentes étant données.
„ p. 73r et v [Hg. 44 et 45]	citées	„ T. IX, p. 568. Brouillon de la lettre à Leibniz du 19 déc. 1690.
„ p. 73v et 74r [Hg. 45 et 46]	publiées	„ T. IX, p. 45—47 (Appendice II à la lettre à Leibniz du 23 février 1691). Calcul de logarithmes népériens, et du module du système décimal. Ce module étant connu, manière de déduire les logarithmes briggiens des logarithmes népériens. Comparez la note 3 de la p. 472 du présent Tome.
„ p. 74v [Hg. 47]	publiée	„ T. IX, p. 226—228 (Appendice I à la Pièce No. 2489 — comparez la p. 481 qui précède — c.à.d. „Solution” de Huygens dans les Nouvelles de la République des Lettres du 8 oct. 1687 du „Probleme proposé par M. Leibnitz [en] Septembre 1687”. Il s'agit de la courbe de descente uniforme.
„ p. 75v—81v [Hg. 49—61]	publiées	„ T. X, p. 23—42 (§§ 1—X de l'Appendice I à la lettre à Leibniz du 23 février 1691), traitant „de descensu corporum gravium et ascensu

per aerem aut materiam aliam, quæ resistit motui in ratione duplicata celeritatum, ut revera contingit" et contenant e.a. la réduction de la formation de la série $b + \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{5}b^5 + \dots$ à la quadrature de l'hyperbole, et l'emploi de cette série au calcul des logarithmes.

Voyez aussi sur la p. 79v les p. 467—468 du présent Tome et sur la p. 80r les §§ 1 et 1 bis de la Pièce III aux p. 507 et 508 qui précèdent.

Manuscrit G, p. 80r [Hg. 58] publiée „ T. X, p. 64—65 (§ II de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 26 mars 1691). Quadrature d'une certaine aire. Ceci fait partie des calculs sur la chaînette.

„ p. 84r [Hg. 66] citée „ T. X, p. 211. La note du T. X se rapporte à une lettre du 18 décembre 1691 à Fatio de Duillier, où Huygens traite d'un problème des tangentes renversées en faisant usage du théorème de Barrow. Comparez le § 1 de la Pièce III à la p. 507 du présent Tome.

„ p. 89r [Hg. 76] publiée „ T. IX, p. 229 (Appendice II à la Pièce No. 2489). „Problema Leibnitii de æquali descensu in curva, superius resolutum, etiam hoc modo invenitur”.

Une autre partie de la p. 89r est publiée à la p. 513 du présent Tome (§ 6 de la Pièce III).

„ p. 90r [Hg. 78] publiée „ T. X, p. 43 (§ XI de l'Appendice I à la lettre à Leibniz du 23 février 1691). Comparaison des durées de l'ascension et de la descente d'un corps pesant jeté en haut avec la vitesse terminale dans le cas d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

„ p. 93r [Hg. 82] publiée „ T. X, p. 65 (§ III de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 26 mars 1691). Application de la quadrature obtenue dans le § II. Ceci se rapporte à la chaînette.

„ p. 93v [Hg. 83] citée „ T. X, p. 68.

„ p. 93v et 94r [Hg. 83 et 84] publiées „ T. X, p. 59—62 (Appendice I à la lettre à Leibniz

				du 26 mars 1691). Explication de l'anagramme envoyé par Huygens à Leibniz dans cette lettre; l'anagramme se rapporte au problème de la chaînette.
Manuscrit G,	p. 94v [Hlg. 87]	publiée	„ T. X,	p. 66—69 (§ IV de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 26 mars 1691).
„	p. 95r et v [Hlg. 88 et 89] ⁵⁾	citées	„ T. IX,	p. 510 (note se rattachant au § IX de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). Calcul d'ordonnées à l'aide de logarithmes.
„	p. 97r [Hlg. 92]	publiée	„ T. IX,	p. 502 (§ I de l'Appendice II à la lettre à Leibniz du 9 octobre 1690). „Fundamentum omnium eorum quæ de curva catenæ reperimus”.
„	p. 97v [Hlg. 93]	citée	„ T. IX,	p. 511.
„	p. „ „	citée	„ T. IX,	p. 512 [1690]. Sur la catacaustique de Tschirnhaus. Comparez sur la première construction erronée de Tschirnhaus la note 15 de la p. 503 du présent Tome.
„	p. 101r [Hlg. 100]	citée	„ T. X,	p. 75. La note du T. X se rapporte à la lettre à Fatio de Duillier du 3 avril 1691. Il est question dans ce passage d'une solution par Fatio du second des problèmes proposés par Huygens à Leibniz en août 1690 (voyez dans la présente liste Man. G. p. 51v et 52r = T. IX p. 473—475).
„	p. 101v [Hlg. 101]	citée	„ T. X,	p. 223. A propos de la méthode de Fatio de Duillier pour intégrer les „équations différentielles” (problème des tangentes renversées). Cette note du T. X se rapporte à la lettre à Leibniz du 1 janvier 1692. Voyez sur cette page le § 12 de la Pièce III aux p. 517—518 qui précèdent (et aussi sur les p. 101r et 101v le § 13).
„	p. 106v [Hlg. 111]	citée ⁶⁾	„ T. X,	p. 87. La note du T. X se rapporte à la lettre

⁵⁾ La note 20 de la p. 510 du T. IX dit à tort que les p. 95r et v de la pagination générale sont les p. 90 et 91 de Huygens.

⁶⁾ Avec introduction des symboles dx et dy de Leibniz dans les „équations différentielles” du texte de Huygens.

à Leibniz du 21 avril 1691. Il s'agit dans ce passage du déguisement des expressions qui représentent les soufflangentes considérées ou, si l'on veut, de celui des équations différentielles à intégrer.

Voyez sur la p. 106v le § 16 de la Pièce III à la p. 522 du présent Tome.

- Manuscrit G,** p. 108r [Hg. 114] citée „ T. X, p. 96. La page du Manuscrit porte la suscription „*missa ad auctores actorum Lipsientium* 5 Maj 1691” et se rattache à la Pièce No. 2981 — comparez la p. 481 qui précède — savoir la „*Chr. Hugonii . . . Solutio ejusdem problematis*”, c. à. d. du problème de la chaînette. Dans les *Acta Eruditorum* cette Pièce fuit la „*Solutio problematis funicularii, exhibita a Iohanne Bernoulli*”.
- „ p. 109v [Hg. 117] citée „ T. X, p. 247 [1691]. Expression qui représente la soufflangente d'une circonférence de cercle. Comparez le § 20 de la Pièce III à la p. 529 du présent Tome.
- „ p. 111r [Hg. 120] citée „ T. X, p. 223. A propos de la méthode de Fatio de Duillier pour intégrer les „équations différentielles” (problème des tangentes renversées). Cette note du T. X se rapporte à la lettre à Leibniz du 1 janvier 1692.
Comparez le § 23 de la Pièce III à la p. 535 du présent Tome.
- „ p. 116v—119r
[Hg. 131—136] citées „ T. X, p. 129. Ces pages qui portent les dates du 5, 6 et 7 août 1691, contiennent l'examen de Huygens de la solution par Jean Bernoulli du problème de la chaînette. La note du T. X se rapporte à la lettre à Leibniz du 1 septembre 1691.
- „ p. 119v et 120r
[Hg. 137 et 138] publiées „ T. X, p. 135—138 (Appendice à la lettre à Leibniz du 1 septembre 1691). Quadrature de la chaînette et détermination des centres de gravité de l'arc et de l'aire d'un segment de cette courbe, avec vérification d'un théorème de Jean Bernoulli.

- Manuscrit G,** p. 121r et v
[Hlg. 140 et 141] publiées „ T. X, p. 127—128. Sommaire de la lettre à Leibniz du 1 septembre 1691.
- „ p. 122r [Hlg. 142] citée „ T. X, p. 131 [1691]. Calcul des aires de certains segments de la chaînette.
- „ p. 123v [Hlg. 145] citée „ T. X, p. 140 „Inveni 1 Sept. 1691, momento postquam ad Leibnitium literas dedissem in quibus querebar hætenus non potuisse me hoc invenire, nempe constructionem Catenariæ ex data mensura lineæ Parabolicæ vel quadratura Hyperbolæ”. La note du T. X se rapporte à la lettre à Leibniz du 4 sept. 1691.

Nous observons en passant que la p. 126r [Hlg. 150] a été publiée aux p. 377—378 du T. XIV, comme nous le disons aussi à la p. 470 (Pièce VII) ainsi que dans la note 3 de la p. 475 du présent Tome.

- Manuscrit G,** p. 127v [Hlg. 153] citée „ T. X, p. 186 (et T. X, p. 418—419). Achèvement de la construction de la chaînette en faisant usage de certains résultats obtenus par James Gregory dans ses „Exercitationes geometricæ” de 1668 sur la somme des sécantes. La note du T. X se rapporte à la lettre à Leibniz du 16 novembre 1691. Voyez aussi sur ce sujet la p. 17 du Manuscrit I.
- „ p. 128v et 129r [Hlg. 155 et 156] citées „ T. X, p. 98. Commencement d'un article qui doit avoir été composé dans les derniers mois de 1691. Voyez ci-dessous la publication des p. 216—218 du T. X.
- „ P. „ „ publiées „ T. X, p. 216—218 [1691]. „Reflexions sur ce qui a paru touchant le Problème de la Chaînette”.

- Manuscrit H,** p. 8 citée dans le T. X, p. 222. Le 19 décembre 1691 commence l'examen de la méthode de Leibniz pour résoudre le problème inverse des tangentes. La note du T. X se rapporte à la lettre à Leibniz du 1 janvier 1692.
- „ p. 8 citée „ T. X, p. 247. Voyez sur cette p. 8 la Pièce IV („Methodus Leibnitij”) à la p. 542 du présent Tome.
- „ p. 10—12 citées „ T. X, p. 222. Examen de la méthode de Leibniz.

Manuscrit H,	p. 14		publiée „ T. X, p. 309 — 310 (Appendice à la lettre à de l'Hospital du 27 août 1692). Démonstration d'un théorème général sur les quadratures et application de ce théorème à la quadrature de la courbe $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$, dont dépend la construction par points (x, y) de la chaînette.
			A la même page le théorème de Barrow que nous publions aux p. 509—510 du présent Tome (§ 1 ^{er} de la Pièce III).
„	p. 18—40	citées et publiées „	T. X, p. 244—256. Calculs de 1692 se rapportant à ceux de Hubertus Huighens.
„	p. 18—22	publiées dans le	T. X, p. 249—252 (Appendice I à la lettre à Hubertus Huighens du 12 février 1692). Méthode de Huygens pour trouver l'ordonnée Be d'une courbe Ae quand l'aire AeB est donnée en fonction de l'abscisse AB. Etc.
„	p. 19	citée „	T. X, p. 245. Huygens renvoie à la p. 1 du Manuscrit G (p. 51v de la pagination générale).
„	p. 21—22	citée „	T. X, p. 251—252.
„	p. 25	citée „	T. X, p. 248.
„	p. 28—36	citées „	T. X, p. 255. Cette note du T. X se rapporte à la lettre à Hubertus Huighens du 15 février 1692.
„	p. 37	citée „	T. X, p. 246.
„	p. „	publiée „	T. X, p. 253—254 (Appendice II à la lettre à Hubertus Huighens du 12 février 1692).
„	p. 39	citée „	T. X, p. 262 [1692]. Huygens retrouve la manière dont Leibniz a construit une certaine aire quadrable en partant de la considération d'une lunule d'Hippocrate.
„	p. 97	citée „	T. X, p. 300. „Contra Cartesii dogma, Corporis naturam seu notionem in sola extensione consistere”. La note du T. X se rapporte à la lettre à Leibniz du 11 juillet 1692. Nous avons de nouveau publié cette tirade à la p. 325 du T. XIX.
„	p. 99	citée „	T. X, p. 325. A propos de la rectification de la logarithmique par de l'Hospital. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hospital du 22 octobre 1692.

Manuscrit H,	p. 101	citée „	T. X, p. 327. Meme sujet.
„	p. 104	publiée „	T. X, p. 333 (Appendice II à la lettre à de l'Hospital du 22 octobre 1692). Calcul du rayon minimal de la logarithmique. Comparez les p. 451 et 476 qui précèdent.
„	p. 106	publiée „	T. X, p. 330 (Appendice I à la lettre à de l'Hospital du 22 octobre 1692). Quadrature de la surface de révolution de la logarithmique tournant autour de son asymptote.
„	p. 107	citée „	T. X, p. 326. Réduction d'une „somme des $aady : y \sqrt{aa} + yy$ à la quadrature de l'hyperbole". La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hospital du 22 octobre 1692.
„	p. 108	publiée „	T. X, p. 356—357 (Appendice I à la lettre à de l'Hospital du 29 décembre 1692). Réduction de la quadrature de la courbe $x^2y^2 - a^2x^2 = a^4$ à celle de l'hyperbole.
„	p. 110—111 citées et avec les p. 138—140	publiées „	T. X, p. 350 (note 14) et p. 364—373 (Appendice IV à la lettre à de l'Hospital du 29 décembre 1692). Démonstration de théorèmes sur certaines intégrations. Extension de théorèmes de Fermat. Application c.a. à la quadrature des courbes $x^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0$ et $xy^2 + a^2x - a^3 = 0$.
„	p. 115	citée „	T. X, p. 329.
„	p. „	publiée „	T. X, p. 336—338 (Appendice III à la lettre à de l'Hospital du 22 octobre 1692). Sur le problème de Viviani. Sinusoïde (linea finnum) et lignes cyclo-cylindriques. Comparez la note 1 de la p. 453 qui précède.
„	p. 117—137 citées et	publiées „	T. X, p. 409—412. Traçtrice. Instruments propres à la décrire. Les notes du T. X se rattachent à la Pièce No. 2793 — comparez la p. 481 qui précède —, lettre à Bafnage de Beauval publiée dans l'Histoire des Ouvrages des Sçavans en février 1693.
„	p. 117—118 citées et publiées avec les p. 128 et 166	„	T. X, p. 418—422 (Appendice à la lettre à Bas-

nage de Beauval). Première découverte de la traîtresse comme quadratrice de l'hyperbole. Découverte de la propriété de la traîtresse de se laisser mesurer par elle-même. Construction de la traîtresse au moyen de logarithmes, équivalant à la connaissance de son équation analytique. Cubature du solide de révolution décrit par l'aire comprise entre la traîtresse et son asymptote. Centre de gravité de cette aire. Quadrature des surfaces de révolution décrites par la traîtresse autour de son asymptote etc. Centre de gravité de la courbe. Tracé du cas particulier de la traîtresse circulaire où la longueur du fil est égale au rayon du cercle directeur.

Manuscrit H,	p. 128 citée et publiée avec	
	les p. 117—118 et 166	„ T. X, p. 418—422.
„	p. 138—140 publiées	
	avec les p. 110—111.	„ T. X, p. 364—373.
„	p. 141—145 publiées	„ T. X, p. 374—380 (Appendice V à la lettre à de l'Hospital du 29 décembre 1692). Quadrature du folium Cartesii.
„	p. 148 citée	„ T. X, p. 463. Renvoi de Huygens à cette page. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hospital du 23 juillet 1693.
„	p. 153 citée	„ T. X, p. 349. Essai de réduction infructueux. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hospital du 29 décembre 1692.
„	p. 155 publiée	„ T. X, p. 361 (Appendice III à la lettre à de l'Hospital du 29 décembre 1692). Réduction de la quadrature d'une certaine aire à celle de l'hyperbole, etc.
„	p. 156 citée	„ T. X, p. 353. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hospital du 29 décembre 1692.
„	p. 160 publiée	„ T. X, p. 358—360 (Appendice II à la lettre à de l'Hospital du 29 décembre 1692). Solution définitive du problème de la rectification de la logarithmique.
„	p. 166 citée et publiée avec	
	les p. 117—118 et 128	„ T. X, p. 418—422.

Manuscrit H , p. 196	publiée „ T. X, p. 276. Sommaire de la lettre à Fatio de Duillier du 5 avril 1692.
„ p. 196	citée „ T. X, p. 477. Huygens croit devoir attribuer à J. Prestet le livre anonyme de 1691 intitulé „Logistique pour la science générale des lignes courbes” qui était en réalité de l'abbé de Cotelan.
<hr/>	
Manuscrit I ⁷⁾ , p. 1	citée dans le T. X, p. 438. Discussion de la quadrature d'une aire du folium Cartesii par Leibniz. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hospital du 9 avril 1693.
„ p. 1 et 2	citées „ T. X, p. 462. Calcul du volume du solide obtenu par la rotation de la boucle du folium Cartesii autour de son axe.
„ p. 6	publiée „ T. X, p. 473. Remarque sur le manque de rigueur de la démonstration de certaines formules où entrent des exposants fractionnaires „quam per consequentias ostendatur verum esse postquam de veris potestatis demonstrationem fuerit”. La note du T. X se rapporte à l'Appendice II (pièce de D. Gregory) à la lettre à de l'Hospital du 23 juillet 1693.
„ p. 7 et suiv. citées	et publiées „ T. X, p. 462—463. „Dav. Gregorij Regula ad inveniendas Curvarum certi generis quadraturas ex data Aequatione earum” et applications de cette règle. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hospital du 23 juillet 1693.
„ p. 11	citée „ T. X, p. 460. Quadrature de la courbe $a^2y^2 = a^2x^2 + x^4$ d'après une méthode de Fermat. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hospital du 23 juillet 1693.

⁷⁾ Dans le T. X le Manuscrit I est désigné — sans doute pour distinguer la lettre majuscule du chiffre romain I — par l'expression „Livres J des Adversaria”.

Manuscrit I,	p. 15	citée	„ T. X, p. 449. Interprétation géométrique d'une solution d'un problème de de Beaune ⁸⁾ . La note du T. X se rapporte à la lettre du marquis de l'Hôpital à Huygens du 12 mai 1693.
„	p. 15—28	citées	„ T. X, p. 457. Examen de cette lettre du 12 mai 1693.
„	p. 17	citée	„ T. X, p. 413. Huygens corrige une remarque [voyez la p. 127v du Manuscrit G] qu'il avait faite sur J. Gregory et la loxodromique. La note du T. X se rapporte à la Pièce No. 2793, lettre de Huygens à Bafnage de Beauval, publiée en février 1693; voyez la p. 481 qui précède.
„	p. 18	citée	„ T. X, p. 451. Manifestement beaucoup de courbes diverses satisfont à la même équation différentielle. La note du T. X se rapporte à la lettre du marquis de l'Hôpital à Huygens du 12 mai 1693.
„	p. 20	citée	„ T. X, p. 439. La page porte la date du 6 juillet 1692. Huygens motive l'addition d'une constante dans l'intégration.
„	p. 20 et 25	citées	„ T. X, p. 458. Différentiation détournée de l'équation $x = my^2$. Ces notes du T. X se rapportent à la lettre à de l'Hôpital du 23 juillet 1693.
„	p. 21	publiée	„ T. X, p. 469—470 (Appendice I à la lettre à de l'Hôpital du 23 juillet 1693). „Ad colligendas fummas”.
„	p. 23	citée	„ T. X, p. 460. Huygens vérifie la construction par de l'Hôpital de la courbe dont la sous-tangente est $x - y$. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hôpital du 23 juillet 1693.
„	p. 25	citée	„ T. X, p. 458. „Trouver la courbe de M. Sluse ou Gutschoven par sa sous-tangente donnée par la méthode de M. de l'Hôpital”. Cette note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hôpital du 23 juillet 1693.

⁸⁾ Comparez Jean Bernoulli, Solutio etc. de 1693 dans la Table III qui précède.

Manuscrit I,	p. 27	citée	„ T. X, p. 458. „Position du M. de l'Hospital pour diminuer les termes d'une equation differentielle, et comment il forme ces positions etc.”
„	p. 28	citée	„ T. X, p. 459. Recherche des courbes (hyperbole et circonférence de cercle) correspondant à la soustangente donnée $\frac{x^2 - a^2}{x}$.
„	p. 35	publiée	„ T. X, p. 474. Sommaire de la lettre à de l'Hospital du 5 août 1693.
„	p. 36—37	publiées	„ T. X, p. 478—480 (Appendice à la lettre à de l'Hospital du 5 août 1693). Quadrature d'une certaine courbe dont la soustangente s'exprime alternativement par $x - y$, $y - x$ et $x + y$.
„	p. 38	citée	„ T. X, p. 491. „Tollitur difficultas... et colliguntur veræ summæ $\int -\frac{2a^3 dz}{2z} + \frac{a^4 dz}{z^3}$.”
„	p. 41	citée	„ T. X, p. 491. Transformation d'une équation en considérant „ $\frac{mm}{mm} - \frac{mdm}{mdm}$ censendum æquari $m - \frac{1}{2}dm$ ”.
„	p. 44—49	citées	„ T. X, p. 494—495. Recherches sur la „Jacobi Bernoullii solutio problematis Fraternali” de juin 1693. Voyez sur ce problème de Jean Bernoulli la p. 481 qui précède (No. 2823 et No. 2875). Ces notes du T. X se rapportent, comme celles des p. 491 et 492, à la lettre à de l'Hospital du 3 septembre 1693.
„	p. 47—48	citées	„ T. X, p. 492. „Inventio Regulæ Hospitalianæ ad diminuendos terminos æquationum differentialium”.
„	p. 49	citée	„ T. X, p. 537—538. Sur une manière de décrire la courbe qui résout le problème de Jean Bernoulli. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hospital du 1 octobre 1693.
„	p. 49	citée	„ T. X, p. 553. Autres considérations sur la courbe de Jean Bernoulli et la manière de la décrire. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hospital du 5 novembre 1693.
„	p. 52—57	publiées	„ T. X, p. 500—508 (Appendice à la lettre à de l'Hospital du 10 septembre 1693). Solution du problème de Jean Bernoulli.

Manuscrit I,	p. 53	publiée	„ T. X, p. 555 (Appendice I à la lettre à de l'Hôpital du 5 novembre 1693). Détermination du point de rebroussement de la courbe de Jean Bernoulli.
„	p. 58	citée	„ T. X, 506—507.
„	p. 62	citée	„ T. X, p. 534. Huygens s'assure de l'identité des solutions des frères Bernoulli et du marquis de l'Hôpital du problème de Jean Bernoulli. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hôpital du 1 octobre 1693.
„	p. 63	publiée	„ T. X, p. 534. Sommaire de la lettre à de l'Hôpital du 1 octobre 1693.
„	p. 66	citée	„ T. X, p. 625. Calcul d'une formule pour la sous-normale des courbes paraboliques, laquelle devient le rayon de la développée pour le point de l'axe qui constitue le sommet ou le point d'inflexion. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hôpital du 16 juin 1694.
„	p. 72—73	publiées	„ T. X, p. 556 (Appendice II à la lettre à de l'Hôpital du 5 novembre 1693). Démonstration „qu'une voile faite de certain nombre de rectangles égaux et inflexibles étant étendue par le vent” ne pourra prendre la même position qu'une chaîne de ce genre le ferait par son poids ⁹⁾ .
„	p. 85	citée	„ T. X, p. 542. Construction au moyen de la logarithmique d'une courbe mentionnée par Leibniz dans sa lettre à Huygens du 11 oct. 1693.
„	p. 90	citée	„ T. X, p. 578. Essai de vérification d'une méthode du marquis de l'Hôpital pour quadrer le folium Cartesii. La note du T. X se rapporte à la lettre à de l'Hôpital du 24 décembre 1693.

⁹⁾ Nous faisons mention ici de cet Appendice II de nature fort mathématique, quoiqu'en général, comme nous l'avons dit dans la note 7 de la p. 480 qui précède, nous ne tenions pas compte dans le présent Tome de ce qui se rapporte aux voiles ou à la manoeuvre des vaisseaux.

V. MATIÈRES TRAITÉES.

Nous pourrions répéter ici, mutatis mutandis, les remarques initiales de la table correspondante du T. XIX: nous ne tâchons pas, en rédigeant la présente liste, d'être complets. Ceci s'applique e.g. à la Partie „Musique”.

Vu la brièveté de la première Partie „Musique et Mathématique” nous ne donnons pas de liste des sujets traités dans cette Partie.

Il en est de même pour la Partie „Huygens et Euclide” ¹⁾. Euclide et Huygens étaient l'un et l'autre musicologue et mathématicien. Cette Partie forme la transition entre la Partie „Musique” et la Partie „Mathématiques”.

Quant à la Partie „Mathématiques”, la liste des Pièces et Mémoires (Table I) fait suffisamment connaître les sujets traités. Nous nous contentons de signaler les passages où il est question de l'application des logarithmes à la musique et ceux qui se rapportent à une douzaine d'autres sujets.

Les chiffres indiquent les pages de ce Volume.

MUSIQUE (p. 1, 19—173 et 555—561).

AUTEURS sur l'histoire et la théorie de la musique ²⁾. Alypius, Ambros, Archibald, Aristide Quintilien, Aristote, Aristoxène, Artusi, Athénée, St. Augustin, Bacchius Senex, Balfoort, Ban, Baryphonus (= Pipegrop), Beda, van Beynum - von Essen, van Blankenburg, Boèce, Bryennius, Buttler, Cicéron, Combarieu, Cousin, A. Croiset, M. Croiset, van Deventer, Didymus, Dupont, Dijksterhuis, Alfr. Einstein, Eitner, van der Elst, Eratosthène, Euclide, Euler, Faber Stapulensis, Fano, Fétis, Friedländer, V. Galileo, Gaudence, Genebrardus, Gevaert, Gibel, Glareanus, Gogavinus, Guicciardini, Guido Aretinus, Helmholtz, Hemony, Const. Huygens, Janus, Jeans, Jonckbloet, Kapsbergen, Kepler, Kircher, Land, Loulié, Maillard, le Maire, Marchetto, Meibomius, Menge, Mercator, Mersenne, de Montalent, de Muris, Neidhardt, Nicomache, Pasaro, Pipegrop, Plutarque, Pollux, Porphyre, Ptolémée, Puteanus, Reinach, Riemann, Rome,

¹⁾ Nous avons toutefois indiqué dans la liste des sujets traités dans la Partie „Musique” qu'à la p. 178, qui appartient à la Partie „Huygens et Euclide”, il est question (dans une note) de musique chinoise.

²⁾ Dont plusieurs sont aussi des compositeurs. La liste comprend de plus les noms de quelques organistes et de quelques constructeurs d'instruments.

Parmi nos „auteurs” il y en a quelques-uns qui n'ont parlé qu'incidemment de musique.

- Salinas, Salmon, Schlick, Scholes, Senti, Shore, Smits van Wæsbèrghe, Stevin, Tannery, Théon de Smyrne, Titelouze, Vas Nunes, Verheyen, da Viadana, Vicentino, G. J. Vossius, I. Vossius, de Waard, Wallis, Werckmeister, Westphal, Zarlino.
- BAGUETTES DE NEPER. 173.
- BATTEMENT DE LA MESURE. 120, 121.
- BEAUTÉ DES CHANTS OU DE LA MUSIQUE INSTRUMENTALE. 1, 35, 36, 38, 66, 67, 78, 86, 125—127, 129, 131, 163, 170 (consultez aussi la p. 410 appartenant à la Partie „Mathématiques”).
- BOURDON. 131; faux-bourdon. 65, 78, 80, 117, 118.
- CARACTÈRES ÉTHIQUES DES DIFFÉRENTS MODES. 76, 96, 99.
- CHANT D'ÉGLISE. 64, 68, 69, 78, 111, 119, (grégorien) 127.
- CHOEURS ANTIQUES. 85; modernes. 129.
- COMMA. 45, 46, *passim*; dièse. 112, 113, 143, 144, 146, 155, 156, 165, 166; „intervalle-atome”. 155; limma. 155; cent. 146, *passim*.
- COMPOSITEURS³⁾. Archiloque, Bach, Händel, Mèfomède, Pindare.
- CONCERTS. 131, 153.
- CONTREPOINT. 74, 133.
- DIÈSE; (voir *Comma*).
- DIFFÉRENCE ENTRE CERTAINS GENRES ANCIENS ET LES GENRES MODERNES CORRESPONDANTS. 102.
- DIVISION DU TÉTRACHORDE EN DIFFÉRENTS INTERVALLES. 86, *passim*.
- DIVISION DU TON EN UN CERTAIN NOMBRE D'INTERVALLES ÉGAUX OU INÉGAUX. 35, 95, 99, 112, 113, 116, 120, 143, 144, 157, 169.
- DIVISION HARMONIQUE ET ARITHMÉTIQUE DES INTERVALLES. 110, 118.
- ÉTALONS ET INSTRUMENTS DE MESURE. 21 (firène); 68, 69 (pendule et métronome); 87, 91 (diapason etc.); 105 (firène); (voir aussi *Instruments de musique: monochorde*).
- EXPERIENTIA ET RATIO. 17, 18, 168, 170.
- EXPÉRIENCES POUR DÉTERMINER LES FRÉQUENCES DES VIBRATIONS. 18, 30, 33, 110, 124.
- FAUX-BOURDON; (voir *Bourdon*).
- FLORAISON DE LA MUSIQUE DANS LES PAYS-BAS. 66, 82.
- FUGUES. 125.
- GENRES (voir *Différence etc.* et *Particularités etc.*).
- HARMONIE. 1, 43, 100, 129, 133, 153—155, 158; cycles harmoniques (voir *Tempèraments*); proportion harmonique 75 (voir aussi *Division harmonique etc. des intervalles*); *passim*; (voir aussi *Question de savoir s'il y a deux ou plusieurs modes*).
- HASARD. 18, 115.
- HEXACHORDE. 79, 111.
- HYMNES ET ODES ANTIQUES. 85, 89, 90, 100, 110, 124, 126, 127, 132.

³⁾ Voyez aussi la note précédente: nous ne répétons pas ici les noms de ceux qui, comme Const. Huygens, furent en même temps compositeurs et auteurs d'ouvrages sur l'histoire (ou la théorie) de la musique.

INSTRUMENTS DE MUSIQUE. 6, 18, 46, 73, 101; archicymbale. 18, 112, 113, 157, 158; *αὐτός*. 87; barbitus ou barbiton. 132; carillon. 43, 48, 49; clavecin, clavier. 55, 69, 72, 74, 75, 77, 116, 124, 125, 144, 145, 153, 159, 160, 161, 163, 167, 168, 558; idem (et autres instruments) à touches scindées. 18, 154, 160; cloche. 18, 26, 36, 44, 49; (instruments à) cordes. 29, 37, 43, 72, 76, 91, 100, 617; cymbale. 113, 114; cythare (cistre). 34, 80, 91, 99, 113, 117, 131, 617; epigonium. 96; fistula. 131; flûte. 21, 87, 104; gravicembalo. 160; guitare. 558; harpe. 1, 137; luth. 34, 35, 121, 122, 132, 137, 558; lyre. 1, 31, 99, 113, 117; magadis. 131, 132; mandore. 132; monochorde. 18, 29, 41—60, 72, 110, 113, 117, 133, 134, 141, 159, 168; orgue. 34, 35, 45, 46, 55, 64, 69, 71, 72, 75, 77, 113, 114, 116, 120, 122, 133, 137, 142, 144, 153, 159, 160, 168; orgue hydraulique. 124; pandoron ou pandouros. 132; pectis. 132; pfalterium. 131; sambuca. 131; spinette (ou épinette). 120, 133, 558; *συνῆς*. 87; symphonia. 131; théorbe. 558; trompette. 37, 122, 618; trompette marine. 37, 122; tuba. 131; vielle. 131; viola da gamba, 130; viole. 34, 35, 113⁴⁾, 558; violon. 75, 131, 137; (voir aussi *Tétrachorde* et *Hexachorde*).

INVENTION DE LA BOUSSOLE. 81.

INVENTION DU CHANT POLYPHONIE. 82, 124; (voir aussi *Question de savoir si les anciens ont connu la polyphonie*).

INVENTION DU TÉLESCOPE. 81.

INVENTION ET ÉCRITURE DES NOTES. 63, 68, 92, 93, 100, 119, 120, 126, 128, 129, 136, 137.

ISOCHRONISME DES OSCILLATIONS DU PENDULE. 69, 557.

Κρούσις. 80, 99, 126.

LOGARITHMES APPLIQUÉS À LA MUSIQUE. 60, 113, 136, 141, 145, 147—151, 157, 158, 169 (171—173).

MONOCHORDE (voir *Instruments de musique*).

MUSIQUE ANTIQUE. 6; chinoise. 178; iroquoise. 131; israélite. 131. grecque. *passim*; romaine. 125.

NOMS DES TONS DU GRAND SYSTÈME PARFAIT. 93, 98; petit système parfait. 98. *passim*.

ODES; (voir Hymnes).

PARTICULARITÉS DES DIVERS GENRES. 86, *passim*.

PEINTURE ANTIQUE. 132.

Πυκνόν. 89, 90, 96.

Περικύκλωσις. 22, 143, 168.

PROPORTIONALITÉ INVERSE DES LONGUEURS DES CORDES AVEC LES FRÉQUENCES DE LEURS VIBRATIONS. 25, 29, 35.

QUESTION DE LA DÉFENSE DE QUINTES (ETC.) SUCCESSIVES. 81, 101, 129, 130, 170.

QUESTION DE LA VALEUR DE LA MUSIQUE GRECQUE ANTIQUE. 85, 86, 89, 121, 131.

QUESTION DE L'EXISTENCE D'INTERVALLES CONSONANTS OU ENTRE LE NOMBRE SEPT. 35, 37, 161—164, 169.

QUESTION DE SAVOIR QUELLES CONSONANCES ÉTAIENT ADMISES PAR LES ANCIENS. 26, 27, 31, 79, 80, 91, 99, 101, 121, 123, 124, 153.

⁴⁾ P. 113: viola = lyra; viola = genus cythararum.

- QUESTION DE SAVOIR SI ARISTOXÈNE ET LES ARISTOXÉNIENS ONT CONNU LA GAMME UNIFORMÉMENT TEMPÉRÉE À DOUZE INTERVALLES. 33—35, 78, 113, 114, 121.
- QUESTION DE SAVOIR SI LES ANCIENS ONT CONNU LA POLYPHONIE. 21, 65, 78—82, 86, 91, 92, 99, 101, 121, 123, 124, 153.
- QUESTION DE SAVOIR S'IL Y A DEUX OU PLUSIEURS MODES. 39, 64, 69—71, 75, 86, 95 (mode grec = *ἀρμονία*), 98, 110, 119, 170.
- RÈGLE DES FONDEURS DE CLOCHES. 28.
- RÈGLES POUR LA COMPOSITION MUSICALE. 67, 74, 81, 92, 95, 126; (voir aussi: *Contrepoint*).
- RÉUNION DE TÉTRACHORDES EN SYSTÈMES. 86, *passim*.
- SCULPTURE ANTIQUE. 132.
- SECTIO CANONIS PYTHAGORICI. 90, *passim*.
- SÉMIONS, NOMS NOUVEAUX. 128, 129, 167, 559, 561.
- SENARIUS, 27, 37, 141, 162, 169.
- SON DANS LE VIDE? 110, 123.
- SYSTÈME DE LA SOLMISATION. 124, 126.
- SYSTÈMES DE NOTES, 86; (voir aussi *Invention et écriture des notes*).
- TÉLESCOPE SANS TUYAU. 88.
- TEMPÉRAMENTS. 18, 43—45, 66, 91, 102, 110, 112, 114—116, 122, 123, 143, 154, 157, 168; de Salinas(?). 113; de Werckmeister (et d'autres). 110, 134, 135; de Zarlino. 47, 54, 113, 115, 116, 168; „du ton moyen” („temperament veritable” suivant Huygens). 45, 46, 58, 59, 72, 113, 115—117, 121, 133, 143, 145, 146, 149—161, 168, 169; tempéraments uniformes et cycles harmoniques (voir aussi *περιστάσεις*). 18, 19, 143, 144; à 12 intervalles (gamme tempérée). 110, 122, 135, 136, 144, 145, à 31 intervalles (tempérament de Huygens). 22, 44, 112, 113, 129, 139—173, 557.
- TÉTACHORDE. 31, 75, 79, 97, 102, 116, 118; (voir aussi *Réunion de tétrachordes en systèmes*).
- THÉORIE DE STEVIN SUR L'ÉGALITÉ DES 12 INTERVALLES DE LA GAMME. 17, 27, 32—35, 64, 141, 143, 144.
- TOUCHES SCINDÉES (voir *Instruments de musique*).
- TRITON ET FAUSSE QUINTE. 56, 73, 131, 156, 161, 163, 165, 167, 560.
- UNITÉ DE LONGUEUR. 64.

MATHEMATIQUES (p. 193—554).

- APPLICATION DES LOGARITHMES À LA MUSIQUE. 202—205, 213, 214, 291, 377.
- COURBES ⁵⁾. Catacaustiques (voir *Optique*); chaînette. 480, 484, 489, 513, 551; cissoïde. 213, 223, 256, 257, 443, 514; conchoïde. 537, 538; courbe de descente uniforme. 480, 489, 505;

⁵⁾ Nous ne faisons pas mention dans cette liste des nombreux endroits où il est question de sections coniques ni de ceux où il s'agit de différentes courbes du troisième, quatrième ou cinquième degré.

- courbe de Wallis. 204, 373; courbes géométriques. 210, 481; courbes osculatrices. 451, 454; courbes transcendentes. 525; curvæ filares. 192, 463—466, 484, 495; cycloïde. 216, 258, 448, 451, 453, 470, 474, 475; épicycloïde. 216, 223, 285, 407; folium Cartesii. 244—255, 469; hyperboloïdes (hyperboles de divers degrés). 212, 223, 256, 257, 302; lemniscate. 496—498, 621; ligne cycloeylindrique. 453; logarithmique. 204, 206, 291, 294, 373, 408, 413—415, 451, 476, 482, 526, 527, 544—546, 548—551, 554; loxodromique. 375; première ovale de Descartes. 448, 451, 463—466, 484, 499; paraboloides (paraboles de divers degrés). 212, 223, 256, 257, 443, 514; spirale d'Archimède. 370; sinusoïde. 453; traîtresse. 480; verrière. 376, 397—399, 620, 621. Voyez en outre sur quelques-unes de ces courbes la Table IV qui précède.
- COURS MATHÉMATIQUE D'HÉRIGONE (Tab. III). Consultez la p. 619 qui suit, où nous apportons une importante correction au texte de la p. 209.
- DÉMONSTRATION (OU INVENTION) MÉCANIQUE, OU CINÉMATIQUE, DE PROPOSITIONS GÉOMÉTRIQUES. 504, 553, 554, 621 (addition au texte de la p. 408).
- EPOQUE VERS LAQUELLE HUYGENS COMMENÇA À SE SERVIR COURAMMENT DU CALCUL DES LOGARITHMES, 202—205, 619. N'oubliez pas de consulter cette dernière page où nous apportons des corrections importantes au texte des p. 202 et 204.
- GRANDEURS ET NOMBRES, LE CONTINU ET LE DISCRET. 217, 264, 308, 323, 370—374, 380, 387—390, 480, 485, 503.
- INDUCTION. 213, 372, 390, 479.
- OPTIQUE. Catacaustiques. 202—504, perspective. 220, 402; ovales de Descartes (voir *Courbes*); problème d'Alhazen. 196, 218, 265—271, 328—333; quarts de cercle avec des verres de lunette. 553.
- PROJECTION. 402, 428, 429 (voir aussi *Optique, perspective*).
- RIGUEUR OU INSUFFISANCE DES DÉMONSTRATIONS. 212, 213, 223, 259, 303—327, 369, 374, 389, 490, 479.
- SÉRIES. 200—206, 214, 215, 261—263, 291—294, 303—309, 375, 376, 387, 388, 391—393, 395—400, 448, 449, 453, 471—473, 488, 527, 621.
- SIÈCLE SAGE DE STEVIN⁶⁾. 371.
- TRIGONOMÉTRIE ET GONIOMÉTRIE. 202, 203⁷⁾, 213, 375, 447, 451, 455—461, 619⁷⁾.

⁶⁾ Voyez sur le siècle sage de Stevin les p. 554 et 555 du T. XV.

⁷⁾ Les calculs logarithmiques de l'Appendice X au Traité des couronnes et des parhélies sont de nature goniométrique et trigonométrique, comme ceux des Manuscrits K et A dont il est question à la p. 619 (correction à la p. 204).

ADDITIONS ET CORRECTIONS¹⁾.

Page	Au lieu de	lisez
8 ligne 9	p. 184	p. 185
17 note 3	p. 33	p. 34
27 ligne 3	point du vue	point de vue
28 ligne 12	Règle des fondeurs. — Voyez plus loin p. 170.	
28 note 5	<i>Le catalogue de vente des livres de Chr. Huygens mentionne lui aussi (libri mathem. in 4°, 119): Jac. Fabri Musica, Paris 1552.</i>	
35 ligne 4	du son grave	du ton grave
	<i>Dans la ligne 6 aussi il est question du „ton grave” et dans la ligne 5 du „ton aigu”. Le t et le f de Huygens sont parfois fort semblables l'un à l'autre: on peut en quelques endroits lire tout aussi bien „ton” que „fon”.</i>	
46 ligne 3 des notes	Senesc.	Senesc.
54 note 23	p. 46	p. 47
66 note 17	<i>On ne connaît plus d'autres compositions de Const. Huygens que celles qui se trouvent dans les „Pathodia Sacra et profana occupati” de 1647, réimprimés en 1882: voyez la note 2 de la p. 30 du T. I.</i>	
72 note 11 ligne 4	p. 52	p. 51
87 ligne 9	aussi, à	aussi à
95 ligne 1 des notes	ῥῥῥῥῥῥ	ῥῥῥῥῥῥ
96 ligne 15	spissum	spissum
104 ligne 7 d'en bas	c 1 2 3 5 6 toe	c 1 2 3 5 6 toe
124 note 91	<i>Instrumenta polyplectra. Puisque πῆκτερον ou plectrum = id quo fides (cithare etc.) tenduntur, il semble bien qu'il n'est question ici que d'instruments à cordes.</i>	
127 ligne 5 des notes	ton	toni
127 note 109 ligne 4	mélodique;	mélodique:

¹⁾ Voyez aussi le deuxième alinéa de la note 56 de la p. 207, où il s'agit d'une correction à apporter dans le T. XIX.

Le lecteur est prié en outre de corriger, également dans le T. XIX, dans la l. 12 de la p. 644, 4^{ème} objection en 11^{ème} objection. Et dans la l. 4 de la note 6 de la p. 104 du T. XIX il faut corriger ED en EN.

Page	Au lieu de	lisez
129 ligne 2 d'en bas	Manuscrit G, f. 47 r. Ce qui suit se rattache aux remarques sur l'ouvrage de J. van der Elst.	
	Ludovicus Viadana inventor Bassi Continui in Polyplectris A° 1610. Permittit quintas et octavas continenter poni in partibus hisce, quanquam non permittat in cantu. Videndum. Quartas supra quintas, consecutive non posse poni, supra tertias posse. Potius infra cantum continendam symphoniam omnem Bassus continui quo magis emineat cantus. qui quo minus obturbetur, non idem cantus in polyplectro exponendus quem vox sequitur.	
	L. (Grossi) da Viadana naquit à Mantoue en 1564 et décéda à Gualtieri, probablement en 1645. On connaît beaucoup de ses compositions (messes, madrigaux, motets etc.). En 1620 parurent à Francfort ses „Opera omnia sacrorum concentuum etc. cum basso continuo et generali organo applicato etc.”	
130 note 12, ligne 8	either or them	either of them
148 et 149	Dans la dernière colonne de la table le signe ♯ doit être remplacé par ♮.	
149 ligne 10	1)	11)
149 ligne 12	V ²)	V
156 ligne 13	fixte	fixte
156 ligne 16	ce que	ce qui
156 ligne 8 d'en bas	Le fon	Le ton
169 ligne 8	♯1	♮1
170 ligne 7 d'en bas	De la cause des tons . . . trompettes etc. — Voyez ce que Huygens dit en 1672 sur la construction de la trompette (T. XIII, p. 804) en parlant de la règle des fondeurs (T. XIX, p. 363, note 3).	
179 dernière ligne	ainfi	ainfi
180 ligne 10	. . . pas d'espace absolu. — A la p. 658 du T. XIII (dernière ligne) nous avons écrit par inadvertance, en citant la p. 215 du T. XVI: „nullus est mutatio loci respectu spatij mundani”. Le lecteur est prié de corriger „nullus” en „nulla”, conformément au texte du T. XVI.	
190 note 1	La date de la Pièce que nous avons intitulée „Le corps, la surface, la ligne, le point” est sans doute 1690 d'après le lieu que cette Pièce occupe dans le Manuscrit G. Il est vrai qu'on trouve exceptionnellement la date 1692 sur la f. 44: c'est la date, d'après Huygens, de la Pièce „Experimenta circa Electrum” que nous avons publiée aux p. 612 et suiv. du T. XIX. Dans le T. XIX nous avons admis cette date 1692, tout en remarquant (p. 607) que c'est dans une lettre à Leibniz de novembre 1690 que Huygens parle de ses expériences sur „les effets de l'ambre”. Il nous semble maintenant extrêmement probable que Huygens se soit trompé en écrivant „1692”. C'est sans doute en décembre	

Page

Au lieu de

lisez

1693 qu'il a inscrit cette date 1692 lorsqu'il ajouta à la relation de ses expériences de 1690 la nouvelle observation de ce mois de décembre 1693 que nous avons publiée dans le T. XIX à la fin du § 17 de la p. 615.

En 1690 parut (avec le *Traité de la Lumière*) le *Discours de la Cause de la Pesanteur*, dans lequel Huygens traite e. a. de la forme de la terre (voyez le T. XXI). Qu'elle soit sphérique ou non, il faut bien déterminer, tant sur les globes que sur les cartes, la place de chaque ville ou de chaque vaisseau par la „longitudo” et la „latitudo”. Est-ce à cette considération que sont dus les mots biffés *spharicæ conoe*...æ (p. 190)??

201 ligne 1

pendre

prendre

202 dernière ligne

.. il commença à se servir du calcul des logarithmes ..

.. il commença à se servir couramment du calcul des logarithmes ...

204 dernières lignes

.. qu'avant 1661 on ne trouve pas de calculs logarithmiques dans les manuscrits de Huygens.

.. qu'avant 1661 on ne trouve pas de calculs logarithmiques dans les manuscrits de Huygens (ce qui toutefois n'est pas absolument exact).

En effet, avant 1661, plus précisément en 1657 et 1659, Huygens s'était servi en quelques rares occasions de logarithmes en considérant, en sa qualité d'astronome, différents triangles sphériques. Consultez dans notre T. XI les p. 528 et 531 tirées du Manuscrit K, 367—373 provenant du Manuscrit A. — La date 1657 d'après la note 6 de la p. 11 du T. XVII.

204 note 32

1659

1695

206 ligne 8 et note 47

Merfenne a-t-il été inspiré par Roberval, comme le suppose Tannery? Voyez sur cette question les lettres de Roberval et de Huygens de 1656, Nos 324 et 329 du T. I, et aussi ce que van Schooten dit en 1650 sur Merfenne et Roberval (T. I, p. 132).

209 lignes 6—10

Nous nous sommes trompés en écrivant „que le nom de Fermat ne se trouve pas chez Hérigone” dans la „*Propos. XXI. De maximis & minimis*”. En effet, il écrit à la p. 68 du T. VI ou *Supplementum* (de 1644, mais „achevé d'imprimer” en juillet 1642) de son „*Curfus mathematicus*” ou „*Cours mathématique*”: „*nec unquam fallit haec methodus, ut asseritejus inuentor, qui est doctissimus Fermat consiliarius in parlamento Tolofano excellens geometra, nec ulli secundus in arte*”

Page	Au lieu de	lisez
	<i>Analytica, etc.</i> Comparez la note 1 de la p. 171 du T. I de 1891 des <i>Ouvres de Fermat</i> .	
218 ligne 7 d'en bas	Pièces X et XI	Pièces IX et X
220 ligne 7	d'avoir	avoir
220 note 136	p. 188	p. 192
221 note 138 ligne 2	(T. I, p. 334)	(T. II, p. 334)
228 ligne 4	maximales	maximales
243 ligne 6	premier alinéa de la p. —	premier alinéa de la p. 244 —
257 ligne 14	Pièces III et VI	Pièces III et IV
289 première note	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ Lisez plutôt $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.	
306 ligne 23	reperta	reperta
371 ligne 8	Nous n'avons pas voulu dire dans le texte qu'avant Aristote Archytas avait déjà dit (d'après le commentaire de Simplicius sur les Catégories d'Aristote): ἐστὶν ὁ γένους ἀρχαῖος τινος ἀρχαῖος.	
371 note 12	S. Stevin a évidemment fait connaissance avec J. J. Scaliger après que celui-ci s'était établi à Leiden en 1593 comme professeur à l'université.	
371 note 12 ligne 8	· punctum	· punctum
	Le petit trait horizontal au-dessus du point · ne se trouvait pas dans les épreuves. Nous n'avons donc pas pu le corriger. Il n'a aucun sens et est dû uniquement à ce qu'on appelle en néerlandais le „drukfouten-duivel” (diable des fautes d'impression). Que personne ne s' imagine donc que d'après Scaliger les Arabes se servaient d'un signe · !	
372 note 13 ligne 6	p. 191	p. 192
372 ligne 4 d'en bas	„Arithmetica universalis” de 1655	„Mathesis universalis sive Arithmeticum opus integrum” de 1657
	Voyez le Cap. I („De Mathesi in genere”) de la „Mathesis universalis”.	
373 ligne 7	p. 234	p. 204
375 ligne 6 d'en bas	La lettre de J. Gregory à J. Collins, où il donne la série de l'arc tangente, est de février 1670 vieux style, 1671 nouveau style.	
376 ligne 14	„La versiera”. On peut consulter sur cette courbe les deux notes, se trouvant respectivement aux p. 151—152 et 251—252 du T. II de 1912 des <i>Ouvres de Fermat</i> . La première, de H. Brocard, est intitulée „La quadrature de la versiera”, l'autre, plus explicite, de A. Aubry „Sur l'origine de la versiera”. Après avoir relevé les mérites de Lalouvière („Quadratura circuli”, 1651) Aubry dit e. a.: „On terminera l'histoire de la versiera en rappelant... que James Gregory (<i>Geometriae pars universalis</i> , Padoue, 1668) l'a donnée... en montrant	

Page	Au lieu de	lisez
	que la quadrature de la versiera se ramène . . . à celle du cercle . . .	
	Le lecteur hollandais peut aussi consulter „De versiera” par E. J. Dijksterhuis, article publié dans la revue „Euclides”, 1932/1933, Noordhoff, Groningen.	
388 lignes 3—2 d'en bas	Dans ses lettres du 15 juillet et du 26 octobre 1674 à Oldenburg Leibniz n'avait pas fait connaître la forme exacte de sa série. Il se contentait d'écrire: „Alia mihi theorematum sunt, momenti non paulo majoris. Ex quibus illud imprimis memorabile est, cujus ope area circuli, vel sectoris ejus dati, exactè exprimi potest per seriem quandam numerorum rationalium continuè productam in infinitum” . . . „seriem numerorum rationalium valde simplicem & regularem”.	
393 ligne 2 des notes	$2 \cdot \frac{16x^3}{225d^3} \bigg dx$	Lisez dans cette formule 525 au lieu de 225.
408 ligne 6	En 1692 et 1693 Huygens mentionne „la methode des Tangentes de M. de Roberval” (T. X, p. 352 et 440).	
411 ligne 6	À la Haye (septembre 1670 — juillet 1671).	Lisez juin au lieu de juillet.
414 note 5 ligne 4	LVIKIL	LVIKIL
416 ligne 4	inutilis	inutiles
443 ligne 8 d'en bas	æquatio $x^3 \propto aay$ [Fig. 87]	æquatio $x^3 \propto ayy$ [Fig. 87]
449 note 12	Pendulum cylindricum trichordon. Dans la note 3 de la p. 532 du T. XIII nous avons écrit par inadvertance: „Ceteris paribus, le moment des forces est proportionnel à tg α , c.à.d. à fort peu près à la longueur des fils”. Le lecteur est prié de corriger cette phrase comme suit: „Ceteris paribus, le moment des forces est proportionnel à tg α , c.à.d. pour un même angle de rotation autour de l'axe le moment est à fort peu près inversement proportionnel à la longueur des fils”.	
463 ligne 4	AH = c, HA = m	AH = c, HA = m
472 ligne 5 d'en bas	$50\frac{5}{49}$	$50\frac{5}{49}$
476 ligne 1	RAYON MINIMAL	RAYON DE COURBURE MINIMAL
485 ligne 5 d'en bas	recherche	recherches
492 ligne 18	egaux perpendiculaires	egaux aux perpendiculaires
494 ligne 3 d'en bas	aa \propto bb	aa + bb
496 ligne 2	„lemniscate”. Ce fut Jacques Bernoulli qui inventa en 1694 le nom de lemniscata: consultez sa „Constructio curvæ accessus et recessus æquabilis, ope rectificationis curvæ cujusdam algebraicæ, addenda nuperæ solutioni mensis Junii” (Acta Eruditorum, Sept. 1694).	
496 ligne 4	$d + \frac{oe}{a} + \frac{oe}{dx} - \frac{ed}{x}$	$d - \frac{oe}{d} + \frac{oe}{dx} - \frac{ed}{x}$

Page	Au lieu de		lisez
517 ligne 2 d'en bas	y	y	
540 note 3.	$+ \frac{1}{2y}$	$+ \frac{1}{2yy}$	
552 note 1	L'article mathématique de Huygens (voir le T. XXI) „ <i>Excerpta ex epistola C.H.Z. ad G.G.L.</i> ” (1694) ne se rapporte pas exclusivement à la courbure des voiles.		

SOMMAIRE.

HOMMAGE DE HUYGENS À THÉOCRITE	1
MUSIQUE ET MATHÉMATIQUE	3
MUSIQUE	15
HUYGENS ET EUCLIDE	175
MATHEMATICA VARIA: LES MANUSCRITS	193
HUYGENS À L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES. COMMUNICATIONS SUR DES SUJETS DE MATHÉMATIQUE	197
LES TROIS GRANDS PROBLÈMES DE L'ANTIQUITÉ	367
MATHEMATICA VARIA 1666—1681	405
MATHEMATICA VARIA 1681—1695	445
PROBLÈMES ET MÉTHODES MODERNES	477
RÈGLES DE L'ACCOMPAGNEMENT	555
TABLES.	
I. PIÈCES ET MÉMOIRES	565
II. PERSONNES ET INSTITUTIONS MENTIONNÉES	570
III. OUVRAGES CITÉS	581
IV. PAGES DES MANUSCRITS F, G, H ET I se RAPPORTANT À DES SUJETS DE MATHÉ- MATIQUE PURE QUI ONT ÉTÉ CITÉES OU PUBLIÉES, EN TOUT OU EN PARTIE, DANS LES TOMES IX ET X CONTENANT LA CORRESPONDANCE ANNOTÉE ET POURVUE D'APPENDICES DES ANNÉES 1685—1695	597
V. MATIÈRES TRAITÉES.	612
ADDITIONS ET CORRECTIONS	617

Q Huygens, Christiaan
113 Oeuvres complètes
H39
1888
t.20

P&A Ser.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
